Osvald Demuth

О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 16 (1975), No. 3, 583--599

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105649

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

16,3 (1975)

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ СЛАБО ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ НА ПСЕВДОЧИСЛАХ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание: Доказано, что всякая функция $\mathcal{F}$, которая не может не быть функцией слабо ограниченной вариации, конечно псевдодифференцируема в каждом Π_2-числе, для почти каждого псевдочисла ξ существует псевдочисло, являющееся значением псевдопроизводной функции $\mathcal{F}$ в ξ, причем дифференцирование является почти равномерным (ср. [1], гл. VIII, § 2 и 3).

Ключевые слова: Конструктивная функция, псевдочисла, дифференцируемость, функция слабо ограниченной вариации.

AMS: 02E99 Primary Ref. Ž.: 2.644.2
26A45, 26A24 Secondary

В следующем мы пользуемся без ссылок определениями и обозначениями из [2] и теоремой о полноте псевдочисел: для всяких последовательности псевдочисел и регулятора ее сходимости в себе существует псевдочисло, являющееся пределом этой последовательности (Б.А. Кушнер).

Определения. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а P и Q слова, которые являются или КДЧ или ПЧ.

а) $D_{кл}(Q, \mathcal{F}, P)$ определено в [2]. Мы обозначим

$D_{кл}(\mathcal{F},P) \rightleftharpoons \forall k \neg\neg \exists \ell \forall abcd\,(a < P < b \;\&\; c < P < d \;\&\; b-a < \frac{1}{2^{\ell}} \;\&$

$$\& \; d-c<\frac{1}{2^{\ell}} \supset \left| \frac{\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a)}{b-a} - \frac{\mathcal{F}(d)-\mathcal{F}(c)}{d-c} \right| < \frac{1}{2^{k}}) \;,$$

$$D_{кл}(+\infty,\mathcal{F},P) \rightleftharpoons \forall k \neg\neg \exists \ell \forall a\, b\, (a<P<b \;\&\; b-a<\frac{1}{2^{\ell}} \supset$$

$$\supset \frac{\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a)}{b-a} > k), \qquad D_{кл}(-\infty,\mathcal{F},P) \rightleftharpoons D_{кл}(+\infty,-\mathcal{F},P)\;,$$

$$Bd(\mathcal{F},P) \rightleftharpoons \neg\neg \exists k \ell \forall a\, b\, (a<P<b \;\&\; b-a<\frac{1}{2^{\ell}} \supset \frac{|\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a)|}{b-a} < k),$$

$$L(Q,\mathcal{F},P) \rightleftharpoons \forall k \neg\neg \exists \ell \forall a (|P-a|<\frac{1}{2^{\ell}} \supset |Q-\mathcal{F}(a)|<\frac{1}{2^{k}})\;.$$

б) Если $D_{кл}(\mathcal{F},P)$, то мы скажем, что $\mathcal{F}$ конечно псевдо-дифференцируема в P. Если $D_{кл}(Q,\mathcal{F},P)$ (соотв. $D_{кл}(+\infty,\mathcal{F},P)$, соотв. $D_{кл}(-\infty,\mathcal{F},P)$), то мы скажем, что Q (соотв. $+\infty$, соотв. $-\infty$) является значением псевдопроизводной функции $\mathcal{F}$ в P.

<u>Определние</u>. Пусть $\mathcal{S}$ свойство псевдочисел, а $x \Delta y$ сегмент. Мы скажем, что $\mathcal{S}(\xi)$ выполнено для почти всех псевдочисел ξ (соотв. ξ из $x \Delta y$), если для всякого НЧ m существуют последовательность последовательностей рациональных сегментов $\{\{Q^{n}_{k}\}_{k}\}_{n}$ и последовательность неинфинитных рекурсивно перечислимых (р.п.) множеств НЧ $\{D_n\}_n$ такие, что $\forall n \ell (\sum_{1\le k\le \ell \;\&\; \neg(k\in D_n)} |Q^{n}_{k}| < \frac{1}{2^{m+n}})$ и для всякого ПЧ ξ (соотв. ПЧ ξ из $x \Delta y$) верно $(\neg \exists n k (\neg(k \in D_n) \;\&\; \xi \in Q^{n}_{k}) \supset \mathcal{S}(\xi))$ (см. лемму 7 из [2]).

<u>Обозначение</u>. Пусть C р.п. множество НЧ. Мы обозначим $\mathcal{H}(C)$, если сегменты $b_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}$, $\ell \in C$, не перекрываются и

содержатся в $0 \triangle 1$ и существует возрастающая последовательность НЧ $\{m_p\}_p$ такая, что

$$\forall p \ell (\ell \in C \,\&\, \neg(\ell \in C^{(m_p)}) \supset |\mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}| < \frac{1}{2^p})$$ (см. [2]) .

<u>Лемма 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а C р.п. множество НЧ, $\mathcal{H}(C)$. Тогда существует функция такая, что а) она линейна на всяком сегменте $\mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}$, $\ell \in C$, и б) в каждой точке множества $\wedge x(\neg \exists \ell(\ell \in C \,\&\, \partial_{л}(\mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}) < x < \partial_{п}(\mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})))$ ее значение равно значению функции $\mathcal{F}$.

<u>Замечание</u>. В следующем, когда у нас будут функция $\mathcal{F}$ и р.п. множество НЧ C такое, что $\mathcal{H}(C)$, мы посредством $[\mathcal{F}, C]$ обозначим функцию, обладающую свойствами перечисленными в утверждении леммы 1.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, ξ и ζ псевдочисла, а C р.п. множество НЧ такие, что
$\mathcal{H}(C) \,\&\, \neg \exists \ell(\ell \in C \,\&\, \zeta \in \mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})$. Тогда

а) $(\exists \eta(\eta \in \Pi \,\&\, D_{кл}(\eta, \mathcal{F}, \xi)) \supset D_{кл}(\mathcal{F}, \xi)) \,\&\, (D_{кл}(\mathcal{F}, \xi) \supset$

$\supset Bd(\mathcal{F}, \xi)) \,\&\, \forall x(D_{кл}(\mathcal{F}, x) \supset \exists \eta(\eta \in \Pi \,\&\, D_{кл}(\eta, \mathcal{F}, x))) \,\&$

$(Bd(\mathcal{F}, \xi) \supset \exists \eta(\eta \in \Pi \,\&\, L(\eta, \mathcal{F}, \xi) \,\&\, (\xi \in \Pi_1 \supset \eta \in \Pi_1))) \,\&$

$(D_{кл}(\mathcal{F}, \xi) \,\&\, \neg D_{кл}(0, \mathcal{F}, \xi) \,\&\, \neg\neg \exists y\, L(y, \mathcal{F}, \xi) \supset \neg\neg \exists x(x = \xi)) \,\&$

$(\xi \in \Pi_2 \,\&\, D_{кл}(\mathcal{F}, \xi) \supset \forall \eta(\eta \in \Pi \,\&\, L(\eta, \mathcal{F}, \xi) \supset$

$\supset (\eta \in \Pi_1 \equiv D_{кл}(0, \mathcal{F}, \xi)))) \,\&\, (\xi \in \Pi_2 \supset \neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, \xi))$

и

б) $(Bd(\mathcal{F}, \xi) \supset Bd([\mathcal{F}, C], \xi)) \,\&\, (D_{кл}(\mathcal{F}, \zeta) \supset$

$\supset D_{кл}(0, \mathcal{F} - [\mathcal{F}, C], \zeta)) \,\&\, (D_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, \zeta) \supset D_{кл}(+\infty, [\mathcal{F}, C], \zeta))$.

Обозначение. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, а $\{x_k\}_k$ последовательность КДЧ. Тогда мы обозначим $\mathfrak{Z}^D(\mathcal{F},\{x_k\}_k)$, если а) для всяких РЧ a_1, a_2, b_1, b_2 и r, $a_1 < b_1 \& a_2 < b_2 \& 0 < r < |a_1 \vartriangle b_1|$, последовательность $\{x_k\}_k$ не может не содержать члены равные следующим КДЧ:

$$\frac{\mathcal{F}(b_1)-\mathcal{F}(a_1)}{b_1-a_1}, \frac{\mathcal{F}(b_1)-\mathcal{F}(a_1)}{b_1-a_1} - \frac{\mathcal{F}(b_2)-\mathcal{F}(a_2)}{b_2-a_2}, \frac{\langle\omega,\mathcal{F}\rangle_{\llcorner} a_1 \vartriangle b_{1\lrcorner}}{b_1-a_1},$$

супремуму и инфимуму множеств

$$\wedge y(\exists cd(a_1 < c < d < b_1 \& r < |c \vartriangle d| \& y = \frac{\mathcal{F}(d)-\mathcal{F}(c)}{d-c}))$$

и

$$\wedge y(\exists cd(a_1 < c < d < b_1 \& r < |c \vartriangle d| \& y = \frac{\langle\omega,\mathcal{F}\rangle_{\llcorner} c \vartriangle d_{\lrcorner}}{d-c}))$$

и

б) $\forall a k \neg\neg \exists l (a \cdot x_k = x_l)$; ($\langle\omega, \mathcal{F}\rangle$ - колебание функции $\mathcal{F}$).

Лемма 3. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда

1) существует последовательность КДЧ $\{x_k\}_k$ такая, что $\mathfrak{Z}^D(\mathcal{F},\{x_k\}_k)$;

2) для всяких последовательности КДЧ $\{x_k\}_k$, КДЧ y и знака $*$, $\mathfrak{Z}^D(\mathcal{F},\{x_k\}_k) \& \neg\exists k(y = x_k) \& (* \,\Xi\, \langle \vee * \Xi \rangle)$, если для любого рационального сегмента $c \vartriangle d$ -

$$\mathcal{V}_1^*(c \vartriangle d) \rightleftharpoons \frac{\mathcal{F}(d)-\mathcal{F}(c)}{d-c} * y,$$

$$\mathcal{V}_2^*(c \vartriangle d) \rightleftharpoons \frac{|\mathcal{F}(d)-\mathcal{F}(c)|}{d-c} * y,$$

$$\mathcal{V}_3^*(c \vartriangle d) \rightleftharpoons \frac{\langle\omega,\mathcal{F}\rangle_{\llcorner} c \vartriangle d_{\lrcorner}}{d-c} * y,$$

то выполнено $\forall i a b r (1 \le i \le 3 \& a < b \& 0 < r < |a \Delta b| \supset$

$\supset (\exists c d (a < c < d < b \& r < |c \Delta d| \& \mathcal{V}_i^*(c \Delta d)) \vee$

$\vee \neg \exists c d (a < c < d < b \& r < |c \Delta d| \& \mathcal{V}_i^*(c \Delta d))))$.

Обозначения. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $x_1 \Delta x_2$ сегмент, z КДЧ, ξ и η ПЧ, m НЧ, а $\{p_k\}_k$ последовательность НЧ. Тогда мы обозначим

1) $\Delta(\mathcal{F}, x_1 \Delta x_2) \rightleftharpoons (\mathcal{F}(x_2) - \mathcal{F}(x_1))$,

2) посредством h_z функцию, для которой верно $\forall x (h_z(x) \simeq z \cdot max(min(x, 1), 0))$, и

3) $\mathcal{D}(\eta, \mathcal{F}, \xi, m, \{p_k\}_k) \rightleftharpoons (\neg\neg \exists s \forall k (s \le k \supset p_k = p_s) \&$
$\forall a b (a < \xi < b \& \forall k (b - a < \frac{1}{2^{p_k}}) \supset \left| \frac{\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)}{b - a} - \eta \right| < \frac{1}{2^m}))$.

Мы напомним, что функция $\mathcal{F}$ называется функцией слабо ограниченной вариации (на $0 \Delta 1$), если
$\exists t \forall m (\sum_{i=1}^{2^m} \left| \Delta(\mathcal{F}, \frac{i-1}{2^m} \Delta \frac{i}{2^m}) \right| < t)$,
и что любая функция постоянна на $\wedge x (x \le 0)$ и на $\wedge x (1 \le x)$.

Лемма 4. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $*$ один из знаков $<$ и $>$, а z и w КДЧ такие, что

$$w * z \& \forall a b x (0 \le a < b \le 1 \& (x = z \vee x = w) \supset$$

$$\supset \neg (x = \frac{\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)}{b - a})) \& (\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(0)) * z \quad .$$

Тогда существует р.п. множество НЧ C такое, что $\mathcal{H}(C) \&$ $\forall l (l \in C \supset w . |\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner| * \mathcal{F}(\exists_m(\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner)) - \mathcal{F}(\exists_n(\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner))) \&$ $\forall x y (0 \le x < y \le 1 \supset [\mathcal{F}, C](y) - [\mathcal{F}, C](x) * z . (y - x))$. Следовательно, функция $[\mathcal{F}, C] - h_z$ является строго монотонной на $0 \Delta 1$ и, таким образом, $[\mathcal{F}, C]$ равномерно непрерывная функция слабо ограниченной вариации.

<u>Доказательство</u>. Пусть ж $\mathfrak{x} >$. Мы для всяких сегмента $a \triangle b$ и КДЧ y обозначим $\mathcal{P}_y(a \triangle b) \rightleftharpoons (\Delta(\mathcal{F}, a \triangle b) > y \cdot |a \triangle b|)$.

Мы построим последовательность систем НЧ $\{A_k\}_k$.

а) Пусть A_1 пустая система, а $\mathcal{B}_1$ система сегментов, которая содержит единственный сегмент – $0 \triangle 1$.

б) Пусть k НЧ и пусть мы уже построили систему НЧ A_k и систему неперекрывающихся диадически рациональных сегментов, обладающих свойством $\mathcal{P}_x$, – $\mathcal{B}_k$. Пусть

$\frac{i_1}{2^{j_0}} \triangle \frac{i_2}{2^{j_0}}$ самый левый из тех сегментов системы $\mathcal{B}_k$, которые имеют максимальную длину. Мы построим НЧ i_0 такое, что

$$2i_1 < i_0 < 2i_2 \;\&\; \exists i j \left(\frac{i-1}{2^j} \leq \frac{i_1}{2^{j_0}} < \frac{i}{2^j} = \frac{i_0}{2^{j_0+1}} < \frac{i_2}{2^{j_0}} \leq \frac{i+1}{2^j} \right).$$

α) Выполнено $\mathcal{P}_x\left(\frac{i_1}{2^{j_0}} \triangle \frac{i_0}{2^{j_0+1}}\right) \;\&\; \mathcal{P}_x\left(\frac{i_0}{2^{j_0+1}} \triangle \frac{i_2}{2^{j_0}}\right)$. Тогда

$A_{k+1} \rightleftharpoons A_k$, а $\mathcal{B}_{k+1}$ система сегментов, которая возникает из $\mathcal{B}_k$ заменой сегмента $\frac{i_1}{2^{j_0}} \triangle \frac{i_2}{2^{j_0}}$ на сегменты $\frac{2i_1}{2^{j_0+1}} \triangle \frac{i_0}{2^{j_0+1}}$ и $\frac{i_0}{2^{j_0+1}} \triangle \frac{2i_2}{2^{j_0+1}}$.

β) Выполнено $\neg \mathcal{P}_x\left(\frac{i_1}{2^{j_0}} \triangle \frac{i_0}{2^{j_0+1}}\right)$. Тогда мы определим

$$\bar{j} \rightleftharpoons \mu j \left(j_0 + 1 \leq j \;\&\; \exists i \left(\frac{i_0}{2^{j_0+1}} < \frac{i}{2^j} < \frac{i_2}{2^{j_0}} \;\&\; \mathcal{P}_x\left(\frac{i_1}{2^{j_0}} \triangle \frac{i}{2^j}\right) \;\&\; \neg \mathcal{P}_w\left(\frac{i_1}{2^{j_0}} \triangle \frac{i}{2^j}\right) \;\&\; \mathcal{P}_x\left(\frac{i}{2^j} \triangle \frac{i_2}{2^{j_0}}\right)\right)\right),$$

$\bar{i} \rightleftharpoons \mu i \left(\frac{i_0}{2^{j_0+1}} < \frac{i}{2^{\bar{j}}} \ \& \ \mathcal{P}_z \left(\frac{i_1}{2^{j_0}} \Delta \frac{i}{2^{\bar{j}}} \right) \& \neg \mathcal{P}_w \left(\frac{i_1}{2^{j_0}} \Delta \frac{i}{2^{\bar{j}}} \right) \ \& \right.$
$\left. \mathcal{P}_z \left(\frac{i}{2^{\bar{j}}} \Delta \frac{i_2}{2^{j_0}} \right) \right)$, $\bar{\ell} \rightleftharpoons \mu \ell \left(\partial_\ell (\mathcal{B}_\llcorner \ell_\lrcorner) = \frac{i_1}{2^{j_0}} \ \& \ \partial_m (\mathcal{B}_\llcorner \ell_\lrcorner) = \frac{\bar{i}}{2^{\bar{j}}} \right)$.

Пусть $A_{k+1} \rightleftharpoons A_k \cup \{ \bar{\ell} \}$, а $\mathcal{B}_{k+1}$ система сегментов, которая возникает из $\mathcal{B}_k$ заменой $\frac{i_1}{2^{j_0}} \Delta \frac{i_2}{2^{j_0}}$
на $\frac{\bar{i}}{2^{\bar{j}}} \quad \frac{i_2 \cdot 2^{\bar{j}-j_0}}{2^{\bar{j}}}$.

γ) Если выполнено $\neg \mathcal{P}_z \left(\frac{i_0}{2^{j_0+1}} \Delta \frac{i_2}{2^{j_0}} \right)$, то мы поступим аналогично случаю β).

Мы построим р.п. множество НЧ C такое, что
$\forall \ell (\ell \in C \equiv \exists k (\ell \in A_k))$.

<u>Лемма 5</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция. Тогда существует алгорифм $\mathcal{L}$ обладающий следующими свойствами: $\forall m \ell \exists p (\mathcal{L}_\llcorner m \ell_\lrcorner \simeq p)$ и для всяких НЧ m, p и $\mathcal{L}_\llcorner m \ell_\lrcorner \equiv p$, алгорифм $\widetilde{\mathcal{U}}_{p\square}$ является стройным и

а) для всякого НЧ k , для которого верно $! \mathcal{U}_\llcorner p \square k_\lrcorner$, $\mathcal{U}_\llcorner p \square k_\lrcorner$ НЧ, сегменты системы $\{ \mathcal{B}_\llcorner \mathcal{U}_\llcorner p \square j_\lrcorner{}_\lrcorner \}_{j=1}^{k}$
не перекрываются и не имеют общих внутренних точек с $\mathcal{B}_\llcorner \ell_\lrcorner$,

$$\frac{1}{2^{\ell+m+7}} \leq | \mathcal{B}_\llcorner \mathcal{U}_\llcorner p \square k_\lrcorner{}_\lrcorner | \ \& \ \exists d (d \in \mathcal{B}_\llcorner \ell_\lrcorner \ \&$$
$$\& \sum_{j=1}^{k} | \mathcal{B}_\llcorner \mathcal{U}_\llcorner p \square j_\lrcorner{}_\lrcorner | < 2^{m+1} \cdot | \mathcal{F}(d) | + \frac{1}{2^{\ell+m+3}}) \ ;$$

б) $\forall c (c \in \mathcal{B}_\llcorner \ell_\lrcorner \supset \exists k (! \mathcal{U}_\llcorner p \square k_\lrcorner \ \& \ \forall d (\partial_\ell (\mathcal{B}_\llcorner \ell_\lrcorner) - | \mathcal{F}(c) | \cdot 2^m - \frac{1}{2^{\ell+m+6}} \leq$
$d \leq \partial_m (\mathcal{B}_\llcorner \ell_\lrcorner) + | \mathcal{F}(c) | \cdot 2^m + \frac{1}{2^{\ell+m+6}} \supset d \in (\mathcal{B}_\llcorner \ell_\lrcorner \cup \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{B}_\llcorner \mathcal{U}_\llcorner p \square j_\lrcorner))))$

и, следовательно,

в) если c РЧ и ξ ПЧ такие, что

$c \in \mathcal{B}\llcorner l \lrcorner \,\&\, \neg(\xi \in \mathcal{B}\llcorner l \lrcorner) \,\&\, 2^{m} \cdot |\mathcal{F}(c)| \geq |\xi - c|$,

то $\neg\neg\exists k(!\mathcal{U}\llcorner p \square k \lrcorner \,\&\, \xi \in \mathcal{B}\llcorner \mathcal{U}\llcorner p \square k \lrcorner\lrcorner)$.

<u>Лемма 6</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, которая не может не быть функцией слабо ограниченной вариации, а C р.п. множество НЧ такие, что сегменты $\mathcal{B}\llcorner l \lrcorner$, $l \in C$, не перекрываются и $\forall x(|\mathcal{F}(x)| > 0 \supset \exists l(l \in C \,\&\, \text{Э}_{л}(\mathcal{B}\llcorner l \lrcorner) < x < \text{Э}_{п}(\mathcal{B}\llcorner l \lrcorner)))$.

Тогда $\forall \xi(\xi \in \Pi_2 \,\&\, \neg\exists l(l \in C \,\&\, \xi \in \mathcal{B}\llcorner l \lrcorner) \supset D_{кл}(0, \mathcal{F}, \xi))$ и для всяких НЧ m и λ существуют последовательность рациональных сегментов $\{R_k\}_k$, неинфинитное р.п. множество НЧ D и неубывающая последовательность НЧ $\{p_k\}_k$ такие, что

$$(1)\ \forall y(\forall n(\sum_{i=1}^{2^n} |\Delta(\mathcal{F}, \frac{i-1}{2^n} \Delta \frac{i}{2^n})| < y) \supset \forall n(\sum_{k=1}^{n} |R_k| < 2^{m+1} \cdot y + \frac{1}{2^{m+2}}))$$

и

$$\forall n(\sum_{1 \leq k \leq n \,\&\, \neg(k \in D)} |R_k| < \frac{1}{2^{\lambda}}) \,\&\, \forall \xi(\xi \in \Pi \,\&\, \neg\exists l(l \in C \,\&\, \xi \in$$

$$\in \mathcal{B}\llcorner l \lrcorner) \,\&\, \neg\exists k(\neg(k \in D) \,\&\, \xi \in R_k) \supset \xi \in \Pi_2 \,\&\, \mathcal{D}(0, \mathcal{F}, \xi, m, \{p_k\}_k)) .$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathcal{C}$ алгорифм, построенный согласно лемме 5, а m НЧ. Существуют последовательность отличных друг от друга пар НЧ $\{\sigma_n \square \tau_n\}_n$ и последовательность рациональных сегментов $\{R_k\}_k$ такие, что

$$\forall p q(\exists n(\sigma_n \square \tau_n \rightleftharpoons p \square q) \equiv (\exists l k(l \in (C^{(p+1)} \setminus C^{(p)}) \,\&$$

$$\& \,\mathcal{U}\llcorner \mathcal{C}\llcorner m l \lrcorner \square k \lrcorner \simeq q) \vee \exists l(l \in C^{(p+1)} \,\&\, ((\mathcal{B}\llcorner q \lrcorner \rightleftharpoons (\text{Э}_{л}(\mathcal{B}\llcorner l \lrcorner) -$$

$$- \frac{1}{2^{2p+m+4}}) \Delta \text{Э}_{л}(\mathcal{B}\llcorner l \lrcorner)) \vee (\mathcal{B}\llcorner q \lrcorner \rightleftharpoons \text{Э}_{п}(\mathcal{B}\llcorner l \lrcorner) \Delta (\text{Э}_{п}(\mathcal{B}\llcorner l \lrcorner) +$$

$$+\frac{1}{2^{2p+m+4}}))))\vee\mathcal{B}\llcorner q\lrcorner \eqcirc K_p^{m+5})) \;\&\; \forall n\,(R_n \rightleftharpoons \mathcal{B}\llcorner r_n \lrcorner)\ ,$$

где $\{K_s^{m+5}\}_s$ последовательность сегментов, построенная согласно теореме 2 из [2].

Тогда верно (1) и ввиду свойств функции $\mathcal{F}$ и

(2) $$\neg\neg\,\exists t\,\forall n\,(\sum_{k=1}^{n}|R_k| < t)\ .$$

1) Пусть ξ Π_2-число, для которого верно

(3) $$\neg\,\exists l\,(l \in C \;\&\; \xi \in \mathcal{B}\llcorner l \lrcorner)\ .$$

Тогда ввиду следствия 2 теоремы 5 из [2] не может не существовать НЧ s_0 такое, что

(4) $$\neg\,\exists n\,(s_0 \le \sigma_n \;\&\; \xi \in R_n)\ .$$

Пусть s_0 НЧ, для которого верно (4). Тогда

$$\forall l\,(l \in C^{(s_0)} \supset \frac{1}{2^{2s_0+m+4}} < min(|\xi - \ni_\lambda(\mathcal{B}\llcorner l \lrcorner)|\ ,$$
$$|\xi - \ni_n(\mathcal{B}\llcorner l \lrcorner)|))\ .$$

Пусть c и d РЧ такие, что $c < \xi < d \;\&\; d - c <$ $< \frac{1}{2^{2s_0+m+4}}$. Согласно лемме 5 верно

$$|\mathcal{F}(d) - \mathcal{F}(c)| \le |\mathcal{F}(c)| + |\mathcal{F}(d)| < (d-c)\cdot\frac{1}{2^m}\ .$$

2) Пусть λ НЧ. Тогда существует неубывающая последовательность НЧ $\{p_k\}_k$ для которой выполнено

$$p_1 = m + 8 \;\&\; \forall p\,(\exists k\,(p = p_k)$$
$$\equiv (p_1 = p \vee \exists t s\,(2s + m + 6 = p \;\&\; \sum_{1\le n\le t \,\&\, s\le\sigma_n} |R_n| \ge \frac{1}{2^\lambda})))\ .$$

Ввиду (2) не может не существовать НЧ s_0 такое, что

(5) $$\exists t \forall k (t \le k \supset p_k = 2 s_0 + m + 4) \ .$$

Для завершения доказательства достаточно построить р.п. множество НЧ D , для которого верно $\forall k (k \in D \equiv \exists q (2\text{б}_k + m + 4 < p_q))$, и заметить, что для всяких П-числа ξ и НЧ s_0 , выполняющих условия (3) - (5), верны рассуждения из конца 1) и $\xi \in \Pi_2$.

Лемма 7. Пусть $\mathcal{F}$ возрастающая на $0 \Delta 1$ функция, а γ НЧ такое, что $\forall a b (a < b \supset \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) < \gamma \cdot (b - a))$. Тогда $\forall \xi (\xi \in \Pi_2 \supset D_{кл}(\mathcal{F}, \xi))$.

Доказательство. Ясно, что $\forall \xi (\xi \in \Pi \,\&\, (\xi < 0 \vee 1 < \xi) \supset D_{кл}(0, \mathcal{F}, \xi))$. Согласно лемме 3 существует последовательность КДЧ $\{x_k\}_k$, для которой верно $\mathfrak{X}^D(\mathcal{F}, \{x_k\}_k)$.

1) Пусть y_1 и y_2 КДЧ такие, что $0 < y_1 < y_2 \,\&$ $\& \neg \exists k (y_1 = x_k \vee y_2 = x_k)$. Тогда согласно теореме 7 из [2] существует последовательность р.п. множеств НЧ $\{E_s\}_s$ такая, что $\forall s (\mathcal{K}(E_s) \,\&\, \forall l (l \in E_{s+1} \supset$ $\supset \exists k (k \in E_s \,\&\, \mathcal{B}_{\llcorner l \lrcorner} \subseteq \mathcal{B}_{\llcorner k \lrcorner})))$, для всяких НЧ q и l выполнено $(l \in E_{2q-1} \supset \Delta(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\llcorner l \lrcorner}) < y_1 \cdot |\mathcal{B}_{\llcorner l \lrcorner}|) \,\&\, (l \in E_{2q} \supset$ $\supset y_2 \cdot |\mathcal{B}_{\llcorner l \lrcorner}| < \Delta(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\llcorner l \lrcorner})) \,\&\, (l \in E_1 \supset \mathcal{B}_{\llcorner l \lrcorner} \subseteq 0 \nabla 1)$

и

$$\forall \xi (\xi \in \Pi_2 \,\&\, \xi \in 0 \Delta 1 \,\&\, \forall m \neg\neg \exists a b c d (a < \xi < b \,\&\, c < \xi <$$

(6) $$< d \,\&\, |a \Delta b| < \frac{1}{2^m} \,\&\, |c \Delta d| < \frac{1}{2^m} \,\&\, \Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) < y_1 \cdot |a \Delta b| \,\&$$

$$\& y_2 \cdot |c \Delta d| < \Delta(\mathcal{F}, c \Delta d)) \supset \forall s \neg\neg \exists l (l \in E_s \,\&\, \xi \in \mathcal{B}_{\llcorner l \lrcorner})) \ .$$

Таким образом, мы ввиду того, что $\mathcal{F}$ возрастает на $0 \Delta 1$, для всяких НЧ q, p и m , $p \in E_{2q-1}$, имеем

$$y_2 \cdot \sum_{\mathcal{B}_m(\ell)} |\mathscr{L}\llcorner \ell \lrcorner| < \sum_{\mathcal{B}_m(\ell)} \Delta(\mathcal{F}, \mathscr{L}\llcorner \ell \lrcorner) \leq \Delta(\mathcal{F}, \mathscr{L}\llcorner r \lrcorner) < y_1 \cdot |\mathscr{L}\llcorner r \lrcorner| ,$$

где $\forall \ell (\mathcal{B}_m(\ell) \equiv (\ell \in (E_{2q})^{(m)} \mathbin{\&} \mathscr{L}\llcorner \ell \lrcorner \subseteq \mathscr{L}\llcorner r \lrcorner))$.

Следовательно, $\forall q m (\sum_{\ell \in (E_{2q})^{(m)}} |\mathscr{L}\llcorner \ell \lrcorner| < \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^q)$. (Ср. [4], 247-251).

Отсюда мы согласно следствию 2 теоремы 5 из [2] получаем $\forall \xi (\xi \in \Pi_2 \mathbin{\&} \xi \in 0 \Delta 1 \supset \neg\neg \exists q \neg \exists \ell (\ell \in E_{2q} \mathbin{\&} \xi \in \mathscr{L}\llcorner \ell \lrcorner))$. Но тогда ввиду (6) верно

$$\forall \xi (\xi \in \Pi_2 \mathbin{\&} \xi \in 0 \Delta 1 \supset \neg\neg \exists m \forall a b c d (a < \xi < b \mathbin{\&} c < \xi < d \mathbin{\&} |a \Delta b| < \frac{1}{2^m} \mathbin{\&} |c \Delta d| < \frac{1}{2^m} \supset (\Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) < y_1 \cdot |a \Delta b| \supset \Delta(\mathcal{F}, c \Delta d) < y_2 \cdot |c \Delta d|) \mathbin{\&} (y_2 \cdot |a \Delta b| < \Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) \supset \supset y_1 \cdot |c \Delta d| < \Delta(\mathcal{F}, c \Delta d)))) .$$

2) Пусть ξ Π_2-число, $\xi \in 0 \Delta 1$, а ϑ НЧ. Существуют КДЧ w и НЧ k_0 ,для которых выполнено $0 < w < \frac{1}{6 \cdot 2^{\vartheta}} \mathbin{\&} \neg \exists k (w = x_k) \mathbin{\&} \gamma < (k_0 + 1) \cdot w$.

Тогда согласно 1) не могут не существовать НЧ m_0 и РЧ a и b такие, что

$$a < \xi < b \mathbin{\&} |a \Delta b| < \frac{1}{2^{m_0}} \mathbin{\&} \forall i c d (1 \leq i \leq k_0 \mathbin{\&} c < \xi < d \mathbin{\&}$$

$$\text{(7)} \quad \mathbin{\&} |c \Delta d| < \frac{1}{2^{m_0}} \supset (\Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) < i \cdot w \cdot |a \Delta b| \supset \Delta(\mathcal{F}, c \Delta d) < (i+1) \cdot w \cdot |c \Delta d|) \mathbin{\&} ((i+1) \cdot w \cdot |a \Delta b| < \Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) \supset i \cdot w \cdot |c \Delta d| < \Delta(\mathcal{F}, c \Delta d))) .$$

Пусть m_0 НЧ и a и b РЧ, для которых верно (7). Существует НЧ i_0 такое, что $1 \leq i_0 \leq k_0 + 1 \mathbin{\&} (i_0 - 1) \cdot w < \frac{\Delta(\mathcal{F}, a \Delta b)}{|a \Delta b|} < i_0 \cdot w$ и, следовательно, для всяких РЧ c и d, $c < \xi < d \mathbin{\&} |c \Delta d| < \frac{1}{2^{m_0}}$, верно $\max(i_0 - 2, 0) \cdot w < \frac{\Delta(\mathcal{F}, c \Delta d)}{|c \Delta d|} <$

$< min(i_0+1, k_0+1) . w$ и

$$\left| \frac{\Delta(\mathcal{F}, a\Delta b)}{|a\Delta b|} - \frac{\Delta(\mathcal{F}, c\Delta d)}{|c\Delta d|} \right| < 3 . w < \frac{1}{2^{\vartheta+1}} .$$

Итак, мы доказали $D_{кл}(\mathcal{F}, \xi)$.

<u>Лемма 8</u>. Пусть $\mathcal{G}$ функция, которая не может не быть полигональной, а $\{Q_m\}_m$ последовательность рациональных сегментов такая, что $\forall a \,(a \in 0\Delta 1 \supset \exists p \;(a \in (\bigcup_{m=1}^{p} Q_m)^{\circ}))$. Тогда существуют алгорифмический оператор G типа $\Pi_2 \longrightarrow K$ и неубывающая последовательность НЧ $\{p_k\}_k$ такие, что

$$\forall \xi (\xi \in \Pi_2 \supset D_{кл}(G(\xi), \mathcal{G}, \xi)) \,\&\, \neg\neg \exists s \,\forall k (s \leq k \supset p_k = p_s) \;\&$$

$$\& \forall \xi (\xi \in \Pi \,\&\, \neg \exists m (\xi \in Q_m) \supset \exists \eta (\eta \in K \,\&\, \forall a b (a < \xi < b \;\&$$

$$\& \forall k (b - a < \frac{1}{2^{p_k}}) \supset (b < 0 \vee 0 < a < b < 1 \vee 1 < a) \;\&$$

$$\& \; \frac{\mathcal{G}(b) - \mathcal{G}(a)}{b - a} = \eta))) .$$

<u>Лемма 9</u>. Пусть τ НЧ, $\mathcal{F}$ функция, которая не может не быть функцией слабо ограниченной вариации, а $\mathcal{G}$ функция, которая не может не быть полигональной. Тогда существуют последовательность рациональных сегментов $\{Q_m\}_m$, неубывающая последовательность НЧ $\{p_k\}_k$ и алгорифмический оператор G типа $\Pi_2 \longrightarrow K$ для которых верно

$$\forall \xi (\xi \in \Pi_2 \supset D_{кл}(G(\xi), \mathcal{G}, \xi)) \,\&\, \forall \xi (\xi \in \Pi \,\&\, \neg \exists m (\xi \in Q_m) \supset$$

$$\supset \xi \in \Pi_2 \,\&\, \mathcal{D}(G(\xi), \mathcal{F}, \xi, \tau, \{p_k\}_k))$$

$$и \; (\forall m (\sum_{i=1}^{2^m} |\Delta(\mathcal{F} - \mathcal{G}, \frac{i-1}{2^m} \Delta \frac{i}{2^m})| \leq \frac{1}{2^{2\tau+6}}) \supset \forall q (\sum_{m=1}^{q} |Q_m| < \frac{1}{2^{\tau}})) .$$

<u>Доказательство</u>. Согласно леммам 4 и 6, где $m \rightleftharpoons \tau + 1$, существуют р.п. множество НЧ C_1 ,последовательность рациональных сегментов $\{R_k\}_k$ и неубывающая последовательность

НЧ $\{p_{1,k}\}_k$ такие, что $\mathcal{H}(C_1)$, $([\mathcal{F}, C_1]-[\mathcal{G}, C_1])$ равномерно непрерывная функция, $\forall l(l \in C_1 \supset \Delta(\mathcal{F}-\mathcal{G}, \mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner) < -|\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner|) \& \forall \xi(\xi \in \Pi \& \neg \exists k(\xi \in R_k) \& \neg \exists l(l \in C_1 \& \xi \in \mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner) \supset \xi \in \Pi_2 \& \mathcal{D}(0, \mathcal{F}-\mathcal{G}-([\mathcal{F}, C_1]-[\mathcal{G}, C_1]), \xi, \tau+1, \{p_{1,k}\}_k))$.

Согласно теореме 7 из [2] и лемме 3 существуют КДЧ y и р.п. множество НЧ C_2 такие, что

$$\frac{1}{2^{\tau+2}} < y < \frac{1}{2^{\tau+1}} \& \mathcal{H}(C_2) \& \forall l(l \in C_2 \supset |\Delta([\mathcal{F}, C_1] - [\mathcal{G}, C_1], \mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner)| > y.|\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner|) \& \forall a b(0 < a < b < 1 \& |\Delta([\mathcal{F}, C_1]-[\mathcal{G}, C_1], a \Delta b)| > y.|a \Delta b| \supset \exists l(l \in C_2 \& \neg(a \Delta b \cap \mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner = \emptyset) \& \frac{1}{2}.|a \Delta b| \leq |\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner|))\ .$$

Мы построим последовательность р.п. множеств НЧ $\{A_l\}_l$ и последовательность отличных друг от друга НЧ $\{\varkappa_n\}_n$ такие, что

$$\forall l q(q \in A_l \equiv (l \in C_1 \& q = l \vee l \in C_2 \& (\mathcal{L}_\llcorner q_\lrcorner \mp (\partial_l(\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner) - 2.|\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner|) \Delta (\partial_n(\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner) + 2.|\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner|)) \vee \mathcal{L}_\llcorner q_\lrcorner \mp R_l)) \& \forall q(\exists l(q \in A_l) \equiv \exists n(q = \varkappa_n))\ .$$

Мы определим $\forall n(Q_n \rightleftharpoons \mathcal{L}_\llcorner \varkappa_{n\lrcorner})$ и согласно лемме 8 построим алгорифмический оператор G типа $\Pi_2 \longrightarrow K$ и неубывающую последовательность НЧ $\{p_{2,k}\}_k$, обладающие описанными там свойствами. Для завершения доказательства достаточно определить $\forall k(p_k \rightleftharpoons max(p_{1,k}, p_{2,k}))$.

<u>Лемма 10</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а τ НЧ. Пусть не может не существовать полигональная функция $\mathcal{G}$, для которой верно $\forall n(\sum_{i=1}^{2^n} |\Delta(\mathcal{F}-\mathcal{G}, \frac{i-1}{2^n} \Delta \frac{i}{2^n})| \leq \frac{1}{2^{2\tau+6}})$. Тогда существуют последовательность рациональных сегментов $\{Q_n\}_n$,

неинфинитное р.п. множество НЧ D, алгорифмический оператор G типа $\Pi_2 \longrightarrow K$ и неубывающая последовательность НЧ $\{p_k\}_k$, для которых верно

$$\forall k \left(\sum_{1 \leq m \leq k \,\&\, \neg(m \in D)} |Q_m| < \frac{1}{2^{\tau}} \right) \,\&\, \forall \xi \left(\xi \in \Pi \,\&\, \neg \exists k (\neg(k \in D) \,\&\, \&\, \xi \in Q_k) \supset \xi \in \Pi_2 \,\&\, \mathcal{D}(G(\xi), \mathcal{F}, \xi, \tau, \{p_k\}_k) \right).$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{\mathcal{G}_t\}_t$ последовательность полигональных функций такая, что если $\mathcal{G}$ полигональная функция, то $\exists t (\mathcal{G} = \mathcal{G}_t)$. Согласно лемме 9 мы для всякого НЧ t, исходя от τ, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}_t$, построим последовательность рациональных сегментов $\{Q_m^t\}_m$, неубывающую последовательность НЧ $\{p_k^t\}_k$ и оператор G_t, обладающие описанными там свойствами.

Существует неубывающая последовательность НЧ $\{q_m\}_m$ такая, что $\forall m \left(q_m = \mu t \left(\sum_{n=1}^{m} |Q_n^t| < \frac{1}{2^{\tau}} \right) \right)$. Тогда ввиду леммы 9 и наших предположений $\neg\neg \exists s \forall m (s \leq m \supset q_m = q_s)$.

Мы определим $p_0 \rightleftharpoons 1$ и построим последовательность рациональных сегментов $\{Q_n\}_n$, неубывающую последовательность НЧ $\{p_k\}_k$, оператор G типа $\Pi_2 \longrightarrow K$ и неинфинитное р.п. множество НЧ D, для которых для всякого НЧ n выполнено $(Q_n \mathbin{\Xi} Q^{q_n}_{n-\mu s(q_s = q_n)+1}) \,\&\, (p_n = max(p_{n-1}, p^{q_n}_n)) \,\&\, \forall \xi (\xi \in \Pi_2 \supset \supset \underline{G(\xi)}(n) = \underline{G_{q_n}(\xi)}(n)) \,\&\, (n \in D \equiv \exists s (q_n < q_s))$.

Методами, которыми мы пользовались в предыдущих доказательствах, можно доказать следующее утверждение.

<u>Теорема 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция. Тогда $\mathfrak{a}_{\kappa\lambda}(\mathcal{F})$ (см.[3]) в том и только том случае, если для всякого НЧ m не может не существовать полигональная функция $\mathcal{G}$, для которой верно

$$\forall m \left(\sum_{i=1}^{2^m} \left| \Delta \left(\mathcal{F} - \mathcal{G}, \frac{i-1}{2^m} \triangle \frac{i}{2^m} \right) \right| < \frac{1}{2^m} \right) .$$

На основании леммы 9 и следствия 2 теоремы 5 из [2] мы получаем:

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция и пусть существует последовательность функций $\{\mathcal{G}_m\}_m$ такая, что для всякого НЧ m – $\mathcal{G}_m$ не может не быть полигональной функцией и выполнено $\forall m \left(\sum_{i=1}^{2^m} \left| \Delta \left(\mathcal{F} - \mathcal{G}_m, \frac{i-1}{2^m} \triangle \frac{i}{2^m} \right) \right| < \frac{1}{2^m} \right)$. Тогда существуют последовательность последовательностей рациональных сегментов $\{\{R_k^m\}_k\}_m$ и последовательность неубывающих последовательностей НЧ $\{\{p_k^m\}_k\}_m$ такие, что

$$\forall m\, m \left(\sum_{k=1}^{m} |R_k^m| < \frac{1}{2^{m+1}} \right) \,\&\, \forall q\, \xi \,(\xi \in \Pi \,\&\, \forall m \,(q \leq m \supset$$
$$\supset \neg \exists k \,(\xi \in R_k^m)) \supset \xi \in \Pi_2 \,\&\, \exists \eta \,(\eta \in \Pi \,\&\, \forall m \,(q \leq m \supset$$
$$\supset \mathcal{D} (\eta, \mathcal{F}, \xi, m, \{p_k^m\}_k)))) .$$

Следовательно, $\forall \xi \,(\xi \in \Pi_2 \supset \neg\neg \exists \eta \,(\eta \in \Pi \,\&\, D_{\text{кл}} (\eta, \mathcal{F}, \xi)))$.

На основании лемм 4, 6, 7 и 10, теоремы 1 и следствия 2 теоремы 5 из [2] верно следующее утверждение.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, которая не может не быть функцией слабо ограниченной вариации (на $0 \triangle 1$). Тогда $\forall \xi \,(\xi \in \Pi_2 \supset D_{\text{кл}} (\mathcal{F}, \xi))$ и существуют последовательность последовательностей рациональных сегментов $\{\{R_k^m\}_k\}_m$, последовательность неинфинитных р.п. множеств НЧ $\{D_m\}_m$ и последовательность неубывающих последовательностей НЧ $\{\{p_k^m\}_k\}_m$ такие, что $\forall m\, m \left(\sum_{1 \leq k \leq m \,\&\, \neg (k \in D_m)} |R_k^m| < \frac{1}{2^{m+1}} \right) \,\&$

$$\& \,\forall q\, \xi \,(\xi \in \Pi \,\&\, \forall m \,(q \leq m \supset \neg \exists k \,(\neg (k \in D_m) \,\&\, \xi \in R_k^m)) \supset$$
$$\supset \xi \in \Pi_2 \,\&\, \exists \eta \,(\eta \in \Pi \,\&\, \forall m \,(q \leq m \supset \mathcal{D} (\eta, \mathcal{F}, \xi, m,$$
$$\{p_k^m\}_k)))) .$$

Следовательно, для почти всех псевдочисел ξ верно $\exists\eta\,(\eta\in\Pi\;\&\;D_{кл}(\eta,\mathcal{F},\xi))$.

<u>Пример 1</u>. Существуют последовательность последовательностей дизъюнктных рациональных сегментов, содержащихся в $0\vartriangle 1$, $-\{\{Q^m_k\}_k\}_m$, Π_2-число ξ_0 и возрастающая на $0\vartriangle 1$ функция $\mathcal{F}$ такие, что

1) для всякой последовательности неинфинитных р.п. множеств НЧ $\{D_m\}_m$ верно $\neg\neg\exists m k\,(\neg(k\in D_m)\;\&\;\xi_0\in Q^m_k)$ и

2) $\mathcal{A}_{кл}(\mathcal{F})\;\&\;\forall x\,\exists y\,D(y,\mathcal{F},x)\;\&\;\forall\xi\,(\xi\in\Pi_1\supset$

$\supset\exists\eta\,(\eta\in\Pi\;\&\;D_{кл}(\eta,\mathcal{F},\xi)))\;\&\;\forall\xi\,(\xi\in\Pi\supset D_{кл}(\mathcal{F},\xi))\;\&$

$\&\;\neg\exists\eta\,(\eta\in\Pi\;\&\;D_{кл}(\eta,\mathcal{F},\xi_0))$.

<u>Пример 2</u>. Существуют функции $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ такие, что

1) $\mathcal{A}(\mathcal{F}_1)$ (см. [3]), $\forall\xi\,(\xi\in\Pi_1\;\&\;\xi\in 0\vartriangle 1\supset$

$\supset\neg D_{кл}(\mathcal{F}_1,\xi))\;\&\;\forall\xi\,(\xi\in\Pi_2\supset\neg\neg\exists j\,D_{кл}(j,\mathcal{F}_1,\xi))$,

2) $\forall x y\,(|\mathcal{F}_2(y)-\mathcal{F}_2(x)|\leq|y-x|)\;\&\;\forall\xi\,(\xi\in\Pi\supset$

$\supset\neg\neg\exists\eta\,(\eta\in\Pi\;\&\;D_{кл}(\eta,\mathcal{F}_2,\xi)))\;\&\;\forall x\,\exists y\,D(y,\mathcal{F}_2,x)$ и

3) не существуют НЧ i, $1\leq i\leq 2$, и последовательность функций $\{\mathcal{G}_m\}_m$ такие, что для всякого НЧ m $-$ $\mathcal{G}_m$ не может не быть полигональной функцией и выполнено

$$\forall m\,\Big(\sum_{j=1}^{2^m}|\Delta(\mathcal{F}_i-\mathcal{G}_m,\tfrac{j-1}{2^m}\vartriangle\tfrac{j}{2^m})|<\tfrac{1}{2^m}\Big).$$

<u>Пример 3</u>. Пусть λ НЧ. Существует последовательность неотрицательных полигональных функций $\{\mathcal{F}_m\}_m$ такая, что

$\forall x\,\exists m\,\forall n y\,(m\leq n\;\&\;|y-x|<\frac{1}{2^m}\supset\mathcal{F}_n(y)=0)\;\&$

$\&\;\forall\xi\,(\xi\in\Pi\supset\neg\neg\exists m\,\forall n\,\eta\,(m\leq n\;\&\;\eta\in\Pi\;\&\;|\eta-\xi|<\frac{1}{2^m}\supset\mathcal{O}^{\cdot}_{\mathcal{F}_n}(\eta)=0))$

и вместе с тем не существуют последовательность последовательностей рациональных сегментов $\{\{R_k^m\}_k\}_m$, последовательность неинфинитных р.п. множеств НЧ $\{D_m\}_m$ и НЧ p такие, что

$$\forall m\, n \left(\sum_{1 \le k \le n \,\&\, \neg (k \in D_m)} |R_k^m| < \frac{1}{2^{n+m}} \right) \,\&\, \forall \xi (\xi \in \Pi_2 \,\&$$

$$\&\, \forall m \neg \exists k (\neg (k \in D_m) \,\&\, \xi \in R_k^m) \supset \forall l (p \le l \supset \sigma_{g_l}(\xi) < 1))$$

(ср. теорему Егорова [1], стр. 111).

Литература

[1] НАТАНСОН И.П.: Теория функций вещественной переменной, Москва, 1957.

[2] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment.Math. Univ.Carolinae 16(1975),315-331.

[3] ДЕМУТ О.: О суперпозициях абсолютно непрерывных конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 12(1971),423-451.

[4] ШИЛОВ Г.Е.: Математический анализ, Москва, 1960.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Sokolovská 83, 18600 Praha 8

Československo

(Oblatum 29.4. 1975)