Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Bohumír Opic

Über äquivalente Normen in Sobolevschen Räumen mit Belegungsfunktion

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 19 (1978), No. 2, 227--248

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105849

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

19,2 (1978)

ÜBER ÄQUIVALENTE NORMEN IN SOBOLEVSCHEN RÄUMEN MIT BELEGUNGSFUNKTION

Bohumír OPIC , Praha

Inhalt: Die Sobolevschen Räume mit Belegungsfunktion $W^k_{p,\varphi}(\Omega)$ dienen als Hilfsmittel bei der Lösung elliptischer Differentialgleichungen. Die Anregung zum Studium dieser Räume gaben Probleme, die bei der Lösung ausgearteter und singulärer elliptischer Differentialgleichungen entstanden.

In der vorliegenden Arbeit werden wir uns mit der Äquivalenz von Normen in den Sobolevschen Räumen mit Belegungsfunktion $\overset{\circ}{W}{}^k_{p,\varphi}(\Omega)$ befassen; die Ergebnisse dieses Artikels wurden in der Arbeit [5] benutzt.

AMS: 46E35

Schlüsselwörter: Sobolevsche Räume, Belegungsfunktion, äquivalente Normen.

1. Grundbegriffe und Definitionen. Es sei R_N $(N \geq 2)$ der N-dimensionale Euklidsche Raum und es seien $x = [x_1, \dots, x_N]$ Punkte aus R_N (kurz $x = [x', x_N]$). Weiter bezeichnen wir mit Ω ein Gebiet in R_N und mit $\partial\Omega$ dessen Rand.

1.1. Definition. Es sei φ eine Funktion, die fast überall auf Ω definiert is (im Sinne des Lebesgueschen Masses).

Die Funktion φ nennen wir Gewichtsfunktion, wenn φ eine messbare nichtnegative Funktion ist. Mit V bezeichnen wir die Menge aller Gewichtsfunktionen.

1.2. <u>Definition</u>. $\mathcal{D}(\Omega)$ ist die Menge aller komplexwertigen unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die einen kompakten Träger in Ω haben.

1.3. <u>Definition</u>. Es sei $\varphi \in V$, $p \geq 1$. Weiter sei $L_{p,\varphi}(\Omega)$ die Menge der komplexwertigen fast überall auf Ω definierten Funktionen u mit endlicher Norm

$$\|u\|_{L_{p,\varphi}} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \varphi(x)dx\right)^{1/p} \tag{1.1}$$

Für $\varphi \equiv 1$ schreiben wir $L_p(\Omega)$ anstatt $L_{p,\varphi}(\Omega)$. Mit $L_{1,loc}(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge solcher komplexwertigen Funktionen u, dass $u \in L_1(M)$ für jede kompakte Menge $M \subset \Omega$ gilt.

Einen Vektor $i = (i_1, \ldots, i_N)$ mit ganzzahligen nichtnegativen Komponenten i_j nennen wir Multiindex und setzen $|i| = \sum_{j=1}^{N} i_j$. Weiter bezeichnen wir mid D^i die Ableitung

$$\frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_N^{i_N}} .$$

Es sei $\varphi \in V$, $\varphi^{-1} \in L_{1,loc}(\Omega)$ ($\varphi^{-1}(x)$ bezeichnet hier die Funktion $\frac{1}{\varphi(x)}$). Dann gilt

$$L_{p,\varphi}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \tag{1.2}$$

wo $\mathcal{D}'(\Omega)$ der Raum der Distributionen ist; eine Funktion $u \in L_{p,\varphi}(\Omega)$ hat deshalb eine Ableitung im Sinne der Distributionen.

1.4. <u>Definition</u>. Es sei $\varphi \in V$, $\varphi^{-1} \in L_{1,loc}(\Omega)$, $p \geq 1$, k eine natürliche Zahl. Weiter definieren wir den

Raum $W^k_{p,\varphi}(\Omega)$:

(1.3) $W^k_{p,\varphi}(\Omega) = \{u \in L_{p,\varphi}(\Omega);\ D^i u \in L_{p,\varphi}(\Omega),\ |i| \leq k\}$.

Im Raum $W^k_{p,\varphi}(\Omega)$ führen wir durch

$$\|u\|_{W^k_{p,\varphi}} = \Big(\sum_{|i| \leq k} \|D^i u\|^p_{L_{p,\varphi}}\Big)^{1/p} \tag{1.4}$$

eine Norm ein.

Ist $\varphi \equiv 1$, schreiben wir $W^k_p(\Omega)$ statt $W^k_{p,\varphi}(\Omega)$.

1.5. <u>Bemerkung</u>. Sind $\varphi \in V$, $\varphi^{-1} \in L_{1,loc}(\Omega)$, $\varphi \in L_{1,loc}(\Omega)$, dann kann man beweisen, dass

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset W^k_{p,\varphi}(\Omega) \tag{1.5}$$

gilt und dass $W^k_{p,\varphi}(\Omega)$ ein Banachraum ist.

1.6. <u>Definition</u>. Es sei $\varphi \in V, \varphi, \varphi^{-1} \in L_{1,loc}(\Omega)$. Dann bezeichnen wir mit $\overset{\circ}{W}{}^k_{p,\varphi}(\Omega)$ die Abschliessung der Menge $\mathcal{D}(\Omega)$ bezüglich der Norm (1.4).

Für $u \in \overset{\circ}{W}{}^k_{p,\varphi}(\Omega)$ definieren wir eine Halbnorm mit

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^k_{p,\varphi}} = \Big(\sum_{|i| = k} \|D^i u\|^p_{L_{p,\varphi}}\Big)^{1/p}. \tag{1.6}$$

1.7. <u>Bezeichnung</u>. Es sei $Q \subset \partial\Omega$ und $r(x)$ die Entfernung des Punktes $x \in \Omega$ von der Menge Q. Es sei $b = \sup_{x \in \Omega} r(x)$.

Wir werden uns mit Gewichtsfunktionen φ vom Typ

(1.7) $\varphi = \sigma \circ r$, d.h. $\varphi(x) = \sigma(r(x))$ fast überall auf Ω

befassen; dabei werden wir uns auf solche Funktionen σ beschränken, die gewisse von den folgenden Bedingungen erfüllen:

A.1. $\sigma = \sigma(t)$ ist eine für fast alle $t \in (0,b)$ definierte nichtnegative Funktionen.

A.2. Die Funktion hat eine stetige Ableitung σ' auf $(0,b)$.

A.3. Für jedes Intervall $[a_1,b_1] \subset (0,b)$ existiert eine Zahl $c > 0$, so dass

$\frac{1}{c} \leq \sigma(t) \leq c$ für fast alle $t \in [a_1,b_1]$.

A.4. Sind c_1, c_2 solche Konstanten, dass

$c_1 \leq \frac{s}{t} \leq c_2$ gilt, dann existieren Konstanten

$C_1 > 0$, $C_2 > 0$, so dass die Ungleichung

$$C_1 \leq \frac{\sigma(s)}{\sigma(t)} \leq C_2$$

für alle diese s und t gilt.

A.5. Es sei $p > 1$, $S(t) = \sigma^{\frac{1}{1-p}}(t)$ für fast alle $t \in (0,b)$ und es sei

$$\int_0^t S(\tau)\, d\tau < \infty \quad \text{für fast alle } t \in (0,b).$$

Dann definieren wir die Funktion S^* mit

$$S^*(t) = \int_0^t S(\tau)\, d\tau$$

und bezeichnen

(1.8) $\quad \varkappa(t) = \varkappa_\sigma(t) = S(t)[S^*(t)]^{-p}$ für $t \in (0,b)$.

Es sei k eine natürliche Zahl, $p > 1$. Wenn σ aus (1.7) die Bedingung A.5 erfüllt, so der Operator $\mathcal{F}$ durch die

Formel (1.8) definiert ist:

$$\mathfrak{F}(\sigma) = \varkappa_\sigma \quad (= \varkappa).$$

Wir setzen $\mathfrak{F}^0(\sigma) = \sigma$ und

(1.9) $\qquad \mathfrak{F}^\ell(\sigma) = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{\ell-1}(\sigma)), \quad \ell = 0,1,\dots,k$

für alle Funktionen σ, für die die rechte Seite in (1.9) sinnvoll ist und wir geben weitere Bedingungen bezüglich der Funktion σ an:

A.5.k. Die Funktionen $\mathfrak{F}^\ell(\sigma)$ existieren und erfüllen die Bedingung A.4 für $l = 0,1,\dots,k$.

A.6. Die Funktion σ erfüllt mindestens eine von der folgenden zwei Bedingungen:

A.6.1. Es existiert eine Zahl $c_1 > 0$, so dass $|\sigma^{1-p}(t)\ (\sigma'(t))^p| \leq c_1\ \varkappa(t)$ für $t \in (0,b)$ gilt.

A.6.2. Es existiert eine Zahl $c_2 > 0$, so dass $\sigma(t) \leq c_2\ \varkappa(t)$ für $t \in (0,b)$ gilt.

($\varkappa$ ist die Funktion aus (1.8))

Erfüllt die Funktion σ die Bedingung A.i, dann werden wir

(1.10) $\qquad \sigma \in \text{A.i}$

schreiben.

Weiter werden wir den folgenden Hilfssatz (siehe [3]) ausnutzen.

1.9. <u>Hilfssatz</u>. Es sei $p > 1$, $\sigma \in \text{A.1} \cap \text{A.5}$. Es sei weiter $f = f(t)$ eine auf dem Intervall $(0,b)$ differenzierbare Funktion , für die

$$(1.11) \qquad \int_0^b \left|\frac{df}{dt}\right|^p \sigma(t)dt < +\infty$$

gilt.

Weiter sei

$$(1.12) \qquad \lim_{t\to 0_+} f(t) = 0.$$

Dann gilt die verallgemeinerte Hardysche Ungleichung

$$(1.13) \quad \int_0^b |f(t)|^p \varkappa(t)dt \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^b \left|\frac{df}{dt}\right|^p \sigma(t)dt$$

mit $\varkappa$ aus (1.8).

Zum Schluss des Abschnittes werden wir noch eine Klasse von Gebieten beschreiben.

1.10. Definition. Wir werden sagen, dass $\Omega \subset E_N$ vom Typ $\mathfrak{N}^{0,1}$ ist (und wir werden $\Omega \in \mathfrak{N}^{0,1}$ schreiben), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Ω ist ein beschränktes Gebiet
2) Es existieren m Koordinatensysteme

$[x_{r1},x_{r2},\dots,x_{r,N-1},x_{rN}]$ (kurz $[x_r',x_{rN}]$)

$(r = 1,2,\dots,m)$ und m Funktionen $a_r = a_r(x_r')$ $(r = 1,2,\dots$
$\dots,m)$,

die auf $(n-1)$-dimensionalen Kuben

$\Delta_r = \{x_r' = [x_{r1},\dots,x_{r,N-1}]\ ;\ |x_{ri}| < \delta\ ,\ i = 1,2,\dots,N-1\}$

($\delta > 0$) definiert sind und die ermöglichen, jeden Punkt $x \in \partial\Omega$ in der Form

$$x = [x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{r,N-1}, a_r(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{r,N-1})]$$

(kurz $x = [x_r', a_r(x_r')]$) zu schreiben .

3) Es existiert eine positive Zahl β $(0 < \beta < 1)$ so, dass die Menge

$$B_r = \{ x = [x_r', x_{rN}] \; ; \; x_r' \in \Delta_r, \; a_r(x_r') - \beta < x_{rN} < a_r(x_r') \}$$

im Inneren des Gebietes Ω liegt und die Menge

$$D_r = \{ x = [x_r', x_{rN}] \; ; \; x_r' \in \Delta_r, \; a_r(x_r') < x_{rN} < a_r(x_r') + \beta \}$$

ausserhalb $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ liegt.

4) Die Funktionen a_r $(r = 1,2,\dots,m)$ aus der Bedingung 2) erfüllen die Lipschitzsche Bedingung in den Kuben Δ_r, d.h.: es existiert eine positive Konstante c so, dass die Ungleichung

$$| a_r(x_r') - a_r(y_r') | \leq c \, | x_r' - y_r' |$$

für beliebige zwei Punkte $x_r', y_r' \in \Delta_r$ gilt.

Für $\Omega \in \mathfrak{N}^{0,1}$ sei $\mathcal{U}_{m+1} \in \mathfrak{N}^{0,1}$ eine solche Menge, dass es

$$\overline{\mathcal{U}}_{m+1} \subset \Omega \; , \quad \bigcup_{r=1}^{m} B_r \cup \mathcal{U}_{m+1} = \Omega \tag{1.14}$$

gilt (mit $\overline{\mathcal{U}}_{m+1}$ bezeichnen wir die Abschliessung der Menge $\mathcal{U}_{m+1}$).

2. Die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{W^k_{p,\varphi}}$ und $\|\cdot\|_{\mathring{W}^k_{p,\varphi}}$ im Raum $\mathring{W}^k_{p,\varphi}$

In diesem Absatz werden wir uns meistens mit Sobolevschen Räumen mit Belegungsfunktion befassen, wo die Belegungsfunktion φ vom Typ $\varphi = \sigma \circ r$ ist.

Ist $\sigma \in A.3$, so ist $\varphi, \varphi^{-1} \in L_{1,loc}(\Omega)$ und es ist sinnvoll die Räume $W^k_{p,\varphi}(\Omega)$, $\mathring{W}^k_{p,\varphi}(\Omega)$ zu definieren. Wir werden untersuchen, wann die folgende Behauptung gilt:

T_k: $\exists C>0 \ \forall u \in \mathring{W}^k_{p,\varphi}(\Omega) \Longrightarrow \|u\|_{W^k_{p,\varphi}} \leq C \|u\|_{\mathring{W}^k_{p,\varphi}}$.

Falls diese Behauptung gilt, ist die Funktion $\|\cdot\|_{\mathring{W}^k_{p,\varphi}}$ offensichtlich eine mit $\|\cdot\|_{W^k_{p,\varphi}}$ äquivalente Norm im $\mathring{W}^k_{p,\varphi}(\Omega)$.

Wir werden noch diese Bezeichnung benützen:
Ist $\Omega \in \mathfrak{N}^{0,1}$, $Q = \partial\Omega$, schreiben wir $(\Omega, Q) \in A$.

Zuerst werden wir uns mit dem Beweis der Behauptung T_1 befassen.

2.1. Satz. Es sei $(\Omega, Q) \in A$, $p>1$, $\sigma \in A.1 \cap A.3 \cap A.4 \cap A.5$. Dann gilt

$$\mathring{W}^1_{p,\sigma\circ r}(\Omega) \subset L_{p,\varkappa\circ r}(\Omega) \quad (\text{kurz } \mathring{W}^1_{p,\sigma} \subset L_{p,\varkappa})$$

und es existiert eine positive Konstante C so, dass für alle $u \in \mathring{W}^1_{p,\sigma}$ die Ungleichung

$$\|u\|_{L_{p,\varkappa}} \leq C \|u\|_{\mathring{W}^1_{p,\sigma}} \tag{2.1}$$

gilt.

<u>Beweis</u>. Da die Menge $\mathcal{D}(\Omega)$ im Raum $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}$ dicht ist, genügt es anzunehmen, dass $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist. Nach (1.14) ist $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} B_i \cup \mathcal{U}_{m+1}$.

1) Zuerst sei $1 \leq i \leq m$. Wir werden das Integral

$$(2.2) \qquad \mathcal{J}_i = \int_{B_i} |u(x_i', x_{iN})|^p \varkappa(r(x_i', x_{iN}))dx = \\ = \int_{\Delta_i} d_1 x_i' \int_{a_i(x_i')-\beta}^{a_i(x_i')} |u(x_i', x_{iN})|^p \varkappa(r(x_i', x_{iN}))dx_{iN}$$

abschätzen.

Aus der Bedingung 4) der Definition 1.10 folgt die Existenz einer positiven Konstante K so, dass

$$K \leq \frac{r(x)}{a_i(x_i') - x_{iN}} \leq 1$$

ist.

Daraus und aus der Bedingung A.4 folgt die Existenz solcher positiven Zahlen $K_s, \tilde{K}_s$ $(s = 1,2)$, dass

$$(2.3) \quad \tilde{K}_1 \leq \frac{\varkappa(r(x_i', x_{iN}))}{\varkappa(a_i(x_i') - x_{iN})} \leq \tilde{K}_2,$$

$$\tilde{K}_1 \leq \frac{\sigma(r(x_i', x_{iN}))}{\sigma(a_i(x_i') - x_{iN})} \leq K_2$$

ist. Also ist

$$(2.4) \quad \mathcal{J}_i \leq \tilde{K}_2 \int_{\Delta_i} dx_i' \int_{a_i(x_i')-\beta}^{a_i(x_i')} |u(x_i', x_{iN})|^p \varkappa(a_i(x_i') - \\ - x_{iN})dx_{iN} =$$

$$= \tilde{K}_2 \int_{\Delta_i} dx_i' \int_0^{\beta} | u(x_i', a_i(x_i') - t) |^p \varkappa(t)dt$$

Für fixen $x_i \in \Delta_i$ verschwindet die Funktion $u(x_i', x_{iN})$ in der Nähe des Punktes $x_{iN} = a_i(x_i')$ (denn $u \in \mathcal{D}(\Omega)$), also ist $u(x_i', a_i(x_i') - t) = 0$ für genügend kleine positive Werte von t. Bezeichnen wir mit I_i das innere Integral in (2.4). Nach der Hardyschen Ungleichung (1.13) und nach (2.3) ist

$$I_i = \int_0^{\beta} | u(x_i', a_i(x_i') - t) |^p \varkappa(t)dt \leq$$

$$\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\beta} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(x_i', a_i(x_i') - t)\right|^p \sigma(t)dt \leq$$

$$\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{a_i(x_i')-\beta}^{a_i(x_i')} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(x_i', x_{iN})\right|^p \sigma(a_i(x_i') - x_{iN})dx_{iN} \leq$$

$$\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p K_1^{-1} \int_{a_i(x_i')-\beta}^{a_i(x_i')} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(x_i', x_{iN})\right|^p \sigma(r(x_i', x_{iN})dx_{iN}.$$

Daraus folgt

$$\mathcal{J}_i \leq \frac{\tilde{K}_2}{K_1}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{B_i} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(x_i', x_{iN})\right|^p \sigma(r(x_i', x_{iN}))dx.$$

Also ist

$$(2.5) \quad \| u \|_{L_{p,\varkappa}(B_i)} \leq C_1 \| u \|_{W^1_{p,\sigma}(B_i)} \leq C_1 \leq \| u \|_{W^1_{p,\sigma}(\Omega)}\ .^{x)}$$

---

x) Mit C, C_i, K, K_i, C_i, K_i (i = 1,2,...) bezeichnen wir im weiteren positive Konstanten, die von den Funktionen aus den untersuchten Räumen unabhängig sind.

2) Es sei nun $i = m + 1$. Die Punkte der Menge U_{m+1} haben eine positive Entfernung von der Menge Q, Ω ist beschränkt und darum gilt:

$$(2.6) \quad \exists\, C_2, C_3 > 0 \; (\forall x \in U_{m+1} \Longrightarrow 0 < C_2 \leq r(x) \leq C_3)$$

Wir führen im Raum $W_p^1(U_{m+1})$ neben der gewöhnlichen Norm

$$\|u\|_I = \|u\|_{W_p^1(U_{m+1})} \quad \text{noch die Norm}$$

$$\|u\|_{II} = \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(U_{m+1})} + \sum_{i=1}^{m} \|u\|_{L_p(U_{m+1} \cap B_i)}$$

ein. Die Normen $\|\cdot\|_I$ und $\|\cdot\|_{II}$ sind äquivalent (siehe [1]. Also ist

$$(2.7) \quad \|u\|_{W_p^1(U_{m+1})} \leq C_4 \left[\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(U_{m+1})} + \sum_{i=1}^{m} \|u\|_{L_p(U_{m+1} \cap B_i)} \right].$$

Aus (2.6) und aus der Bedingung A.4 folgt

$$\|u\|_{L_p(U_{m+1} \cap B_i)} \leq C_5 \|u\|_{L_{p,\varkappa}(U_{m+1} \cap B_i)},$$

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(U_{m+1})} \leq C_6 \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_{p,\sigma}^1(U_{m+1})}.$$

Daraus und aus (2.7) bekommen wir

$$(2.8) \quad \|u\|_{W_p^1(U_{m+1})} \leq C_7 \left[\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_{p,\sigma}^1(U_{m+1})} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{m} \|u\|_{L_{p,\varkappa}(U_{m+1} \cap B_i)} \right]$$

Da $U_{m+1} \cap B_i \subset B_i$ ist, ist nach (2.5)

$$(2.9) \quad \|u\|_{L_{p,\varkappa}(U_{m+1} \cap B_i)} \leq C_1 \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_{p,\sigma}^1(\Omega)}.$$

Aus (2.8) und (2.9) folgt

$$(2.10)\quad \| u \|_{W_p^1(U_{m+1})} \leq c_8 \, [\, \| u \|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(U_{m+1})} + \| u \|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)}] \leq c_9 \| u \|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)} .$$

Weiter bekommen wir aus (2.6) und aus der Bedingung A.4

$$\| u \|_{L_{p,\varkappa}(U_{m+1})} \leq c_{10} \| u \|_{L_p(U_{m+1})} \leq c_{10} \| u \|_{W_p^1(U_{m+1})} .$$

Daraus und aus (2.10) folgt

$$(2.11)\quad \| u \|_{L_{p,\varkappa}(U_{m+1})} \leq c_{11} \| u \|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)} .$$

Aus (2.5) und (2.11) folgt endlich die Behauptung des Satzes.

2.2. Satz. Es sei $(\Omega, Q) \in A$, $p > 1$, $\sigma \in A.1 \cap A.3 \cap A.4 \cap A.5 \cap A.6.2$. Dann gilt die Behauptung T_1 (mit $\varphi = \sigma \circ r$).

Der Beweis folgt sofort aus dem Satz 2.1 und aus der Bedingung A.6.2.

2.3. Satz. Es sei $(\Omega, Q) \in A$, $p > 1$, $\sigma \in \bigcap_{i=1}^{5} A.i \cap A.6.1$.
Dann gilt die Behauptung T_1 (mit $\varphi = \sigma \circ r$).

Beweis: Nach Satz 2.1 (siehe [4]) existiert eine auf $\bar{\Omega}$ stetige Funktion r_1, die auf Ω unendlich oft differensierbar ist, mit den folgenden Eigenschaften:

$$(2.12)\quad c_1 r(x) \leq r_1(x) \leq c_2 r(x),$$

$$(2.13) \qquad |D^i r_1(x)| \leq c_0$$

für $x \in \Omega$ und $|i| = 1$.

Es sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Es existiert eine Zahl $a > 0$ so, dass $\bar{\Omega} \subset G$ ist mit

$$G = \{x \in E_N;\ |x_i| < a,\ i = 1,2,\dots,N\}$$

Definieren wir die Funktion

$$(2.14) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} u(x)\,[\sigma(r_1(x))]^{1/p} & \text{für } x \in \Omega\,, \\ 0 & \text{für } x \in E_N - \Omega \end{cases}$$

und ist $x = [x_1,\dots,x_N]$ ein Punkt des Gebietes G, dann ist laut (2.14)

$$\varphi(x_1,\dots,x_N) = \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\xi, x_2,\dots,x_N)\,d\xi\,.$$

Hiervon haben wir mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

$$|\varphi(x_1,\dots,x_N)|^p \leq (2a)^{p/q} \int_{-a}^{a} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\xi, x_2,\dots,x_N)\right|^p d\xi$$

Wenn wir diese Ungleichung über G integrieren, bekommen wir nach (2.14)

$$(2.15) \qquad \int_\Omega |\varphi(x)|^p\,dx \leq (2a)^p \int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\right|^p dx.$$

Aus (2.13), (2.14) und aus der Bedingung A.6.1 folgt für x

$$(2.16) \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\right|^p \leq 2^{p-1}\left[\,\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right|^p \sigma(r_1(x)) + \right.$$

$$+\left(\frac{c_0}{p}\right)^p \cdot c_1 \; |u(x)|^p \varkappa(r(x))\Big].$$

Daraus folgt mit Hilfe (2.12), der Bedingung A.4 und des Satzes 2.1 und (2.15) die Behauptung des Satzes für $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Da die Menge $\mathcal{D}(\Omega)$ im Raum $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$ dicht ist, gilt der Satz auch für $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$.

2.4. <u>Satz</u>. Es sei $p \geq 1$, $\Omega \subset E_N$ und es existiere eine natürliche Zahl l, $1 \leq j \leq N$ so, dass

$$D = \sup_{x,y \in \Omega} |x_j - y_j| < +\infty$$

gilt. Es sei weiter $\varphi \in V$, $\varphi, \varphi^{-1} \in L_{1,loc}(\Omega)$ und die Gewichtsfunktion φ sei unabhängig von der Variablen x_j. Dann gilt für alle Funktionen $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,\varphi}$

$$\|u\|_{L_{p,\varphi}} \leq D \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L_{p,\varphi}} \tag{2.17}$$

(und also gilt die Behauptung T_1).

<u>Beweis</u>. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $j = 1$ ist. Es sei $p > 1$, es sei $a > D$. x) Offenbar existiert eine Zahl $b \in E_1$, so, dass $\bar{\Omega} \subset G$ ist mit

$$G = \{x \in E_N;\ b < x_1 < b + a,\ -\infty < x_i < +\infty,\ i = 2,\dots,N\}.$$

Analog wie im Beweis des Satzes 2.3 (die Bedeutung der Funktion φ ist gleichartig) bekommen wir

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p \, dx \leq a^p \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right|^p dx. \tag{2.18}$$

---

x) Für p = 1 ist der Beweis des Satzes analog; nur wird die Höldersche Ungleichung nicht verwendet.

Daraus folgt sofort

$$(2.19) \qquad \|u\|_{L_{p,\varphi}} \leq a \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L_{p,\varphi}} .$$

Da $a > D$ ist und sonst beliebig, gilt (2.17).

2.5. Bemerkung. Wenn man die Fouriersche Reihe der Funktion $u = u(x_1,\dots,x_N)$, $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ bezüglich der Variablen x_j (von der φ unabhängig ist) verwendet, kann man zeigen, dass die folgende Ungleichung gilt

$$(2.20) \qquad \|u\|_{L_{p,\varphi}} \leq \frac{D}{\pi} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L_{p,\varphi}} .$$

Der folgende Satz wird aus formalen Gründen für zweidimensionale Gebiete formuliert und bewiesen.

Für Gebiete in E_N werden wir dessen Formulierung beibringen; der Beweis ist analog.

2.6. Satz. Es seien Ω, $\tilde{\Omega}$ zwei offene Mengen in E_2 (die Punkte der Menge Ω bzw. $\tilde{\Omega}$ bezeichnen wir mit $[x,y]$ bzw. $[t,s]$).
Es sei $f = [f_1,f_2]$ eine reguläre eineindeutige Abbildung von $\tilde{\Omega}$ auf Ω, D_f sei die Jacobische Determinante der Abbildung f, d.f.

$$D_f = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial s} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial t}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial s} \end{vmatrix} .$$

Es sei $D = \sup \{ |t_1 - t_2| \; ; \; [t_1,s], [t_2,s] \in \tilde{\Omega} \} < +\infty$,

$P = \{ s \in E_1;\ \exists t \quad E_1 \longrightarrow [t,s] \in \tilde{\Omega} \}$. Weiter seien C, K, K_i $(i = 1,2)$ positive Konstanten, d_f eine messbare Funktion in E_1. Es gelte

$$(2.21) \qquad \left| \frac{\partial f_i}{\partial t}(t,s) \right| \leq K_i \quad (i = 1,2) \ \forall\, [t,s] \in \tilde{\Omega}\ ;$$

$$(2.22) \quad C\, d_f(s) \leq |D_f(t,s)| \leq K\, d_f(s) \qquad \forall\, [t,s] \in \tilde{\Omega}\ ,$$

$$d_f(s) = 0 \quad \forall\, s \notin P.$$

Es sei $\varphi \in V$, $\varphi, \varphi^{-1} \in L_{1,loc}(\Omega)$ und die Gewichtsfunktion φ habe die folgende Eigenschaft:

$$(2.23) \quad \varphi(f_1(t_1,s),\ f_2(t_1,s)) = \varphi(f_1(t_2,s),\ f_2(t_2,s))$$

$$\forall\, [t_1,s],\ [t_2,s] \in \tilde{\Omega}\ .$$

Dann gilt die Behauptung T_1.

<u>Beweis</u>. Für $s \in P$ bezeichnen wir

$$(2.24) \qquad \varkappa(s) = \varphi(f_1(t,s),\ f_2(t,s))$$

(die Korrektheit dieser Definition folgt aus (2.23).

Es sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann gilt

$$(2.25) \quad \int_\Omega |u(x,y)|^p \varphi(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} |u(f_1,f_2)|^p \cdot |D_f| \cdot \varkappa(s)\, dt\, ds. \ ^{x)}$$

Unter Verwendung der Ungleichung (2.22) bekommen wir aus (2.25)

----

x) Statt $u(f_1(t,s),\ f_2(t,s))$ bzw. $D_f(t,s)$ schreiben wir der Einfachheit halber $u(f_1,f_2)$ bzw. D_f.

$$(2.26)\quad \int_{\Omega} |u(x,y)|^p \varrho(x,y)\,dx\,dy \le K \int_{\tilde\Omega} |u(f_1,f_2)|^p d_f(s)\,\varkappa(s)\,dt\,ds.$$

Bezeichnen wir für $[t,s] \in \tilde\Omega$

$$(2.27)\quad U(t,s) = u(f_1(t,s),f_2(t,s))\cdot[d_f(s)]^{1/p}.$$

Dann können wir die Ungleichung (2.26) in der Form

$$(2.28)\quad \int_{\Omega} |u(x,y)|^p \varrho(x,y)\,dx\,dy \le K \int_{\tilde\Omega} |U(f_1,f_2)|^p \varkappa(s)\,dt\,ds$$

schreiben. Nach (2.17) ist

$$(2.29)\quad \int_{\tilde\Omega} |U(f_1,f_2)|^p \varkappa(s)\,dt\,ds \le D^p K \int_{\tilde\Omega} \left|\frac{\partial U}{\partial t}(t,s)\right|^p \varkappa(s)\,dt\,ds.$$

Aus (2.21) und (2.27) folgt

$$(2.30)\quad \left|\frac{\partial U}{\partial t}(t,s)\right|^p \le 2^{p-1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x}(f_1,f_2)\right|^p K_1^p + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(f_1,f_2)\right|^p \cdot K_2^p\right]\cdot d_f(s)$$

für $[t,s] \in \tilde\Omega$. Mit Hilfe der Ungleichung (2.30),(2.28) und der Bedingung (2.22) bekommen wir

$$(2.31)\quad \int_{\Omega} |u(x,y)|^p \varrho(x,y)\,dx\,dy \le 2^{p-1}\ K\ C^{-1}(\max_{i=1,2} K_i^p)\cdot D^p\cdot$$
$$\cdot \int_{\tilde\Omega}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x}(f_1,f_2)\right|^p + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(f_1,f_2)\right|^p\right]\cdot |D_f(t,s)|\cdot$$
$$\cdot\,\varkappa(s)\,dt\,ds.$$

Daraus folgt schon nach Substitutionssatz die Behauptung des Satzes.

2.7. Bemerkung. Falls D_f nach t differenzierbar ist, können wir die Bedingung (2.22) durch die Forderung

$$(2.22') \quad \left(\frac{1}{p} \, | D_f |^{1-\frac{1}{p}} \cdot \left| \frac{\partial D_f}{\partial t} \right| \right)^p \leq C \cdot | D_f | , \quad 0 < C < 1$$

ersetzen. Der Beweis ist analog zu dem Beweis des Satzes 2.6, anstelle der Funktion U(t,s) führen wir die Funktion

$$\tilde{U}(t,s) = u(f_1(t,s), f_2(t,s)) \cdot | D_f(t,s) |^{1/p} \quad , [t,s] \in \tilde{\Omega}$$

ein.

2.8. Bemerkung. Die Bedingung (2.23) können wir abschwächen - wir können sie durch die folgende Forderung ersetzen:

(2.23) Es existieren positive Konstanten C_1, C_2 und eine messbare Funktion $\varkappa(s)$ so, dass gilt:

$$C_1 \varkappa(s) \leq \wp(f_1(t,s), f_2(t,s)) \leq C_2 \varkappa(s) \quad \forall [t,s] \in \tilde{\Omega},$$

$$\varkappa(s) = 0 \quad \forall [t,s] \notin \tilde{\Omega} .$$

Alle Bemerkungen zum Satz 2.6 werden im Satz 2.6', den wir für Gebiete in E_N aussprechen, zusammengefasst.

Früher aber machen wir diese Verabredung:
Ist $y = [y_1, \dots, y_N] \in E_N$, j eine natürliche Zahl, $1 \leq j \leq N$, so bezeichnen wir

$$y'_j = [y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N] , \quad y = [y'_j, y_j] .$$

2.6′. Satz. Es seien $\Omega \subset E_N$, $\tilde{\Omega} \subset E_N$ offene Mengen (die Punkte der Menge Ω bzw. $\tilde{\Omega}$ bezeichnen wir mit $x = [x_1,\dots,x_N]$ bzw. $y = [y_1,\dots,y_N]$). Es sei $f = [f_1,\dots,f_N]$ eine reguläre eineindeutige Abbildung von $\tilde{\Omega}$ auf Ω , D_f bezeichnen wir die Jacobische Determinante der Abbildung f, d.h.

$$D_f = \frac{D(f_1,\dots,f_N)}{D(y_1,\dots,y_N)}$$

Es existiere eine natürliche Zahl j $(1 \leq j \leq N)$ so, dass

$$D = \sup \{ | y_j^1 - y_j^2 | ; y^1 = [y_1^1,\dots,y_N^1],$$
$$y^2 = [y_1^2,\dots,y_N^2] \in \tilde{\Omega} \} < + \infty$$

ist. Bezeichnen wir

$$P = \{ y_j' \in E_{N-1} ; \exists y_j \in E_1 \Longrightarrow [y_j', y_j] = y \in \tilde{\Omega} \}$$

Es seien weiter C, C_i, K, K_i $(i = 1,2,\dots,N)$ positive Konstanten, d_f eine messbare Funktion in E_{N-1}.

Es gelte

$$(2.32) \qquad \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y) \right| \leq K_i \quad (i = 1,2,\dots,N) \qquad \forall\, y \in \tilde{\Omega} .$$

Es gelte weiter eine von den folgenden Bedingungen:

$$(2.33) \quad C_1 d_f(y_j') \leq | D_f(y) | \leq C_2\, d_f(y_j') \quad \forall\, [y_j', y_j] \in \tilde{\Omega} ,$$

$$d_f(y_j') = 0 \qquad \forall\, y_j' \in P.$$

(2.33′) Es existiert die Ableitung $\dfrac{\partial D_f}{\partial y_j}$ und es gilt

$$\left(\frac{1}{p}\cdot|D_f(y)|^{1-\frac{1}{p}}\cdot\left|\frac{\partial D_f(y)}{\partial y_j}\right|\right)^p \leq C\,|D_f(y)|\ ,\quad 0<C<1,$$

für fast alle $y\in\tilde{\Omega}$.

Es sei $\varphi\in V,\ \varphi,\varphi^{-1}\in L_{1,loc}(\Omega)$. Es existiere weiter eine in E_{N-1} definierte messbare Funktion $\varkappa$ so, dass gilt:

(2.34) $\quad c\,\varkappa(y_j')\leq\varphi\,(f_1(y),\dots,f_N(y))\leq K\,\varkappa(y_j')$

$$\forall\,[y_j',y_j]\in\Omega\ ,$$

$$\varkappa(y_j')=0\qquad\forall\,y_j'\notin P.$$

Dann gilt die Behauptung T_1.

Jetzt werden wir uns mit dem Beweis der Behauptung T_k für $k>1$ befassen.

Ist $u\in\overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\varphi}(\Omega)$, dann gilt

(2.35) $\qquad D^i u\in\overset{\circ}{W}{}^{1}_{p,\varphi}(\Omega)$ für $|i|=k-1$.

Man nehme an, dass die Behauptung T_1 gilt; dann ist für $v\in\overset{\circ}{W}{}^{1}_{p,\varphi}(\Omega)$

(2.36) $\quad \|v\|^p_{L_{p,\varphi}}\leq C^p\,\|v\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^{1}_{p,\varphi}} = C^p\sum_{|j|=1}\|D^j v\|_{L_{p,\varphi}}$.

Falls wir setzen $v=D^i u$ aus (2.35) in (2.36) ein, haben wir

$$\|D^i u\|^p_{L_{p,\varphi}}\leq C^p\sum_{|j|=k}\|D^j u\|_{L_{p,\varphi}}\quad\text{für } |i|=k-1$$

und weiter ist

$$(2.37)\qquad \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k-1}_{p,\varphi}} \le C_1 \sum_{|j|=k} \|D^j u\|_{L_{p,\varphi}} = C_1 \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\varphi}} .$$

Mit Hilfe math. Induktion bekommen wir endlich

$$(2.38)\qquad \|u\|_{L_{p,\varphi}} \le C_2 \sum_{|j|=k} \|D^j u\|_{L_{p,\varphi}} = C_2 \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\varphi}} .$$

Aus (2.38) folgt sofort der folgende Satz.

2.7. Satz. Es sei $k \ge 1$ eine natürliche Zahl. Es gelte weiter die Behauptung T_1. Dann gilt die Behauptung T_k.

2.1′. Satz. Es sei $(\Omega, Q) \in A$, $p > 1$, $k \ge 1$ eine natürliche Zahl, $\sigma \in A.1 \cap A.3 \cap A.4 \cap A.5.k$. Es sei weiter s eine nichtnegative ganze Zahl, $s \le k$.
Dann gilt

$$(2.39)\qquad \overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\sigma\circ r}(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{k-s}_{p,\mathcal{G}^s(\sigma)\circ r}(\Omega)$$

und es existiert eine positive Zahl C so, dass die Ungleichung

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k-s}_{p,\mathcal{G}^s(\sigma)\circ r}(\Omega)} \le C \cdot \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\sigma\circ r}(\Omega)}$$

Beweis des Satzes 2.1′. Die Funktionen $\mathcal{G}^l(\sigma)$ $(l = 0,1,\dots,s)$ erfüllen die Voraussetzungen des Satzes 2.1. Daraus folgt sofort die Behauptung des Satzes 2.1′.

Literatur

[1] J. NEČAS: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Praha, Academia, 1967

[2] A. KUFNER: Einige Eigenschaften der Sobolevschen Räume mit Belegungsfunktion, Czech. Math. J. 15 (90)(1965), 597-620

[3] A. KUFNER: Imbedding theorems for general Sobolev weight spaces, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. 3, 23, 3(1969), 373-386

[4] J. NEČAS: Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine à la variationnelle, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. 3, 16, 4(1962), 305-326

[5] A. KUFNER, B. OPIC: Rešenie zadači Dirichle v prostranstvě Soboleva s věsom obščevo tipa. Differencialnie uravněnija s častnymi proizvodnymi, Trudy seminara S.L. Soboleva. AN SSSR, Sibirskoe otdělenie, No 2, 35-48, 1976

F E L ČVUT

Suchbátarova 2

166 27 Praha 6-Dejvice

Československo

(Oblatum 19.1.1978)