Osvald Demuth

О конструктовных аналогах обобщено абсолютно непрерывных функций и функций обобщеной ограниченой вариации

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 19 (1978), No. 3, 471--487

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105870

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

19,3 (1978)

О КОНСТРУКТИВНЫХ АНАЛОГАХ ОБОБЩЕННО АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание: В заметке вводятся и исследуются конструктивные аналоги функций типов VBG_*, ACG_*, VBG и ACG и аппроксимативной дифференцируемости почти всюду. Исследуемые понятия важны для теории неабсолютно сходящихся интегралов.

Ключевые слова: Обобщенно абсолютно непрерывная функция, функция обобщенной ограниченной вариации, аппроксимативная дифференцируемость.

AMS: Primary 02E99, 26A39
Secondary 26A45, 26A24

В следующем k, ℓ, m, n, p, q, s и t - переменные для натуральных чисел (НЧ), i и j - переменные для целых чисел (ЦЧ), a, b, c и d - переменные для рациональных чисел (РЧ), u, v, w, x, y и z - переменные для конструктивных действительных чисел (КДЧ), а ξ и η - переменные для псевдочисел (ПЧ). Мы пользуемся без дальнейших ссылок обозначениями и определениями из [2] и [14], понятиями Π_1-чисел и Π_2-чисел из [11], обозначениями, связанными с псевдодифференцируемостью, из [11] - [13], понятиями покрытия, функции, абсолютно непрерывной функции и функции ограниченной вариации из [4] и свойствами $(T_1)^*$ [8] и $(N)^*$ [9]. Следует заметить, что для любой функции $\mathcal{F}$ выполнено

$\forall x((x \leq 0 \supset \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(0)) \,\&\, (1 \leq x \supset \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(1)))$.

Мы напомним несколько обозначений, введенных в предыдущих работах.

Пусть $\mathcal{F}$ функция, u и z КДЧ, $v \Delta w$ сегмент, p и q НЧ, а $\{G_n\}_n \in S$ (см. [2]). Тогда

1) Λ обозначает пустое слово;

$Var(z, \mathcal{F}, v \Delta w)$ обозначает: z является вариацией функции $\mathcal{F}$ на сегменте $v \Delta w$ (см. [4]);

h_z функция такая, что $\forall x (h_z(x) = z \cdot max(min(x, 1), 0))$;

$\alpha(\mathcal{F}) \rightleftharpoons \forall a \exists y\, Var(y, \mathcal{F} - h_a, 0 \Delta 1)$, $\Delta(\mathcal{F}, v \Delta w) \rightleftharpoons \mathcal{F}(w) - \mathcal{F}(v)$,

$D(u, \mathcal{F}, z) \rightleftharpoons \forall m \exists n \forall y (|y - z| \leq 2^{-n} \supset |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(z) - u \cdot (y - z)| \leq 2^{-m} \cdot |y - z|)$;

2) $\mathcal{A}(\mathcal{F}, p, q)$ обозначает: для любой системы неперекрывающихся рациональных сегментов $\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{p}$ верно $(\sum_{i=1}^{p} |a_i \Delta b_i| < 2^{-q} \supset \sum_{i=1}^{p} |\Delta(\mathcal{F}, a_i \Delta b_i)| < 2^{-p})$;

3) $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \rightleftharpoons \forall m \exists n\, \mathcal{A}(\mathcal{F}, m, n)$, $\mathcal{A}_{кл}(\mathcal{F}) \rightleftharpoons \forall m \neg\neg \exists n\, \mathcal{A}(\mathcal{F}, m, n)$;

4) если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, то

а) $\langle I, \mathcal{F} \rangle \llcorner v \Delta w \lrcorner$ (соотв. $\langle S, \mathcal{F} \rangle \llcorner v \Delta w \lrcorner$, соотв. $\langle \omega, \mathcal{F} \rangle \llcorner v \Delta w \lrcorner$) КДЧ, являющееся инфимумом (соотв. супремумом, соотв. колебанием) функции $\mathcal{F}$ на сегменте $v \Delta w$;

б) $\sigma_{\mathcal{F}}$ псевдооператор, являющийся продолжением функции $\mathcal{F}$ на псевдочисла (см. [11]);

5) если $\alpha(\mathcal{F})$, то $V\langle \mathcal{F}, z \rangle$, $V^{+}\langle \mathcal{F}, z \rangle$ и $V^{-}\langle \mathcal{F}, z \rangle$ неубывающие функции такие, что $V\langle \mathcal{F}, z \rangle(0) = V^{+}\langle \mathcal{F}, z \rangle(0) = V^{-}\langle \mathcal{F}, z \rangle(0) = 0$ и для любого сегмента $x \Delta y$ КДЧ $\Delta(V\langle \mathcal{F}, z \rangle, x \Delta y)$ (соотв. $\Delta(V^{+}\langle \mathcal{F}, z \rangle, x \Delta y)$, соотв. $\Delta(V^{-}\langle \mathcal{F}, z \rangle, x \Delta y)$) является вариацией (соотв. положитель-

ной вариацией, соотв. отрицательной вариацией) функции $(\mathcal{F} - h_x)$ на сегменте $x \Delta y$, $V[\mathcal{F}]_\llcorner v \Delta w_\lrcorner \rightleftharpoons \Delta(V\langle \mathcal{F}, 0\rangle, v \Delta w)$;

6) $P(u, \{G_n\}_n, x)$ значит: u является значением $\{G_n\}_n$ в точке x (см. [2] и [3]).

Замечание 1. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ функции, $\alpha(\mathcal{G})$. Согласно теореме 1 из [6], теореме из [4], замечанию 1 из [7], теореме 3 из [3] и теореме 3 из [5]

а) верно $\alpha(\mathcal{F}) \equiv (Д(\mathcal{F}) \& \exists y \, Var(y, \mathcal{F}, 0 \Delta 1))$,

б) если $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна (на $0 \Delta 1$), то $\alpha(\mathcal{F}) \& \mathfrak{a}(\mathcal{F}) \& \alpha(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ и, следовательно, для любого S_σ-множества (см. [2]) $\{H_m\}_m$ сходятся ряды $\sum_m \langle \omega, \mathcal{F}\rangle_\llcorner H_{m\lrcorner}$ и $\sum_m V[\mathcal{F}]_\llcorner H_{m\lrcorner}$,

в) если $(\alpha(\mathcal{F}) \& \mathfrak{a}_{\kappa\lambda}(\mathcal{F}) \vee Д(\mathcal{F}) \& \mathfrak{a}(\mathcal{F}))$, то $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$.

Замечание 2. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $Д(\mathcal{F})$. Тогда 1) выполнено

(1) $$\forall \xi (\xi \in \Pi_1 \supset \sigma_{\mathcal{F}}(\xi) \in \Pi_1)$$

в том и только том случае, если $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ (теорема 11 из [11]);

2) если (1), то ввиду теоремы 1 из [14] $\mathcal{F}$ представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций и, следовательно, согласно [10] $\mathcal{F}$ обладает свойствами $(S)^\Delta$, $(T_1)^\Delta$, $(T_1)^*$ и $(N)^*$.

Определения. Функцию $\mathcal{F}$ мы назовем функцией типа

1) AC и будем писать $AC(\mathcal{F})$, если $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна (на $0 \Delta 1$);

2) типа α, если верно $\alpha(\mathcal{F})$;

3) $W\alpha$ и будем писать $W\alpha(\mathcal{F})$ если $\mathcal{F}$ равномерно

непрерывная функция квазислабо ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ и верно $Д(\mathcal{F})$;

4) WAC и будем писать $WAC(\mathcal{F})$, если $W\alpha(\mathcal{F})$ & & $a_{кл}(\mathcal{F})$.

Мы заметим, что любая функция ограниченной вариации является равномерно непрерывной.

На основании замечания 1 и теоремы 2 из [14] мы получаем следующее утверждение.

<u>Лемма 1</u>. Пусть T слово,

(2) $T \mathbin{\bar{\bar{\times}}} AC \vee T \mathbin{\bar{\bar{\times}}} \alpha \vee T \mathbin{\bar{\bar{\times}}} WAC \vee T \mathbin{\bar{\bar{\times}}} W\alpha$,

$\mathcal{F}$ функция типа T, $\{H_n\}_n$ последовательность сегментов, $\overline{\mathcal{H}}(\{H_n\}_n)$ (см. [14]), а $x_0 \Delta x_1$ сегмент. Тогда $[\mathcal{F}, \{H_n\}_n]$ и $\mathcal{F}^{[x_0 \Delta x_1]}$ функции типа T (см. [14], стр. 500).

Обозначение. Для последовательности последовательностей сегментов $\{\{H_n^m\}_n\}_m$ мы будем писать $\mathcal{Y}(\{\{H_n^m\}_n\}_m)$, если

$\forall m \overline{\mathcal{H}}(\{H_n^m\}_n) \& \forall \xi(\xi \in 0 \Delta 1 \supset \neg\neg \exists m \neg \exists n (\xi \in H_n^m))$.

Легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $v \Delta w$ сегмент, $\{x_k \nabla y_k\}_k$ последовательность интервалов и $\{\{H_n^m\}_n\}_m$ последовательность последовательностей сегментов такие, что $v \Delta w \subseteq$ $\subseteq 0 \Delta 1 \& \neg\neg \exists \xi (\xi \in v \nabla w \& \neg \exists k (\xi \in x_k \nabla y_k)) \& \mathcal{Y}(\{\{H_n^m\}_n\}_m)$. Тогда не могут не существовать рациональный сегмент $a \Delta b$, НЧ m и ПЧ η , для которых верно $v < a < \eta < b < w$ & $\neg \exists k (\eta \in x_k \nabla y_k) \& \forall \xi n (\xi \in a \Delta b \& \xi \in (H_n^m)^0 \supset \neg\neg \exists k (\xi \in x_k \nabla y_k))$.

Пусть $\{v_k\}_k$ последовательность КДЧ. Мы скажем, что ряд $\sum_k v_k$ псевдосходится, если $\forall m \neg\neg \exists n \forall p (|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k| < 2^{-m})$. Следует заметить, что если $\forall k (0 \leq v_k)$, то ряд $\sum_k v_k$ псевдосходится в том и только том случае, если $\neg\neg \exists b \forall t (\sum_{k=1}^{t} v_k < b)$.

Обозначение. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $\{\{H_n^m\}_n\}_m$ последовательность последовательностей сегментов, а T слово, (2). Тогда мы обозначим

1) $TG(\mathcal{F}, \{\{H_n^m\}_n\}_m)$, если верно $\mathcal{Y}(\{\{H_n^m\}_n\}_m)$ & & $\forall m\, T([\mathcal{F}, \{H_n^m\}_n])$;

2) $TG_*(\mathcal{F}, \{\{H_n^m\}_n\}_m)$ (соотв. $TG_0(\mathcal{F}, \{\{H_n^m\}_n\}_m)$), если выполнено $TG(\mathcal{F}, \{\{H_n^m\}_n\}_m)$ и для всякого НЧ m ряд $\sum_m \langle \omega, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} H_{n \lrcorner}^m$ сходится (соотв. псевдосходится).

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а T и U слова, (2) и

(3) $$U \rightleftharpoons G \vee U \rightleftharpoons G_0 \vee U \rightleftharpoons G_* .$$

Мы скажем, что $\mathcal{F}$ является функцией типа TU, и будем писать $TU(\mathcal{F})$, если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция и существует последовательность S_σ-множеств $\{\{H_n^m\}_n\}_m$ такая, что верно $TU(\mathcal{F}, \{\{H_n^m\}_n\}_m)$.

Исходя от определений, мы на основании лемм 1 и 2 сразу получаем следующее утверждение.

<u>Теорема 1</u>. Пусть T слово, (2), $\mathcal{F}$ функция типа TG, $x_0 \Delta y_0$ сегмент, $x_0 \Delta y_0 \subseteq 0 \Delta 1$, а $\{K_n\}_n$ последовательность сегментов,

$\mathcal{H}(\{K_m\}_m) \,\&\, \neg\neg \exists \xi (0 < \xi < 1 \,\&\, \neg \exists m (\xi \in (K_m)^\circ))$.

Тогда не могут не существовать рациональные сегменты $a_0 \Delta b_0$ и $a_1 \Delta b_1$ и ПЧ η такие, что $x_0 < a_0 < b_0 < y_0$ & & $0 < a_1 < \eta < b_1 < 1 \,\&\, \neg \exists m (\eta \in (K_m)^\circ)$ и функции

$\mathcal{F}^{[a_0 \Delta b_0]}$ и $[\mathcal{F}, \{K_n\}_n]^{[a_1 \Delta b_1]}$ являются функциями типа T.

Мы введем понятие, являющееся конструктивным аналогом аппроксимативной дифференцируемости почти всюду (см. [1]).

Обозначения. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а $\{G_n\}_n \in S$. Мы будем писать $Д^{ap}(\mathcal{F})$ (соотв. $Д^{ap}(\mathcal{F}, \{G_n\}_n)$), если для всякого НЧ m существует S_σ-множество $\{H_n^m\}_n$ меры меньшей чем 2^{-m}, $\overline{\mathcal{H}}(\{H_n^m\}_n)$, такое, что $Д([\mathcal{F}, \{H_n^m\}_n])$ (соотв. $Д([\mathcal{F}, \{H_n^m\}_n])$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $(\neg \exists m (x \in H_n^m) \supset \exists y (P(y, \{G_n\}_n, x) \&$ $\& D_{кл}(y, [\mathcal{F}, \{H_n^m\}_n], x)))$.

Лемма 3. 1) Для функции $\mathcal{F}$ верно

а) $Д^{ap}(\mathcal{F})$ в том и только том случае, если существует $\{G_n\}_n \in S$ такое, что $Д^{ap}(\mathcal{F}, \{G_n\}_n)$;

б) если $Д(\mathcal{F})$, то $Д^{ap}(\mathcal{F})$.

2) Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ функции, y КДЧ, $\{H_n\}_n$ S_σ-множество, $\overline{\mathcal{H}}(\{H_n\}_n)$, $x_0 \Delta x_1$ сегмент, а $\{F_n^1\}_n \in S$ и $\{F_n^2\}_n \in S$ такие, что $Д^{ap}(\mathcal{F}_1, \{F_n^1\}_n) \& Д^{ap}(\mathcal{F}_2, \{F_n^2\}_n)$. Тогда $Д^{ap}(y \cdot \mathcal{F}_1, y \cdot \{F_n^1\}_n)$, $Д^{ap}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2, \{F_n^1\}_n + \{F_n^2\}_n)$, $Д^{ap}(|\mathcal{F}_1|)$, $Д^{ap}(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2)$, $(\exists m (|\mathcal{F}_1| \geq \frac{1}{m}) \supset Д^{ap}(\frac{1}{\mathcal{F}_1}))$, $Д^{ap}([\mathcal{F}_1, \{H_n\}_n])$ и $Д^{ap}(\mathcal{F}_1^{[x_0 \Delta x_1]})$ (см. теорему 2 из [14]).

Легко доказать следующие утверждения.

Лемма 4. Пусть $\mathcal{F}$ функция, x КДЧ, а $\{\{H_n^m\}_n\}_m$ последовательность S_σ-множеств такая, что для всякого НЧ m - $\overline{\mathcal{H}}(\{H_n^m\}_n)$ и мера $\{H_n^m\}_n$ меньше чем 2^{-m}. Тогда

$Var(x, \mathcal{F}, 0 \Delta 1)$ в том и только том случае, если существует последовательность КДЧ $\{x_m\}_m$ такая, что $\forall m \, Var(x_m, [\mathcal{F}, \{H_n^m\}_n], 0 \Delta 1) \& (x_m \xrightarrow[m \to \infty]{} x)$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{F}$ функция. Тогда $\alpha(\mathcal{F}) \equiv (Д^{ap}(\mathcal{F}) \& \exists x \, Var(x, \mathcal{F}, 0 \Delta 1))$.

Лемма 5. Пусть $v \Delta w$ сегмент, $v \Delta w \subseteq 0 \Delta 1$, p НЧ, а $\mathcal{G}$ равномерно непрерывная функция, $\forall x (|\mathcal{G}(x)| > 0 \supset x \in v \nabla w)$. Тогда существует абсолютно непрерывная функция φ такая, что φ возрастает (соотв. убывает) на сегменте $v \Delta \frac{1}{2} \cdot (v+w)$ (соотв. $\frac{1}{2} \cdot (v+w) \Delta w$), $\forall x (((x \leq v \vee w \leq x) \supset \varphi(x) = 0) \& (v < x < w \supset |\mathcal{G}(x)| < \varphi(x))) \& \varphi(\frac{1}{2} \cdot (v+w)) = \langle S, |\mathcal{G}| \rangle \llcorner v \Delta w \lrcorner + 2^{-p} \leq \langle \omega, \mathcal{G} \rangle \llcorner v \Delta w \lrcorner + 2^{-p}$.

На основании этой леммы и теорем 1, 2 и 4 из [14] легко доказать следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда выполнено $Д(\mathcal{F})$ в том и только том случае, если для всякого НЧ m существует S_6-множество $\{H_n^m\}_n$ меры меньшей чем 2^{-m} такое, что $\mathcal{H}(\{H_n^m\}_n) \& Д([\mathcal{F}, \{H_n^m\}_n])$ и ряд $\sum_p \langle \omega, \mathcal{F} \rangle \llcorner H_p^m \lrcorner$ (соотв. ряд $\sum_p \langle \omega, \mathcal{F} - [\mathcal{F}, \{H_n^m\}_n] \rangle \llcorner H_p^m \lrcorner$) сходится.

Следствие. Пусть $\{H_n\}_n$ S_6-множество и $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция такие, что $\mathcal{H}(\{H_n\}_n) \& \& \forall x (|\mathcal{F}(x)| > 0 \supset \exists n (x \in (H_n)^0))$ и ряд $\sum_n \langle \omega, \mathcal{F} \rangle \llcorner H_n \lrcorner$ сходится. Тогда $Д(\mathcal{F}) \equiv \forall n \, Д(\mathcal{F}^{[H_n]})$.

Замечание 3. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция,

$v \Delta w$ сегмент, $\neg(v < 0 < w \vee v < 1 < w)$, q НЧ и $\{y_k\}_k$ всюду плотная последовательность КДЧ. Тогда существует S_σ-множество $\{H_n\}_n$ меры $|v \Delta w|$ такое, что

$\forall n (H_n \subseteq v \nabla w \ \& \ \exists k l (\exists_l (H_n) \equiv y_k \ \& \ \exists_n (H_n) \equiv y_l)) \ \&$

$\forall a b (v < a < b < w \supset \exists m (a \Delta b \subseteq \bigcup_{1 \le n \le m} H_n))$, ряд $\sum_n \langle \omega, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} H_{n \lrcorner}$ сходится к КДЧ меньшему чем $\langle \omega, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} v \Delta w_{\lrcorner} + 2^{-q-1}$ и $([\mathcal{F}, \{H_n\}_n] - [\mathcal{F}, v \Delta w])$ абсолютно непрерывная функция вариации меньшей чем 2^{-q}.

Замечание 4. Пусть $\{y_k\}_k$ последовательность КДЧ, $\{\{K_n^m\}_n\}_m$ последовательность последовательностей сегментов и $\{k_m\}_m$ последовательность НЧ такие, что

$\mathcal{Y}(\{\{K_n^m\}_n\}_m) \ \& \ \forall k l (y_k = y_l \supset k = l) \ \&$

$\& \ \forall m n \ \exists k l (y_k = \exists_l (K_n^m) \ \& \ y_l = \exists_n (K_n^m))$.

Тогда $\exists p (\bigcap_{m=1}^{p} (\bigcup_{n=1}^{k_m} K_n^m \cap 0 \Delta 1) = \emptyset)$.

Непосредственным следствием этих замечаний является следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть T и $\mathcal{U}$ слова, где (2) и (3), $\mathcal{F}$ функция типа $T\mathcal{U}$, а $\{y_k\}_k$ всюду плотная последовательность КДЧ, $\forall k l (y_k = y_l \supset k = l)$. Тогда существует последовательность S_σ-множеств $\{\{H_n^m\}_n\}_m$ такая, что $T\mathcal{U}(\mathcal{F}, \{\{H_n^m\}_n\}_m)$ и для всякого НЧ m мера $\{H_n^m\}_n$ меньше чем 2^{-m}, $\forall n \ \exists k l (y_k = \exists_l (H_n^m) \ \& \ y_l = \exists_n (H_n^m))$, причем если $\mathcal{U} \equiv \mathcal{G}_*$, то ряд $\sum_n \langle \omega, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} H^m_{n \lrcorner}$ сходится к КДЧ меньшему чем 2^{-m}.

На основании замечаний 1 и 2, леммы 1, теорем 2 - 4, теорем 1 и 4 из [14] и результатов из [9] и [10] мы получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а T и $\mathcal{U}$ слова, (2) и

(4) $\mathcal{U} \rightleftharpoons \mathcal{G}_* \vee \mathcal{U} \rightleftharpoons \mathcal{G}_0 \vee \mathcal{U} \rightleftharpoons \mathcal{G} \vee \mathcal{U} \rightleftharpoons \Lambda$.

Тогда 1) $(ACU(\mathcal{F}) \supset \alpha U(\mathcal{F}) \,\&\, WACU(\mathcal{F})) \,\&\, ((\alpha U(\mathcal{F}) \vee$
$\vee WACU(\mathcal{F})) \supset W\alpha U(\mathcal{F})) \,\&\, (T(\mathcal{F}) \supset TG_*(\mathcal{F})) \,\&\, (TG_*(\mathcal{F}) \supset$
$\supset Д(\mathcal{F}) \,\&\, TG_0(\mathcal{F})) \,\&\, (TG_0(\mathcal{F}) \supset TG(\mathcal{F})) \,\&\, (TG(\mathcal{F}) \supset Д^{ap}(\mathcal{F})) \,\&$
$\& (\neg\neg \exists m\, BVS(m, \mathcal{F}, 0 \Delta 1) \,\&\, TG(\mathcal{F}) \supset TG_0(\mathcal{F})) \,\&$
$\& (\exists x\, Var(x, \mathcal{F}, 0 \Delta 1) \supset (W\alpha G(\mathcal{F}) \supset \alpha(\mathcal{F})) \,\&$
$\& (WACG(\mathcal{F}) \supset AC(\mathcal{F})))$;

2) если $WACG(\mathcal{F})$, то (1);

3) если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и (1), то
$(\alpha U(\mathcal{F}) \supset ACU(\mathcal{F})) \,\&\, (W\alpha U(\mathcal{F}) \supset WACU(\mathcal{F})) \,\&$
$(\neg\neg \exists m\, BVS(m, \mathcal{F}, 0 \Delta 1) \,\&\, Д^{ap}(\mathcal{F}) \supset \mathcal{A}_{кл}(\mathcal{F}))$;

4) если $\alpha G_*(\mathcal{F})$, то $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^\Delta$ (см. [10]) и, следовательно, и $(T_1)^*$;

5) если $WACG(\mathcal{F}) \,\&\, Д(\mathcal{F})$, то $\mathcal{F}$ представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций и, следовательно, обладает свойствами $(T_1)^\Delta, (T_1)^*$ и $(N)^*$.

Пример 1. Существуют функция $\mathcal{F}$ и S_σ -множество $\{H_m\}_m$ меры меньшей чем $\frac{1}{2}$ такие, что $\mathcal{H}(\{H_m\}_m) \,\&$
$\& ACG_0(\mathcal{F}) \,\&\, \mathcal{A}_{кл}(\mathcal{F}) \,\&\, BVS(1, \mathcal{F}, 0 \Delta 1) \,\&\, AC([\mathcal{F}, \{H_m\}_m]) \,\&$
$\& \neg \exists x (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg \exists m (x \in H_m) \,\&\, D_{кл}(\mathcal{F}, x))$.

В следующем мы займемся прежде всего функциями типов ACG_*, αG_*, $WACG_0$, $W\alpha G_0$ и TG, где (2). Соответствующие классические результаты можно найти в [1].

С помощью замечаний 1 и 3 и леммы 1 и теоремы 2 из [14] можно доказать следующее утверждение.

<u>Теорема 6</u>. Пусть T и U слова, $(T \rightleftharpoons AC \vee T \rightleftharpoons WAC \vee$ $T \rightleftharpoons W\alpha) \,\&\, (U \rightleftharpoons G_0 \vee U \rightleftharpoons G \vee U \rightleftharpoons \Lambda)$, пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$ функции типа TU (соотв. ACG_*), $\exists m (|\mathcal{F}_3| \geq \frac{1}{m})$, а y КЧЧ.

Тогда функции $|\mathcal{F}_1|$, $y \cdot \mathcal{F}_1$, $(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)$, $(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2)$ и $\frac{1}{\mathcal{F}_3}$ являются функциями типа $\mathrm{T}\mathcal{U}$ (соотв. ACG_*).

Пример 2. Существуют возрастающие на $0 \Delta 1$ функции $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ такие, что $Д(\mathcal{F}_1) \& Д(\mathcal{F}_2) \& \forall xy (0 \le x < y \le 1 \supset \supset \neg \exists z\, Var(x, \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2, x \Delta y))$ и, следовательно, $\alpha(\mathcal{F}_1) \& \alpha(\mathcal{F}_2) \& \& Д(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2) \& \neg \alpha G(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)$.

<u>Теорема 7</u>. Пусть T и $\mathcal{U}$ слова, где (2) и (3), $\mathcal{F}$ функция типа $\mathrm{T}\mathcal{U}$, $\{H_n\}_n$ S_σ -множество, $\overline{\mathcal{H}}(\{H_n\}_n)$, а $x_0 \Delta x_1$ сегмент. Тогда $[\mathcal{F}, \{H_n\}_n]$ и $\mathcal{F}^{[x_0 \Delta x_1]}$ функции типа $\mathrm{T}\mathcal{U}$.

<u>Замечание 5</u>. Ввиду замечания 1 и леммы 1 для функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ и слова $\mathcal{U}$, (4), верно $\alpha\mathcal{U}(\mathcal{F}) \& AC(\mathcal{G}) \supset \alpha\mathcal{U}(\mathcal{F}+\mathcal{G})$.

Пример 3. Существуют возрастающая на $0 \Delta 1$ функция $\mathcal{F}$, $Д(\mathcal{F})$, и функция $\mathcal{G}$ типа ACG_* такие, что $\neg \alpha G_*(\mathcal{F}+\mathcal{G})$.

Исходя от определений, легко докажем следующее утверждение.

<u>Теорема 8</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $Д(\mathcal{F})$, и $\{K_n\}_n$ последовательность сегментов, $\overline{\mathcal{H}}(\{K_n\}_n)$. Тогда существуют рекурсивное множество НЧ B, система последовательностей положительных КДЧ $\{\{v_n^i\}_n\}_{i=0}^3$ и последовательность S_σ -множеств $\{\{Q_k^n\}_k\}_n$ такие, что ряды $\sum_n v_n^i$ ($1 \le i \le 3$) сходятся и для всякого НЧ n - $\forall k (Q_k^n \subseteq K_n)$, v_n^0 мера $\{Q_k^n\}_k$, $[\mathcal{F}, \{Q_k^n\}_k]^{[K_n]}$ абсолютно непрерывная функция, ряд $\sum_k \langle \omega, \mathcal{F} \rangle \llcorner Q_k^n \lrcorner$ сходится к КДЧ меньшему чем $\langle \omega, \mathcal{F} \rangle \llcorner K_n \lrcorner + v_n^1$ и $V[([\mathcal{F}, \{Q_k^n\}_k] - - [\mathcal{F}, \{K_n\}_n])^{[K_n]}] \llcorner K_n \lrcorner \le v_n^1 \& (n \in B \supset |K_n| \le v_n^2) \&$

$\&(\neg(m\in B)\supset v_m^0 \leq v_m^2 \;\&\; \langle\omega, \mathcal{F}-[\mathcal{F},\{K_m\}_m]\rangle_{\llcorner} K_{m\lrcorner} \leq v_m^3)$.

На основании этой теоремы мы получаем следующие утверждения.

<u>Теорема 9</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $Д(\mathcal{F}), \{\{K_n^m\}_n\}_m$ последовательность последовательностей сегментов, а T и U слова, для которых верно (2),(3) и $\mathsf{TU}(\mathcal{F},\{\{K_n^m\}_n\}_m)$. Тогда $\mathsf{TU}(\mathcal{F})$.

<u>Теорема 10</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $Д(\mathcal{F})$, а $\{K_n\}_n$ последовательность сегментов такая, что $\overline{\mathcal{H}}(\{K_n\}_n) \;\&\; \forall x(|\mathcal{F}(x)|>0 \supset \exists n\,(x\in(K_n)^\circ))$ и ряд $\sum_n \langle\omega,\mathcal{F}\rangle_{\llcorner} K_{n\lrcorner}$ сходится. Пусть T и U слова, где (2) и (3). Тогда $\mathsf{TU}(\mathcal{F})$ в том и только том случае, если $\forall n\, \mathsf{TU}(\mathcal{F}^{[K_n]})$.

<u>Теорема 11</u>. Пусть T и U слова, (2) и (3), $\mathcal{F}$ функция типа TU, $Д(\mathcal{F})$, а $\{K_n\}_n$ последовательность сегментов, $\overline{\mathcal{H}}(\{K_n\}_n)$. Тогда $\mathsf{TU}([\mathcal{F},\{K_n\}_n])$.

<u>Теорема 12</u>. Пусть $\{H_n\}_n$ S_σ -множество, $\overline{\mathcal{H}}(\{H_n\}_n)$, T слово, (2), а $\{\mathcal{F}_n\}_n$ последовательность равномерно непрерывных функций такая, что $\forall n x(|\mathcal{F}_n(x)|>0 \supset x\in(H_n)^\circ) \;\&$ $(\langle\omega,\mathcal{F}_n\rangle_{\llcorner} H_{n\lrcorner} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0)$. Тогда существует равномерно непрерывная функция $\mathcal{F}$, для которой выполнено $\mathcal{F} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ и

1) $(\forall n\, Д^{ap}(\mathcal{F}_n) \equiv Д^{ap}(\mathcal{F})) \;\&\; (\forall n \mathsf{T}G(\mathcal{F}_n) \equiv \mathsf{T}G(\mathcal{F}))$,

2) если ряд $\sum_n \langle\omega,\mathcal{F}_n\rangle_{\llcorner} H_{n\lrcorner}$ псевдосходится, то $\forall n\, \mathsf{T}G_0(\mathcal{F}_n) \equiv \mathsf{T}G_0(\mathcal{F})$.

Пример 4. Существуют функция $\mathcal{F}$ и последовательность сегментов $\{H_n\}_n$, $\mathcal{H}(\{H_n\}_n)$, такие, что

а) $BVS(1, \mathcal{F}, 0\Delta 1)$ & $ACG_0(\mathcal{F})$ и, следовательно, $Д^{ap}(\mathcal{F})$ & $a_{кл}(\mathcal{F})$ и (1),

б) $\mathcal{F}$ не обладает свойством $(N)^*$, $\neg Д(\mathcal{F})$, $[\mathcal{F}, \{H_n\}_n]$ возрастающая на $0\Delta 1$ функция и $\neg Д^{ap}([\mathcal{F}, \{H_n\}_n])$.

В связи с этим примером интересно заметить, что верно следующее утверждение.

<u>Теорема 13</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда верно $Д(\mathcal{F})$ в том и только том случае, если для всякой последовательности рациональных сегментов $\{H_n\}_n$, $\mathcal{H}(\{H_n\}_n)$, выполнено $Д^{ap}([\mathcal{F}, \{H_n\}_n])$ (соотв. существует $\{G_n\}_n \in S$ такое, что для почти всех КДЧ x из $0\Delta 1$ имеет место $\exists y(P(y, \{G_n\}_n, x)$ & $D_{кл}(y, [\mathcal{F}, \{H_n\}_n], x)))$.

На основании теорем 3 и 9, замечания 1, теоремы 2 из [5], теорем 1, 2 и 4 из [14] и теоремы 11 из [11] мы получаем следующее утверждение.

<u>Теорема 14</u>. Пусть T и $\mathcal{U}$ слова, где (2) и (4), $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, а φ возрастающая на $0\Delta 1$ абсолютно непрерывная функция, $\varphi(0)=0$ & $\varphi(1)=1$. Тогда

1) $(Д(\mathcal{F}*\varphi)\supset Д(\mathcal{F}))$ & $(Д^{ap}(\mathcal{F}*\varphi)\supset Д^{ap}(\mathcal{F}))$ & $(\alpha\mathcal{U}(\mathcal{F}*\varphi)\supset \alpha\mathcal{U}(\mathcal{F}))$ & $(W\alpha\mathcal{U}(\mathcal{F}*\varphi)\supset W\alpha\mathcal{U}(\mathcal{F}))$ & $(AC(\mathcal{F})\supset$
$\supset AC(\mathcal{F}*\varphi))$ & $(AC(\varphi^{-1})\equiv \forall\xi(\xi\in 0\Delta 1$ & $\xi\in\Pi_2\supset$
$\supset \sigma_\varphi(\xi)\in\Pi_2))$;

2) если $T\mathcal{U}(\mathcal{F})$, то $((Д(\mathcal{F}*\varphi)\vee AC(\varphi^{-1}))\supset T\mathcal{U}(\mathcal{F}*\varphi))$.

<u>Теорема 15</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $Д(\mathcal{F})$. Тогда

1) а) если

(5) $$\neg\exists\xi(\underline{D}_{\kappa\lambda}(-\infty,\mathcal{F},\xi)\,\&\,\overline{D}_{\kappa\lambda}(+\infty,\mathcal{F},\xi)),$$

то верно $\alpha G_0(\mathcal{F})$;

б) если (5) и $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^*$, то $\alpha G_*(\mathcal{F})$;

2) если

(6) $$\neg\exists\xi(\underline{D}_{\kappa\lambda}(-\infty,\mathcal{F},\xi)\vee\overline{D}_{\kappa\lambda}(+\infty,\mathcal{F},\xi)),$$

то верно $ACG_*(\mathcal{F})$.

<u>Теорема 16</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $Д^{ap}(\mathcal{F})$. Тогда

1) если (5), то $\alpha \dot{G}(\mathcal{F})$;

2) если (6), то $AC\dot{G}(\mathcal{F})$.

<u>Замечание 6</u>. Если для функции $\mathcal{F}$ верно (6), то согласно лемме 2 из [12] выполнено (1). Следовательно, ввиду замечания 2 и теоремы 5 - части 2) теорем 15 и 16 являются следствиями частей 1) этих теорем.

Пример 5. Существуют равномерно непрерывная функция $\mathcal{F}$, измеримая функция (см. [2], стр. 274 - $\mathcal{N}_1$) f и покрытие Φ такие, что для всякого НЧ n функция $f^{[\Phi_n]}$ равномерно непрерывна, выполнено $\forall x\, D(f(x),\mathcal{F},x)\,\&\,\forall\xi\, D_{\kappa\lambda}(\mathcal{F},\xi)$ и вместе с тем $\neg Д^{ap}(\mathcal{F})$ и, следовательно, $\neg W\alpha G(\mathcal{F})$.

Пример 6. Существуют функция $\mathcal{F}$, возрастающая на $0\Delta 1$ функция φ и последовательность квазичисел (см. [11]) $\{\eta_k\}_k$ такие, что

$$AC\dot{G}(\mathcal{F})\,\&\,Д(\mathcal{F})\,\&\,AC(\varphi)\,\&\,\varphi(0)=0\,\&\,\varphi(1)=1\,\&$$

$Д^{ap}(\mathcal{F}*\varphi) \& \forall k(2^{-k} < \eta_k < 2^{-k+1}) \& \neg\exists\xi(\neg\exists k(\xi = \eta_k) \&$
$(\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}*\varphi, \xi) \vee \overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}*\varphi, \xi)))$

и вместе с тем $\neg W\alpha G(\mathcal{F}*\varphi)$.

Лемма 6. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, а $\{H_n\}_n$ последовательность сегментов такие, что $\mathcal{R}(\{H_n\}_n) \& \alpha([\mathcal{F},\{H_n\}_n])$ и ряд $\sum_m \langle\omega, \mathcal{F}-[\mathcal{F},\{H_n\}_n]\rangle_\llcorner H_{m\lrcorner}$ сходится. Тогда существует неубывающая абсолютно непрерывная функция $\mathcal{G}$ такая, что $\forall\xi x y(\neg\exists m(\xi \in (H_m)^\circ) \&$
$\& 0 \leq x \leq \xi \leq y \leq 1 \& x < y \supset |\Delta(\mathcal{F}, x\Delta y)| \leq$
$\Delta(V\langle[\mathcal{F},\{H_n\}_n], 0\rangle + \mathcal{G}, x\Delta y)) \& \mathcal{G}(0) = 0$.

Доказательство. Пусть m НЧ. Если $\neg(H_m \subseteq 0\Delta 1)$, то мы определим $\varphi_m \rightleftharpoons h_0$. Если $H_m \subseteq 0\Delta 1$, то мы, исходя от сегмента H_m, НЧ m и функции $(\mathcal{F}-[\mathcal{F},\{H_n\}_n])^{[H_m]}$, построим согласно лемме 5 абсолютно непрерывную функцию φ_m. Тогда $\forall m(V[\varphi_m]_\llcorner H_{m\lrcorner} \leq 2\cdot\langle\omega, \mathcal{F}-[\mathcal{F},\{H_n\}_n]\rangle_\llcorner H_{m\lrcorner} + 2^{-m+1})$ и, следовательно, существует абсолютно непрерывная функция φ такая, что $\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m$. Для завершения доказательства достаточно определить $\mathcal{G} \rightleftharpoons V\langle\varphi, 0\rangle$ (см. теорему 2 из [14]).

Теорема 17. Пусть $\mathcal{F}$ функция типа αG_*. Тогда существует возрастающая на $0\Delta 1$ функция ψ такая, что

(7) $\alpha(\psi) \& \psi(0) = 0 \& \psi(1) = 1 \& AC(\psi^{-1})$ и

(8) $\neg\exists\xi(\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}*\psi^{-1}, \xi) \vee \overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}*\psi^{-1}, \xi))$.

Доказательство. Пусть $\{\{H_n^m\}_n\}_m$ последовательность последовательностей сегментов такая, что

$\alpha G_{*}(\mathcal{F},\{\{H_n^m\}_n\}_m)$.

Пусть m НЧ. Мы для функции $\mathcal{F}$ и последовательности $\{H_n^m\}_n$ построим согласно лемме 6 функцию $\mathcal{G}_m$, обладающую свойствами, описанными в названной лемме, и определим $\psi_m \rightleftharpoons (V\langle[\mathcal{F},\{H_n^m\}_n], 0\rangle + \mathcal{G}_m + h_1)$. Тогда ψ_m возрастающая на $0 \Delta 1$ функция и согласно теоремам 1 и 2 из [14] и замечанию 1 верно $\alpha(\psi_m)$.

Мы определим $\psi \rightleftharpoons \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m \cdot \Delta(\psi_m, 0\Delta 1)} \cdot \psi_m$. Тогда ψ возрастающая на $0\Delta 1$ функция и ввиду следствия 2 теоремы 4 из [14], теоремы 2 из [14] и замечания 1 верно (7), ибо ψ^{-1} удовлетворяет условию Липшица. На основании свойств последовательностей $\{\psi_m\}_m$ и $\{\{H_n^m\}_n\}_m$ видно, что верно (8).

Мы заметим, что если $ACG_{*}(\mathcal{F},\{\{H_n^m\}_n\}_m)$, то ввиду теоремы 2 из [14] верно $AC(\psi)$.

На основании этого доказательства и теорем 14 и 15 мы получаем следующее утверждение.

<u>Теорема 18</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда выполнено $ACG_{*}(\mathcal{F})$ в том и только том случае, если $Д(\mathcal{F})$ и существует возрастающая на $0\Delta 1$ функция ψ такая, что (7), $AC(\psi)$ и (8).

<u>Теорема 19</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $Д(\mathcal{F})$, а ψ возрастающая на $0\Delta 1$ функция такая, что (7) и $\neg\exists\xi(\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}*\psi^{-1}, \xi)\ \&\ \overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}*\psi^{-1}, \xi))$. Тогда

а) выполнено $W\alpha G_0(\mathcal{F})$, б) если Д$(\mathcal{F} * \psi^{-1})$ и $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^*$, то согласно теореме 15 верно $\propto G_*(\mathcal{F} * \psi^{-1})$ и, следовательно, по теореме 14 $\propto G_*(\mathcal{F})$.

Пример 7. Существуют равномерно непрерывные функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ и возрастающая на $0 \Delta 1$ функция ψ такие, что Д$(\mathcal{F})$ & Д$(\mathcal{G})$, (7), $\mathcal{F} * \psi^{-1}$ удовлетворяет условию Липшица, $\neg \exists \xi \underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{G}, \xi)$ и вместе с тем $\neg \propto G(\mathcal{F})$ & & $\neg \propto G_*(\mathcal{G})$.

Литература

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[3] ДЕМУТ О.: Об интегрируемости производных от конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 11(1970), 667-691.

[4] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 11(1970), 705-726.

[5] ДЕМУТ О.: О суперпозициях абсолютно непрерывных конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 423-451.

[6] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 687-711.

[7] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 587-610.

[8] ДЕМУТ О. и НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивном аналоге

свойства (T_1), Comment. Math. Univ. Carolinae 14(1973), 421-439.

[9] ДЕМУТ О. и НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивных аналогах свойств (N) и (S), Comment. Math. Univ. Carolinae 14(1973), 565-582.

[10] ДЕМУТ О.: О связи представимости конструктивной функции в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций и дифференцируемости этой функции, Comment. Math. Univ. Carolinae 15(1974), 195-210.

[11] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

[12] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 583-599.

[13] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы Данжуа-Янга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 111-126.

[14] ДЕМУТ О.: Об одном обобщении конструктивного интеграла Лебега, Comment. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 499-514.

Matematicko-fyzikální fakulta

Universita Karlova

Malostranské nám. 25, Praha 1

Československo

(Oblatum 2.5. 1978)