Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Adolf Rhodius

Eine Eigenwertabschätzung für Integraloperatoren mit stochastischen Kernen

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 18 (1977), No. 1, 183--193

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105762`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,1 (1977)

# EINE EIGENWERTABSCHÄTZUNG FÜR INTEGRALOPERATOREN MIT STOCHASTISCHEN KERNEN

Adolf RHODIUS, Dresden

Zusammenfassung: Es wird eine Abschätzung für die zweiten Eigenwerte positiver Integraloperatoren angegeben und mit der aus der Hopfschen Ungleichung folgenden Schranke verglichen.

Schlagworte: Raum der messbaren beschränkten Funktionen, positive Integraloperatoren, Abschätzung von Eigenwerten, stochastische Matrix, Hopfsche Ungleichung.

AMS: 47B99 45C05 Ref. Ž.: 7.974.5

---

1. Einleitung. Es sei $(X,\mathcal{S},\mu)$ ein Massraum und B die Menge der komplexwertigen $\mathcal{S}$-messbaren beschränkten Funktionen auf X. Wir betrachten den Operator T: $B \longrightarrow B$ mit

(1) $$(Tx)(t) = \int_X H(t,s)x(s)d\mu(s) \qquad (x\in B,\ t\in X);$$

dabei sei H eine reellwertige $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ -messbare Funktion auf $X\times X$ und erfülle die Bedingungen

(2) $$H(t,s)\geqq 0 \qquad (t,s\in X)$$

(3) $$\int_X H(t,s)d\mu(s) = 1 \qquad (t\in X).$$

In der vorliegenden Note wird gezeigt, dass für alle von 1 verschiedenen Eigenwerte $\lambda$ des Operators T die folgende

Abschätzung gilt.

$$(4) \qquad |\lambda| \leq \frac{1}{2} \sup_{t,t' \in X} \int_X |H(t,s) - H(t',s)| \, d\mu(s)$$

Damit verallgemeinern wir eine von F.L. Bauer, E. Deutsch und J. Stoer [4] für stochastische Matrizen angegebene Eigenwertabschätzung.

G. Birkhoff [5] gab als erster eine (nichttriviale) Abschätzung für die zweiten Eigenwerte gewisser positiver Integraloperatoren an. E. Hopf [9] fand eine bessere Abschätzung in Form der sogenannten Hopfschen Ungleichung. Die bereits zitierte Arbeit von Bauer, Deutsch und Stoer [4] zeigt, dass das Hopfsche Resultat verbessert werden kann, wenn man den zum grössten Eigenwert gehörigen Eigenvektor in die Betrachtungen einbezieht. Diesem Gedanken folgen wir, ohne jedoch die dort entwickelte Theorie zu benutzen. Wir untersuchen den Operator T bezüglich der Halbnorm

$$(5) \qquad p(x) = \sup_{t,t' \in X} |x(t) - x(t')| \qquad (x \in B).$$

Die Halbnorm p hat nämlich die Eigenschaft, nur für die auf B konstanten Funktionen - also nur für einen Teilraum des zum Eigenwert 1 gehörenden Eigenraumes von T - Null zu sein.

Die Beziehung (4) liefert auch dann noch eine Eigenwertabschätzung, wenn (3) nicht gilt, T jedoch einen positiven Eigenwert mit einem zugehörigen positiven Eigenvektor besitzt.

Die Schranke (4) verbessert die von Hopf angegebene Abschätzung.

## 2. Eine Ungleichung für den Integraloperator T

Satz 1. Der Operator T ist bezüglich der Halbnorm p beschränkt; für alle $x \in B$ gilt die Ungleichung

(6) $p(Tx) \leq \frac{1}{2} \sup_{t,t' \in X} \int_X |H(t,s) - H(t',s)| \, d\mu(s) \cdot p(x)$

Beweis. Im folgenden seien $t,t' \in X$ fest gewählt. Wir setzen

(7) $H(s) = H(t,s) - H(t',s) \quad (s \in X)$,

(8) $X^+ = \{s \in X: H(s) \geq 0\}$; $\quad X^- = \{s \in X: H(s) < 0\}$,

(9) $T^+ = \int_{X^+} H(s) d\mu(s)$, $\quad T^- = \int_{X^-} H(s) d\mu(s)$.

Wegen (3) gilt

$$T^+ + T^- = \int_X H(s) d\mu(s) = \int_X H(t,s) d\mu(s) - \int_X H(t',s) d\mu(s) = 0.$$

Ausserdem folgt aus den Festlegungen (7),(8),(9) unmittelbar

$$T^+ - T^- = \int_X |H(s)| \, d\mu(s) = \int_X |H(t,s) - H(t',s)| \, d\mu(s).$$

Damit ergibt sich

(10) $T^+ = -T^- = \frac{1}{2} \int_X |H(t,s) - H(t',s)| \, d\mu(s)$.

Da die Beziehung

$$|(Tx)(t) - (Tx)(t')| = \left| \int_X (H(t,s) - H(t',s)) \cdot x(s) d\mu(s) \right| \leq 2T^+ \cdot \sup_{s \in X} |x(s)|$$

gilt, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T^+ \neq 0$ angenommen werden.

Aus (7),(8),(10) folgt dann

$$(11)\quad (Tx)(t) - (Tx)(t') = \int_{X^+} H(s)x(s)d\mu(s) +$$

$$+ \int_{X^-} H(s)x(s)d\mu(s) = T^+ \left( \int_{X^+} \frac{H(s)}{T^+} x(s)d\mu(s) - \right.$$

$$\left. - \int_{X^-} \frac{H(s)}{T^-} x(s)d\mu(s) \right) .$$

Ferner gilt

$$\left| \int_{X^+} \frac{H(s)}{T^+} x(s)d\mu(s) - \int_{X^-} \frac{H(s)}{T^-} x(s)d\mu(s) \right|$$

$$= \left| \int_{X^-} \frac{H(s)}{T^-} \left\{ \int_{X^+} \frac{H(s')}{T^+} x(s')d\mu(s') - x(s) \right\} d\mu(s) \right|$$

$$= \left| \int_{X^-} \frac{H(s)}{T^-} \left[ \int_{X^+} \left\{ \frac{H(s')}{T^+} x(s') - x(s) \right\} d\mu(s') \right] d\mu(s) \right|$$

$$\leqq \int_{X^-} \frac{H(s)}{T^-} \left[ \int_{X^+} \frac{H(s')}{T^+} \cdot |x(s') - x(s)| \, d\mu(s') \right] d\mu(s)$$

$$\leqq p(x) \qquad (x \in B).$$

Zusammen mit (11) und (10) ergibt sich

$$|(Tx)(t) - (Tx)(t')| \leqq \frac{1}{2} \int_X |H(t,s) - H(t',s)| \, d\mu(s) \cdot p(x),$$

womit alles bewiesen ist.

3. <u>Eigenwertabschätzungen für Integraloperatoren mit nichtnegativem Kern</u>. Aus der im vorangegangenen Abschnitt bewiesenen Ungleichung ergibt sich unmittelbar die Abschätzung (4) für die von 1 verschiedenen Eigenwerte des Operators T. Als Spezialfälle erhalten wir die bereits erwähnte Abschätzung für die Eigenwerte stochastischer Matrizen und ein Resultat von Ph.M. Anselone und J.W. Lee [1]. Diese Autoren übertragen das von Bauer, Deutsch und Stoer

[4] für stochastische Matrizen stammende Ergebnis auf im Raum $C[0,1]$ wirkende Integraloperatoren und verwenden dazu die Approximationstheorie für kollektiv kompakte Operatoren ("collectively compact operator approximation theory") [2].

Satz 2. Für alle von 1 verschiedenen Eigenwerte $\lambda$ des Operators T gilt

$$(12) \qquad |\lambda| \leqq \frac{1}{2} \cdot \sup_{t,t' \in X} \int_X |H(t,s) - H(t',s)| \, d\mu(s).$$

Beweis. Es sei $\lambda \neq 1$ ein Eigenwert von T und $x_\lambda \in B$ ein zugehöriges Eigenelement. Wegen $\lambda \neq 1$ gilt $p(x_\lambda) \neq 0$. Setzt man in die Ungleichung (6) des Satzes 1 das Eigenelement $x_\lambda$ ein, so folgt mit $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$ die Beziehung (12).

Folgerung 1. Für die von 1 verschiedenen Eigenwerte $\lambda$ einer stochastischen Matrix

$$Q = (q_{ts})_{t,s=1,2,\dots}$$

gilt

$$|\lambda| \leqq \frac{1}{2} \cdot \sup_{t,t'=1,2,\dots} \sum_{s=1}^{\infty} |a_{ts} - a_{t's}| \,.$$

Zum Beweis setze man $X = \{1,2,3,\dots\}$, für $\mathcal{L}$ die Potenzmenge von X und $\mu(s) = 1$ $(s = 1,2,\dots)$. Dann ist B der Vektorraum aller beschränkten komplexen Zahlenfolgen, und für den Operator T gilt

$$(Tx)(t) = \sum_{s=1}^{\infty} H(t,s)x(s) \qquad (x \in B;\ t = 1,2,\dots).$$

Mit $H(t,s) := q_{ts}$ $(t,s = 1,2,\dots)$ liefert Satz 2 die Behauptung.

Folgerung 2 (Bauer, Deutsch, Stoer [4]). Für die von 1 verschiedenen Eigenwerte $\lambda$ der stochastischen Matrix

$$A = (a_{t,s})_{t,s} = 1,2,\dots,n$$

gilt

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2} \cdot \max_{t,t'=1,2,\dots m} \sum_{s=1}^{m} |a_{ts} - a_{t's}| .$$

<u>Folgerung 3</u> (Anselone, Lee [2]). Der Integraloperator $T\colon C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ sei definiert als

$$(Tx)(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds \qquad (x \in C[0,1], t \in [0,1]).$$

Dabei sei k eine auf $[0,1] \times [0,1]$ stetige Funktion mit

$$k(t,s) \geqq 0 \qquad (t,s \in [0,1])$$

und

$$\int_0^1 k(t,s)ds = 1 \qquad (t \in [0,1]).$$

Dann gilt für alle von 1 verschiedenen Eigenwerte $\lambda$ von T

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2} \cdot \max_{t,t' \in [0,1]} \int_0^1 |k(t,s) - k(t',s)| \, ds .$$

Zum Beweis setze man $X = [0,1]$, für $\mathcal{B}$ die $\sigma$-Algebra der Lebesgue-messbaren Teilmengen von $[0,1]$ und wähle als $\mu$ das gewöhnliche Lebesgue-Mass. Dann liefert Satz 2 die Behauptung für T als Operator von B in B, also erst recht für T als Operator von $C[0,1]$ in sich.

Falls für den Kern des Operators T die Forderung (3) fallengelassen wird, so führen dennoch diverse Kriterien zur Existenz eines positiven Eigenwertes $\lambda_0$ und eines Eigenelementes $p_0$ mit $p_0(t) > 0$ $(t \in X)$ (siehe [7] bis [13]).

Der durch die Vorschrift

$$(\tilde{T}x)(t) = \int_X \frac{1}{\lambda_0} \frac{1}{p_0(t)} H(t,s)p_0(s)x(s)d\mu(s) \qquad (x \in B, t \in X)$$

definierte Operator $\tilde{T}$ erfüllt die Beziehungen (1),(2),(3), so dass für ihn die Abschätzung (4) gültig ist. $\lambda$ ist genau dann Eigenwert von T, wenn $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ Eigenwert von $\tilde{T}$ ist. Damit liefert Satz 2 die folgende Aussage.

Satz 3. Der Operator T genüge den Bedingungen (1),(2). Falls mit $\lambda_0 > 0$ und $p_0 \in B$ die Beziehungen $p_0(t) > 0 (t \in X)$ und $Tp_0 = \lambda_0 p_0$ erfüllt sind, so gilt für alle Eigenwerte $\lambda \neq \lambda_0$ von T die Abschätzung

$$|\lambda| \leqq \frac{1}{2} \sup_{t', t \in X} \int_X p_0(s) \cdot \left| \frac{H(t,s)}{p(t)} - \frac{H(t',s)}{p(t')} \right| d\mu(s).$$

4. Vergleich mit der Hopfschen Abschätzung. Um unser Resultat mit der Abschätzung von E. Hopf vergleichen zu können, müssen wir die dort geforderte Bedingung über das "cross-ratio" des Kernes von T zu den Voraussetzungen (1), (2),(3) hinzunehmen.

In Operatorschreibweise hat diese Forderung die folgende Form. Es existiere eine reelle Zahl $K > 0$, so dass für alle $t, t' \in X$

$$(13) \quad \frac{(Tx)(t')}{(Tx)(t)} \Big/ \frac{(Ty)(t')}{(Ty)(t)} \leqq K^2$$

gilt, falls $x, y \in B$ überall nichtnegativ und nicht fast überall Null sind. Diese Beziehung ist genau dann erfüllt, wenn das "cross-ratio" für die angegebenen Funktionsmenge nicht kleiner als $\frac{1}{K^2}$ ist.

Ausserdem wird in [9] gefordert, dass

(14) $\quad (Tx)(t) > 0 \quad (t \in X)$

für alle nichtnegativen nicht fast überall verschwindenden $x \in B$ gilt.

Der folgende Satz zusammen mit Beispiel 1 zeigt, dass die Schranke (4) günstiger als die Hopfsche Schranke $(K - 1)/(K + 1)$ ist.

<u>Satz 4</u>. Unter den Voraussetzungen (1),(2),(3),(13),(14) gilt

$$\frac{1}{2} \sup_{t, t' \in X} \int_X | H(t,s) - H(t',s) | \, d\mu(s) \leqq \frac{K - 1}{K + 1}$$

<u>Beweis</u>. Es seien $t, t' \in X$ fest gewählt. Wir verwenden die durch (7),(8) definierten Mengen $X^+$, $X^-$; die zugehörigen charakteristischen Funktionen bezeichnen wir mit $\chi_+$ bzw. $\chi_-$.

Wegen $\chi_+ + \chi_- = 1$ und (3) folgt

(15) $$\frac{1}{2} \int_X | H(t,s) - H(t',s) | \, d\mu(s) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_X (H(t,s) - H(t',s)) d\mu(s) -$$

$$- \int_X (H(t,s) - H(t',s)) \, \chi_-(s) d\mu(s) =$$

$$= \int_X (H(t',s) - H(t,s)) \, \chi_-(s) d\mu(s).$$

Falls $\chi_-$ oder $\chi_+$ fast überall verschwinden, ist der Ausdruck (15) Null. Damit kann wegen (14) ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Gültigkeit der Beziehungen

$$(T\chi_{\pm})(t) > 0, \qquad (T\chi_{\pm})(t') > 0$$

angenommen werden.

Aus (15) folgt zusammen mit (3)

$$\frac{1}{2}\int_X |H(t,s) - H(t',s)|\, d\mu(s) =$$
$$= \frac{(T\chi_-)(t')}{(T\chi_-)(t') + (T\chi_+)(t')} - \frac{(T\chi_-)(t)}{(T\chi_-)(t) + (T\chi_+)(t)}$$
$$= \frac{1}{1+z'} - \frac{1}{1+z},$$

falls man $z' = (T\chi_+)(t')/(T\chi_-)(t')$ und $z =$ $= (T\chi_+)(t)/(T\chi_-)(t)$ setzt. Wegen (13) gelten $z', z > 0$ und $z \leq K^2 z'$ . Damit ergibt sich

$$\frac{1}{2}\int_X |H(t,s) - H(t',s)|\, d\mu(s) \leq$$
$$\leq \frac{1}{1+z'} - \frac{1}{1+K^2 z'} = \frac{K^2-1}{1+K^2+K(Kz'+(Kz')^{-1})} \leq$$
$$\leq \frac{K^2-1}{1+K^2+2K} = \frac{K-1}{K+1},$$

womit Satz 4 bewiesen ist.

<u>Beispiel 1</u>. Der Operator $T\colon C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ mit dem Kern

$$H(t,s) = t \cdot s - \frac{1}{2}t + 1 \qquad (0 \leq t,\ s \leq 1)$$

genügt den Bedingungen (1),(2),(3) und erfüllt die Beziehung (13) mit $K = 2$ als kleinster Schranke für das "cross-ratio". Damit ergibt sich

$$\frac{K-1}{K+1} \geq \frac{1}{3}$$

während

$$\frac{1}{2} \sup_{t,t' \in [0,1]} \int_0^1 |H(t,s) - H(t',s)|\, ds = \frac{1}{8}$$

gilt.

## B i b l i o g r a p h i e


[1] P.M. ANSELONE: Collectively Compact Operator Approximation Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1971).

[2] P.M. ANSELONE and J.W. LEE: Spectral properties of integral operators with nonnegative kernels, Linear Algebra and its Appl. 9, 67-87 (1974).

[3] F.L. BAUER: An elementary proof of the Hopf inequality, Num. Math. 7, 331-337 (1965).

[4] F.L. BAUER, E. DEZTSCH und J. STOER: Abschätzungen für Eigenwerte positiver linearer Operatoren, Linear Algebra and its Appl. 2, 275-301 (1969).

[5] G. BIRKHOFF: Extensions of Jentzsch's theorem, Trans. Amer. Math. Sôc. 85, 219-227 (1957).

[6] E. DEUTSCH and Ch. ZENGER: Inclusion domains for the eigenvalues of stochastic matrices, Numer. Math. 18, 182-192 (1971).

[7] G. FROBENIUS: Über Matrizen aus positiven Elementen, Akad. Wiss. Berlin, 471-476 (1908).

[8] G. FROBENIUS: Über Matrizen aus nicht negativen Elementen, Akad. Wiss. Berlin, 456-477 (1912).

[9] E. HOPF: An inequality for positive linear integral operators, J. of Math. and Mech. 12, 683-692 (1963).

[10] R. JENTZSCH: Über Integralgleichungen mit positivem Kern, Crelles Journal 141, 235-244 (1912).

[11] I. MAREK: Spektrale Eigenschaften der K-positiven Operatoren und Einschliessungssätze für den Spektralradius, Czechosl. math. J. 16(91), 493-517 (1966).

[12] A. OSTROWSKI: Positive matrices and functional analysis, in Recent Advances in Matrix Theory, Univ. of

Wisconsin Press, Madison 81-101 (1964).

[13] O. PERRON: Zur Theorie der Matrizen, Math. Ann. 64, 248-263 (1908).

Pädagogische Hochschule

Dresden

D D R

(Oblatum 30.6. 1976)