Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Zdeněk Vančura

Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen Euklidischen Raum. II.

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 16 (1975), No. 3, 435--457

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105638`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

16,3 (1975)

DIFFERENTIALGEOMETRIE DER ZWEIDIMENSIONALEN KUGEL- UND LINIEN-MANNIGFALTIGKEITEN IM DREIDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM, II

Zdeněk VANČURA, Praha

Inhalt: Es handelt sich um die Fortsetzung des Artikels Z. Vančura: Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum I, Comment.Math.Univ.Carolinae 16(1975),219-243.

AMS: 53A40, 53A25 Ref. Ž.: 3.931.6

Satz 8. Es sei $\overset{h}{\mathcal{D}}$ bzw. $\overset{ch}{\mathcal{D}}$ die Indikatrix von Dupin der h-ten Brennfläche bzw. der charakteristischen Fläche der Kugelkongruenz im Punkt (u_1, u_2) . Dann gilt:

1. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\overset{h}{\mathcal{D}}$, $\overset{ch}{\mathcal{D}}$ ähnlich sind, ist in Parametern aus (9) entweder

α)

$$(\overset{h}{a}{}^{mn}\overset{h}{b}_{mn})^2 \overset{ch}{K} - (\det|\overset{h}{a}_{mn}|)^{-1}(\det|\overset{h}{b}_{mn}|)\overset{ch}{H}{}^2 = 0 , \tag{48}$$

$$(\det|\overset{h}{a}_{mn}|)^{-1}(\det|\overset{h}{b}_{mn}|)\overset{ch}{K} > 0 , \tag{49}$$

oder β)

$$\overset{ch}{K} = 0 , (\det|\overset{h}{a}_{mn}|)^{-1}(\det|\overset{h}{b}_{mn}|) = 0 , \tag{50}$$

wo $\overset{h}{a}_{mn}$, $\overset{h}{b}_{mn}$, $\overset{h}{a}{}^{mn}$ durch die zugehörigen Gleichungen aus [11] (Satz 1.11, 1.12), aus $\overset{h}{a}{}^{mn}\overset{h}{a}_{np} = \delta_p^m$, (10) und das Gauszsche Krümmungsmass $\overset{ch}{K}$ und die mittlere Krümmung $\overset{ch}{H}$ der charakteristischen Fläche durch die zugehörigen Gleichungen aus den Sätzen 3, 5 gegeben werden.

2. Es sei $\overset{h}{\mathcal{D}}$, $\overset{ch}{\mathcal{D}}$ ähnlich. Diese Ähnlichkeit besteht dann aus der Ähnlichkeitslage mit dem Ähnlichkeitspunkt (u_1, u_2) und mit dem Ahnlichkeitsmasstab $\overset{h}{\varkappa}$ und aus der Drehung mit dem Drehpunkt (u_1, u_2) und mit dem Drehwinkel $\overset{h}{\omega}$, für die gilt:

Im Fall 1 α) ist

$$(51) \qquad \overset{h}{\varkappa} = [(\det|\overset{h}{a}_{mn}|)^{-1} (\det|\overset{h}{b}_{mn}|)\, \overset{ch}{K}{}^{-1}]^{\frac{1}{4}} ,$$

im Fall 1 β) ist

$$(51') \qquad \overset{h}{\varkappa} = |(\overset{h}{a}{}^{mn} \overset{h}{b}_{mn})\, \overset{ch}{H}{}^{-1}|^{\frac{1}{2}} .$$

In den Fällen 1 α), β) ist

$$(52) \qquad \overset{h}{\omega} \equiv \arccos [(\overset{h}{a}_{kl} \overset{h}{v}{}^{k} \overset{h}{v}{}^{l})(\overset{h}{a}{}^{mn} \overset{h}{w}_{m} \overset{h}{w}_{n})]^{-\frac{1}{2}} \overset{h}{v}{}^{n} \overset{h}{w}_{n} \bmod \frac{\pi}{2} ,$$

wo bei $\overset{h}{m}_{ij} = \overset{h}{\beta}(\det|\overset{h}{a}_{kl}|)^{-1}(\overset{h}{a}_{1i} \overset{h}{b}_{2j} - \overset{h}{a}_{2i} \overset{h}{b}_{1j}),\ \overset{h}{m}_{jj} \neq 0$

$$(53) \qquad \overset{h}{v}{}^{n} = \overset{ss}{T}{}^{-1}_{jj}\, \overset{ss}{T}{}^{-\frac{1}{2}}_{j+(-1)^{j+1}\, j+(-1)^{j}+1} \cdot$$
$$[\delta^{n}_{j}\{-(\overset{h}{m}_{12} + \overset{h}{m}_{21}) + \overset{h}{\mu}[(\overset{h}{m}_{12} + \overset{h}{m}_{21})^2 - 4\overset{h}{m}_{11}\overset{h}{m}_{22}]^{\frac{1}{2}}\} + 2\delta^{n}_{j+(-1)^{j}+1} \overset{h}{m}_{jj}],\ \overset{h}{\mu} = \pm 1,$$

bei $\overset{h}{m}_{11} = \overset{h}{m}_{22} = 0,\ \overset{h}{m}_{12} + \overset{h}{m}_{21} \neq 0$

$$(54) \qquad \overset{h}{v}{}^{n} = \delta^{n}_{j}\, \overset{ss}{T}{}^{-\frac{1}{2}}_{jj} \qquad j = 1 \text{ oder } 2 ,$$

bei $\overset{h}{m}_{11} = \overset{h}{m}_{22} = \overset{h}{m}_{12} + \overset{h}{m}_{21} = 0$ $\overset{h}{v}{}^{n}\, [(\overset{h}{v}{}^{1}, \overset{h}{v}{}^{2}) \neq (0, 0)]$

ein beliebiger kontravarianter Vektor ist, dabei im Fall aus dem Satz 3

$$(55)\qquad \overset{h}{w}_n = \sum_{j=1}^{3} \overset{h}{f}_{nj}\,\overset{h}{t}_j \;,$$

$$\overset{h}{t}_j = (-1)^h r_j \overset{ss}{T}_{jj}^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \delta_k^k \overset{ss}{T}_{kk}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}, \; j = 1, 2 ; \; \overset{h}{t}_3 = \delta_k^k r_k^2 \overset{ss}{T}_{kk}^{-1} \;,$$

im Fall aus dem Satz 5

$$\overset{h}{w}_n = \sum_{j=1}^{2} \overset{h}{f}_{nj}\,\overset{h}{t}_{j\atop i+(-1)^{i+1}} \;,$$

$$(56)\qquad \overset{h}{t}_{j\atop i+(-1)^{i+1}} = (-1)^{i+(-1)^{i+1}} (-1)^h \delta_i^{j+(-1)^{j+1}}, \quad j = 1, 2$$

ist, wo $\overset{h}{f}_{nj}$ durch die Gleichungen (16), (17) gegeben werden.

<u>Beweis</u>. Aus den Gleichungen der Indikatrix von Dupin ([6], Satz (4,4), S. 292), aus der Definition der Ähnlichkeit und aus der analytischen Beschreibung der Ähnlichkeitslage beweist man, wenn $\overset{h}{K}$ [$\overset{h}{H}$] bzw. $\overset{ch}{K}$ [$\overset{ch}{H}$] das Gauszsche Krümmungsmass [die mittlere Krümmung] der h-ten Brennfläche bzw. der charakteristischen Fläche der Kugelkongruenz bezeichnen, dass im Punkt (u_1, u_2) gilt:

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\overset{h}{\mathcal{D}}$, $\overset{ch}{\mathcal{D}}$ ähnlich sind (mit dem Ähnlichkeitsmassstab $\overset{h}{\varkappa}$), ist

$$\overset{ch}{H} = \pm \frac{1}{\overset{h}{\varkappa}{}^2} \overset{h}{H} \;, \quad \overset{ch}{K} = \frac{1}{\overset{h}{\varkappa}{}^4} \overset{h}{K} \;,$$

was äquivalent entweder mit

$$\overset{h}{H}{}^2 \overset{ch}{K} - \overset{h}{K} \overset{ch}{H}{}^2 = 0 \;, \quad \overset{h}{K} \overset{ch}{K} > 0 \;,$$

oder mit

$$\overset{ch}{K} = 0 , \quad \overset{h}{K} = 0$$

ist.

Daraus, unter Anwendung von dem ersten und dem zweiten Grundtensoren der h-ten Brennfläche und von Sätzen 3, 5 bekommt man Behauptung 1 des Satzes 8.

Der erste Teil der Behauptung 2 des Satzes 8, der $\overset{h}{\varkappa}$ behandelt, folgt aus Definition der Ähnlichkeit und aus vorhergehenden ($\overset{h}{\varkappa}$ enthaltenden) Gleichungen.

Durch zweckmässig ausgedrückte Lösung der Differentialgleichung von Hauptlinien $\delta_i^i \delta_j^j \overset{h}{m}_{ij}\, d\overset{h}{u}_i\, d\overset{h}{u}_j = 0$ der h-ten Brennfläche bekommt man in $d\overset{h}{u}_n = \overset{h}{v}^n$ aus (53), bzw. (54), bzw. in einem beliebigen (von Nullvektor verschieden) kontravarianten Vektor die die Hauptrichtungen der h-ten Brennfläche angebenden kontravarianten Vektoren.

Unter Anwendung von [10] (Satz II, Gleichung (2), Beweis des Satzes I) beweist man, dass im Koordinatensystem $\langle S;\, s_1, s_2, \alpha \rangle$ und in Parametern aus (9) durch $\overset{h}{t}_j\, [\, \overset{h}{t}_{j\; i+(-1)^{i+1}} \,]$ aus (55) [(56); $\overset{h}{t}_{3\; i+(-1)^{i+1}} = 0$]die j-te Koordinate des Tangentenvektors der Hauptlinie (Hauptkreislinie) $\varkappa\, [\, \varkappa_{i+(-1)^{i+1}} \,]$ im Punkt (u_1, u_2) der charakteristischen Fläche aus dem Beweis des Satzes 3 [5] angegeben wird. Von hier aus und daraus, dass die n-te Koordinate des kovarianten Tangentenvektors der Kurve $\varkappa\, [\, \varkappa_{i+(-1)^{i+1}} \,]$ dem Skalarprodukt des obenerwähnten Tangentenvektors der Kurve $\varkappa\, [\, \varkappa_{i+(-1)^{i+1}} \,]$ mit dem Vektor $\overset{h}{f}_n$ (mit Koordinaten (16), (17)) gleich ist, folgt, dass der kovariante Vektor $\overset{h}{w}_n$ aus (55) [(56)] die Hauptriehtung im Punkt (u_1, u_2) der charakteristischen Fläche aus dem Satz 3 [5] angibt.

Aus den vorhergehenden Feststellungen, der Formel für Kosinus des Winkels von zwei Vektoren, und auch daraus, dass die Hauptrichtungen aufeinander senkrecht stehen, aus der

Unabhängigkeit des Ausdrucks auf der rechten Seite in (52) vom kartesischen Koordinatensystem und aus der Unabhängigkeit der Tensoren $\overset{ss}{T}_{ij}, \overset{ss}{T}_{ij}$ von Bewegungen, die ein kartesisches Hilfskoordinatensystem $\langle S; s_1, s_2, d \rangle$ in das fest erwählte kartesische Koordinatensystem Oxyz überführen, folgt derjenige Teil der Behauptung 2 des Satzes 8, der den Winkel $\overset{h}{\omega}$ behandelt.

<u>Satz 9</u>. Es sei $\overset{h}{\underset{\alpha}{\mathcal{D}}}$ bzw. $\overset{ch}{\underset{\alpha}{\mathcal{D}}}$ die Indikatrix von Dupin der h-ten Brennfläche bzw. der charakteristischen Fläche der adjungierten, hyperbolischen Linienkongruenz im Punkt (u_1, u_2) . Dann gilt:

1. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\overset{h}{\underset{\alpha}{\mathcal{D}}}, \overset{ch}{\underset{\alpha}{\mathcal{D}}}$ ähnlich sind, ist in Parametern aus (9)

$$(57) \qquad (\det|\overset{h}{\underset{\alpha}{a}}_{mn}|)^{-1}(\det|\overset{h}{\underset{\alpha}{b}}_{mn}|) = 0 \ ,$$

wo $\overset{h}{\underset{\alpha}{a}}_{mn}, \overset{h}{\underset{\alpha}{b}}_{mn}$ durch die zugehörigen Gleichungen aus [11] (Satz 5.14, 5.15, 1.10) und durch (10) gegeben werden.

2. Es sei $\overset{h}{\underset{\alpha}{\mathcal{D}}}, \overset{ch}{\underset{\alpha}{\mathcal{D}}}$ ähnlich. Diese Ähnlichkeit besteht dann aus der Ähnlichkeitslage mit dem Ähnlichkeitspunkt (u_1, u_2) und mit dem Ähnlichkeitsmassstab $\overset{h}{\underset{\alpha}{\varkappa}}$ und aus der Drehung mit dem Drehpunkt (u_1, u_2) und mit dem Drehwinkel $\overset{h}{\underset{\alpha}{\omega}}$, für die

$$(58) \qquad \overset{h}{\underset{\alpha}{\varkappa}} = |(\overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}^{mn} \overset{h}{\underset{\alpha}{b}}_{mn}) \overset{ch}{\underset{\alpha}{H}}{}^{-1}|^{\frac{1}{2}} \ ,$$

$$(59) \quad \overset{h}{\underset{\alpha}{\omega}} \equiv \arccos[(\overset{h}{\underset{\alpha}{a}}_{k,l} \overset{h}{\underset{\alpha}{v}}{}^{k} \overset{h}{\underset{\alpha}{v}}{}^{l})(\overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}^{mn} \overset{h}{\underset{\alpha}{\bar{w}}}_{m} \overset{h}{\underset{\alpha}{\bar{w}}}_{n})]^{-\frac{1}{2}} \overset{h}{\underset{\alpha}{v}}{}^{n} \overset{h}{\underset{\alpha}{\bar{w}}}_{n} \mod \frac{\pi}{2}$$

.

gilt, wo die mittlere Krümmung $\overset{ch}{\underset{\alpha}{H}}$ der charakteristischen Fläche durch die zugehörige Gleichung aus dem Satz 7 gegeben wird, und bei $\overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{ij} = \overset{h}{\underset{\alpha}{\Pi}} \cdot (\det|\overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}_{kl}|)^{-1} (\overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}_{1i} \overset{h}{\underset{\alpha}{b}}{}_{2j} - \overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}_{2i} \overset{h}{\underset{\alpha}{b}}{}_{1j})$, $\overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{\dot{j}\dot{j}} \neq 0$

$$(60) \quad \overset{h}{\underset{\alpha}{v}}{}^{n} = \overset{ss}{T}{}^{-1}_{\dot{j}\dot{j}} \; \overset{ss}{T}{}^{-\frac{1}{2}}_{\dot{j}+(-1)^{\dot{j}+1}\,\dot{j}+(-1)^{\dot{j}+1}} \cdot$$

$$[\delta^{n}_{\dot{j}} \{-(\overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{12} + \overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{21}) + \overset{h}{\underset{\alpha}{\mu}} [(\overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{12} + \overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{21})^2 - 4 \overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{11} \overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{22}]^{\frac{1}{2}}\} + 2\delta^{n}_{\dot{j}+(-1)^{\dot{j}+1}} \overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{\dot{j}\dot{j}}],$$

$$\overset{h}{\underset{\alpha}{\mu}} = \pm 1,$$

bei $\overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{11} = \overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{22} = 0$, $\overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{12} + \overset{h}{\underset{\alpha}{m}}{}_{21} \neq 0$

$$(61) \qquad \overset{h}{\underset{\alpha}{v}}{}^{n} = \delta^{n}_{j} \, \overset{ss}{T}{}^{-\frac{1}{2}}_{jj}, \qquad j = 1 \text{ oder } 2$$

und

$$(62) \qquad \overset{h}{\underset{\alpha}{\bar{w}}}{}_{n} = r\, r_n \overset{ds}{T}_{nn} \overset{ss}{T}{}^{-1}_{nn} + \overset{h}{\underset{\alpha}{w}}{}_{n}$$

ist.

<u>Beweis</u> der Behauptungen 1,2 des Satzes 9 ist dem Beweis der Behauptungen 1,2 des Satzes 8 analog. Dabei freilich, da eine charakteristische, eine Gerade (u_1, u_2) enthaltende, Fläche abwickelbar ist, stellt d den Tangentenvektor der Krümmungslinie der charakteristischen Fläche aus dem Satz 7 dar, und also stellt $\overset{h}{\underset{\alpha}{w}}{}_{m} = d \cdot \overset{h}{\underset{\alpha}{g}}{}_{m}$, wo im kartesischen Koordinatensystem $\langle S; s_1, s_2, d \rangle$ und in Parametern aus (9) $d = (0,0,1)$ und $\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}{}_{m}$ aus (37) ist, den kovarianten Vektor in der Hauptrichtung der charakteristischen Fläche im Punkt (u_1, u_2) dar.

Weiter werden wir immer bei den Kugelkongruenzen ein solches Gebiet betrachten, in dem gilt: Die Kugel der Kugelkongruenz hat mit der Berührungskurve (wenigstens einer von zugehörigen charakteristischen Flächen auf der h-ten Brennfläche der Kugelkongruenz) keine 3 Punkt-Berührung. Von adjungierten Linienkongruenzen betrachten wir immer hyperbolische Linienkongruenzen.

Dann werden wir unter die <u>h-te Charakteristik der Kugel</u> [<u>adjungierten Linien</u>] - <u>Kongruenz</u> (im betrachteten Gebiet) eine solche Menge von Punkten der h-ten Brennfläche verstehen, in denen die Indikatrices von Dupin $\overset{h}{\mathcal{D}}, \overset{ch}{\mathcal{D}}$ [$\underset{\alpha}{\overset{h}{\mathcal{D}}}, \underset{\alpha}{\overset{ch}{\mathcal{D}}}$] mit Rücksicht wenigstens auf eine charakteristische Fläche, deren Kugeln mit der Berührungskurve der charakteristischen Fläche auf der h-ten Brennfläche der Kongruenz keine 3 Punkt-Berührung haben [mit Rücksicht wenigstens auf eine charakteristische Fläche] ähnlich sind.

<u>Satz 10</u>. Die h-te Charakteristik der von Kugeln mit nichtkonstantem Halbmesser gebildeten Kugelkongruenz hat im Gebiet

(63) $$\overset{ch}{K} \det|\overset{h}{b}_{mn}| > 0$$

die Gleichung

(64) $$(\overset{h}{a}{}^{mn}\overset{h}{b}_{mn})^2\overset{ch}{K} - (\det|\overset{h}{a}_{mn}|)^{-1}(\det|\overset{h}{b}_{mn}|)\overset{ch}{H}{}^2 = 0 ,$$

im Gebiet

(65) $$\det|\overset{h}{b}_{mn}| = 0$$

die Gleichung

(66) $$\overset{ch}{K} = 0 .$$

<u>Beweis</u>. Unter Anwendung von Behauptung vor dem Satz 2, von [10] (Gleichung (5), S. 319) und von Theorie der Hüllfläche einer einparametrigen Schar von Flächen beweist man, dass

Parameterdarstellung der charakteristischen die Kugel $\varkappa(u_1, u_2) = c$ (c = konst) enthaltenden Fläche im zweckmässig erwählten kartesischen Koordinatensystem $Oxyz$ in der Form

$$x = \overset{h}{\tau}(\overset{h}{\tau}x), \quad y = y, \quad z = z(\overset{h}{\tau}x, y, c), \quad \overset{h}{\tau} = \pm 1$$

betrachtet werden kann. Wenn wir in den Einheitsvektor der Flächennormalen dieser charakteristischen Fläche für x, y zugehörige Funktionen von Parametern u_1, u_2 aus der Parameterdarstellung der h-ten Brennfläche der Kugelkongruenz und für c aus der Gleichung $\varkappa(u_1, u_2) = c$ ansetzen, können wir immer $\overset{h}{\tau}$ so wählen, dass die Einheitsvektoren der Flächennormalen dieser charakteristischen Flächen und der h-ten Brennfläche in einer gewissen Umgebung des Punktes (u_1, u_2) identisch sind.

Für $\overset{h}{\bar{E}}$ in Gleichungen (18), (19) bekommt man mit Rücksicht auf [6] (Gleichung (1,8c), S. 298), auf den Beweis des Satzes 2 und auf die Gleichung (13)

$$\overset{h}{\bar{E}} = (\overset{ch}{m}_{ij}\overset{h}{v}^{i}\overset{h}{v}^{j} - {*}\overset{h}{E}\overset{h}{k}_2)(\omega')^{-1} ,$$

wo $\overset{h}{\omega}{}' = (\arccos \overset{h}{\beta}\,\overset{h}{b}\,\overset{h}{k}{}_1^{-1})_i \overset{h}{d}{}^i$, Tensor $\overset{ch}{m}_{ij}$ auf der oben ausgedrückten charakteristischen Fläche gleich wie Tensor $\overset{h}{m}_{ij}$ auf der h-ten Brennfläche (sieh Satz 8) und $\overset{h}{v}{}^1$, $\overset{h}{v}{}^2$ durch Gleichungen

$$\overset{h}{v}{}^1 = (\overset{h}{\tau}x)_i \overset{h}{d}{}^i, \quad \overset{h}{v}{}^2 = y_i \overset{h}{d}{}^i$$

gegeben werden. (Dabei ist notwendig in $\overset{ch}{m}_{ij}$ und vor Berechnung in $\overset{h}{v}{}^1$, $\overset{h}{v}{}^2$ für x, y zugehörige Funktionen von u_1, u_2 aus Parameterdarstellung der h-ten Brennfläche anzusetzen.) Daraus folgt, dass in einer gewissen Umgebung des Punktes (u_1,u_2) der h-ten Brennfläche entweder stets $\overset{h}{\varepsilon} = \pm 1$, oder stets $\overset{h}{\varepsilon} = -1$ gilt.

Aus vorhergehenden Ergebnissen, aus der Definition der h-ten Charakteristik der Kugelkongruenz, aus den Sätzen 2,3 und aus der Behauptung 1 des Satzes 8 folgt die Behauptung des Satzes 10.

<u>Satz 11</u>. Die h-te Charakteristik der von Kugeln mit konstantem Halbmesser gebildeten Kugelkongruenz hat

1) im Fall $\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1} - \overset{h}{a}{}^{-1}_{ii}\,\overset{h}{b}_{ii} \neq 0,\ \overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1} - \overset{h}{a}{}^{-1}_{i+(-1)^{i+1}\,i+(-1)^{i+1}} \cdot$

$\overset{h}{b}_{i+(-1)^{i+1}\,i+(-1)^{i+1}} = 0$ im Gebiet

$$\overset{ch}{K}_{i+(-1)^{i+1}} \det|\overset{h}{b}_{mn}| > 0 \tag{67}$$

die Gleichung

$$(\overset{h}{a}{}^{mn}\overset{h}{b}_{mn})^2\,\overset{ch}{K}_{i+(-1)^{i+1}} - (\det|\overset{h}{a}_{mn}|)^{-1}(\det|\overset{h}{b}_{mn}|)\,\overset{ch}{H}{}^{2}_{i+(-1)^{i+1}} = 0, \tag{68}$$

im Gebiet

$$\det|\overset{h}{b}_{mn}| = 0 \tag{69}$$

die Gleichung

$$\overset{ch}{K}_{i+(-1)^{i+1}} = 0\ ; \tag{70}$$

2) im Fall $\prod_{i=1}^{2} \overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1} - \overset{h}{a}{}^{-1}_{ii}\,\overset{h}{b}_{ii} \neq 0$ im Gebiet, in dem (67) für eine einzige Zahl i (von Zahlen 1,2) gilt, die Gleichung (68);

3) im Fall $\prod_{i=1}^{2}\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}x^{-1} - \overset{h}{a}_{ii}^{-1}\,\overset{h}{b}_{ii} \neq 0$ im Gebiet, in dem (67) für $i = 1, 2$ gilt, die Gleichung

$$(71)\quad \prod_{i=1}^{2}\left[(\overset{h}{a}^{mn}\overset{h}{b}_{mn})^2\,\overset{ch}{K}_{i+(-1)^{i+1}} - (\det|\overset{h}{a}_{mn}|)^{-1}(\det|\overset{h}{b}_{mn}|)^{-1}\,\overset{ch}{H}^{2}_{i+(-1)^{i+1}}\right] = 0,$$

im Gebiet (69) die Gleichung

$$(72)\qquad \prod_{i=1}^{2}\overset{ch}{K}_{i+(-1)^{i+1}} = 0 .$$

<u>Beweis</u> des Satzes 11 ist, unter Anwendung von Sätzen 4,5, dem Beweis des Satzes 10 analog.

<u>Satz 12</u>. Die h-te Charakteristik der adjungierten Linienkongruenz hat die Gleichung

$$(73)\qquad (\det|\overset{h}{a}_{\alpha mn}|)^{-1}(\det|\overset{h}{b}_{\alpha mn}|) = 0 .$$

<u>Beweis</u> folgt aus der Definition der h-ten Charakteristik der adjungierten Linienkongruenz und aus der Behauptung 1 des Satzes 9.

<u>Satz 13</u>. Für die h-te Charakteristik

$$(74)\qquad \overset{h}{\chi} = 0$$

der Kugelkongruenz bzw. der adjungierten Linienkongruenz, wo $\overset{h}{\chi}$ die linke Seite der zugehörigen Gleichung aus den Gleichungen (64), (66), (68), (70), (71), (72) bzw. (73) ist, gilt:

1. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die h-te Charakteristik (74) in einer gewissen Umgebung des Punktes (u_1,u_2) eine Fläche bildet, ist die identische Erfüllung der Gleichung (74) in dieser Umgebung. Wird die h-te Charakteristik (74) durch eine Fläche gebildet, dann ist die-

se Fläche mit der h-ten Brennfläche der Kugelkongruenz bzw. der adjungierten Linienkongruenz identisch.

2. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die h-te Charakteristik (74) in einer gewissen Umgebung des Punktes (u_1, u_2) eine Kurve bildet, ist bei $\overset{h}{\chi}_i = \dfrac{\partial \overset{h}{\chi}}{\partial u_i}$ $(i = 1, 2)$

$$(75) \qquad \overset{h}{\chi}(u_1, u_2) = 0, \quad (\overset{h}{\chi}_1(u_1, u_2), \overset{h}{\chi}_2(u_1, u_2)) \neq (0, 0) .$$

Ist die h-te Charakteristik (74) eine Kurve, dann liegt diese Kurve auf der h-ten Brennfläche $\overset{h}{f}$ bzw. $\underset{\alpha}{\overset{h}{g}}$ der Kugelkongruenz bzw. der adjungierten Linienkongruenz und für ihren Tangentenvektor $\overset{h}{ch} = \overset{h}{ch}{}^i \overset{h}{f}_i$ bzw. $\underset{\alpha}{\overset{h}{ch}} = \underset{\alpha}{\overset{h}{ch}}{}^i \underset{\alpha}{\overset{h}{g}}_i$ gilt in Parametern aus (9), bei $\overset{h}{\chi}_2 > 0$

$$(76) \qquad \overset{h}{ch}{}^i = (-1)^{i+1} \overset{h}{\chi}_1 \overset{h}{\chi}_2 \overset{h}{\chi}{}^{-1}_j \delta^{ij} \cdot$$
$$[(-1)^{m+n} \overset{h}{\chi}_{m+(-1)^{m+1}} \overset{h}{\chi}_{n+(-1)^{n+1}} \overset{h}{a}_{mn}]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\overset{h}{\chi}_1 \overset{h}{\chi}{}^{-1}_1 \equiv 1)$$

bzw.

$$(77) \qquad \underset{\alpha}{\overset{h}{ch}}{}^i = (-1)^{i+1} \overset{h}{\chi}_1 \overset{h}{\chi}_2 \overset{h}{\chi}{}^{-1}_j \delta^{ij} \cdot$$
$$[(-1)^{m+n} \overset{h}{\chi}_{m+(-1)^{m+1}} \overset{h}{\chi}_{n+(-1)^{n+1}} \underset{\alpha}{\overset{h}{a}}_{mn}]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\overset{h}{\chi}_1 \overset{h}{\chi}{}^{-1}_1 \equiv 1) .$$

<u>Beweis</u> folgt aus der Definition der h-ten Charakteristik der Kugelkongruenz bzw. der adjungierten Linienkongruenz, aus den Sätzen 10,11 bzw. 12, daraus, dass $\overset{h}{\chi}$ Skalar ist und aus [6] (Satz (4,4), S. 81). Dabei ist es möglich, die Gleichung (76) bzw. (77) analogisch wie die Gleichung (13) zu beweisen.

<u>Satz 14</u>. 1. Es sei die h-te Charakteristik (74) der Kugelkongruenz eine Kurve mit Krümmung $\overset{h}{\underset{\chi}{k}}_1$ und Windung $\overset{h}{\underset{\chi}{k}}_2$. Dann gilt in Parametern aus (9) bei $\overset{h}{\chi}_2 > 0$ für $\overset{h}{\underset{\chi}{k}}_1$ [$\overset{h}{\underset{\chi}{k}}_2$] die Gleichung, welche man aus der Gleichung (11) [(12)] bekommt, wenn man darin statt $\overset{h}{k}_1$ [$\overset{h}{k}_2$] $\overset{h}{\underset{\chi}{k}}_1$ [$\overset{h}{\underset{\chi}{k}}_2$] und statt $\overset{h}{d}{}^i$ $\overset{h}{c}{}^i$ aus (76) schreibt.

2. Es sei die h-te Charakteristik (74) der adjungierten Linienkongruenz eine Kurve mit Krümmung $\overset{h}{\underset{\underset{\alpha}{\chi}}{k}}_1$ und Windung $\overset{h}{\underset{\underset{\alpha}{\chi}}{k}}_2$. Dann gilt in Parametern aus (9) bei $\overset{h}{\chi}_2 > 0$ für $\overset{h}{\underset{\underset{\alpha}{\chi}}{k}}_1$ [$\overset{h}{\underset{\underset{\alpha}{\chi}}{k}}_2$] die Gleichung, welche man aus der Gleichung (31) [(32)] bekommt, wenn mann darin statt $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{k}}_1$ [$\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{k}}_2$] $\overset{h}{\underset{\underset{\alpha}{\chi}}{k}}_1$ [$\overset{h}{\underset{\underset{\alpha}{\chi}}{k}}_2$] und statt $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{d}}{}^i$ $\overset{h}{\underset{\alpha}{c}}{}^i$ aus (77) schreibt.

<u>Beweis</u>. Behauptung 1 des Satzes 14 folgt aus Behauptung 2 des Satzes 2 und aus ihrem Beweis und aus dem Teil der Behauptung 2 des Satzes 13, der die Gleichung (76) betrifft,und aus seinem Beweis.

Behauptung 2 des Satzes 14 folgt aus Behauptung 1 des Satzes 6 und aus ihrem Beweis und aus dem Teil der Behauptung 2 des Satzes 13, der die Gleichung (77) betrifft, und aus seinem Beweis.

<u>Satz 15</u>. Metrische Differentialgeometrie der Charakteristiken von Kugel- und adjungierten Linienkongruenzen kann man in Parametern aus (9) mittels des Skalars $\varkappa$ und der Tensoren $\overset{ss}{T}_{ij}$, $\overset{ds}{T}_{\varphi_3\varphi_4 ij} = \overset{ds}{T}_{ij}$ aus (8) untersuchen.

Beweis folgt aus den Sätzen 13,14, aus [11](Sätzen II, III, V, VI, 1.10), aus der Beschreibung von unabhängigen Invarianten einer Kurve im E_3 und aus den Betrachtungen, welche die Gleichungen (7) bis (10) enthalten.

Satz 16. Differentialgeometrie der Kugelkongruenzen, ihrer Untermannigfaltigkeiten und der adjungierten Linienmannigfaltigkeiten im E_3 kann man in durch die Sätze 1 bis 15 charakterisierten Richtungen und Formen in hier $^*u_1, {}^*u_2, {}^*u_3, {}^*u_4$ bezeichneten Parametern aus (9), mittels des Skalars $^*\varkappa = (\varkappa)_{(u_k = {}^*u_k)}$ und der Tensoren

$$^*\overset{\wedge\wedge}{T}_{ij} = (\overset{\wedge\wedge}{T}_{ij})_{(u_k = {}^*u_k)}, \quad ^*\overset{d\wedge}{T}_{ij} = {}^*\underset{\varphi_3\varphi_4}{\overset{d\wedge}{T}}{}_{ij} = (\overset{d\wedge}{T}_{ij})_{(u_k = {}^*u_k)}$$

(k = 1, 2, 3, 4) aus (8) untersuchen.

Beweis folgt aus den Sätzen 1 bis 15 und aus den Betrachtungen, welche die Gleichungen (7) bis (10) enthalten.

Konzeption, Inhalt und Methoden der zweiten Phase können durch den Satz 17 und durch seinen Beweis charakterisiert werden.

Satz 17. Es sei

$$(78)\quad \varphi_k(u_1, u_2, u_3, u_4) = c_k, \ \det\left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j}\right| \neq 0, \ c_k = \mathit{konst}, \ (k, j = 3, 4)$$

eine beliebige Kugelkongruenz $\overset{2}{p} = \overset{2}{p}(u_1, u_2)$ im Kugelraum $\overset{4}{p} = \overset{4}{p}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, deren Mittelpunktfläche von Kugelfläche und Ebene verschieden ist, und Symbol ($\varphi_3 = c_3$, $\varphi_4 = c_4$) bezeichne Substitutionen $u_3 = u_3(u_1, u_2)$, $u_4 = u_4(u_1, u_2)$, wo $u_3(u_1, u_2)$, $u_4(u_1, u_2)$ implizite, durch die Gleichungen (78) definierte, Funktionen sind.

Es sei $\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{i}_{j}$ die mit $(-1)^{j+i}$ multiplizierte dem in der j-ten Reihe und i-ten Spalte der Determinante

$$(79)\qquad \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}} = \det\left|\delta_\ell^1, \delta_\ell^2, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_\ell}, \frac{\partial\varphi_4}{\partial u_\ell}\right|, \quad \ell = 1,2,3,4$$

stehenden Element zugehörige Subdeterminante und $\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{A}}{}_{11}, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{A}}{}_{22}$ $(\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{A}}{}_{22} \neq 0)$, $\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{B}}$ die durch die Gleichungen

$$(80)\qquad \begin{aligned} \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{A}}{}_{ii} &= \overset{ss}{T}_{k\ell}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\overset{ds}{T}}{}_{mn}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{\ell}_{i}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{n}_{i} \big(\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{k}_{1}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{m}_{2} - \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{k}_{2}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{m}_{1}\big), \quad i = 1,2, \\ \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{B}} &= \overset{ss}{T}_{k\ell}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\overset{ds}{T}}{}_{mn} \big(\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{\ell}_{1}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{n}_{2} + \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{\ell}_{2}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{n}_{1}\big)\big(\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{k}_{1}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{m}_{2} - \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{k}_{2}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{m}_{1}\big) \end{aligned}$$

definierten Funktionen.

Es sei $\underset{\varphi_3\varphi_4}{\overset{\varphi_1\varphi_2}{\mathcal{D}}}{}^{i}_{j}$ die mit $(-1)^{j+i}$ multiplizierte dem in der j-ten Reihe und i-ten Spalte der Determinante

$$(81)\qquad \underset{\varphi_3\varphi_4}{\overset{\varphi_1\varphi_2}{\mathcal{D}}} = \det\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_\ell}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_\ell}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_\ell}, \frac{\partial\varphi_4}{\partial u_\ell}\right|, \quad \ell = 1,2,3,4$$

stehenden Element zugehörige Subdeterminante, wobei $\varphi_1(u_1, u_2)$, $\varphi_2(u_1, u_2)$ die (bei $(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2) \in \overset{2}{\Omega}$) durch die Gleichungen

$$(82)\qquad \begin{aligned} \varphi_i &= \int_{\overset{\circ}{u}_1}^{u_1} \Big(u_i \big(\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{-4} \{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{B}} \pm (-1)^i [\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{B}}{}^2 - 4\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{A}}{}_{11}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{A}}{}_{22}]^{\frac{1}{2}}\}\big)_{(\varphi_3 = c_3,\, \varphi_4 = c_4)} du_1 + \\ &\quad + 2\int_{\overset{\circ}{u}_2}^{u_2} \Big(u_i \big(\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{-4}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{A}}{}_{22}\big)_{(\varphi_3 = c_3,\, \varphi_4 = c_4)}\Big)_{(u_1 = \overset{\circ}{u}_1)} du_2\,, \\ &\qquad i = 1,2\,, \end{aligned}$$

$$2\left(\overset{}{\mathcal{D}}^{-4}_{\varphi_3\varphi_4}\,\mathcal{A}_{\varphi_3\varphi_4 22}\right)_{(\varphi_3=c_3,\varphi_4=c_4)}\frac{\partial\mu_i}{\partial u_1}-\left(\mathcal{D}^{-4}_{\varphi_3\varphi_4}\left\{\mathcal{B}_{\varphi_3\varphi_4}\pm(-1)^i\cdot\right.\right.$$

(83) $$\left.\left.\left[\mathcal{B}^2_{\varphi_3\varphi_4}-4\,\mathcal{A}_{\varphi_3\varphi_4 11}\,\mathcal{A}_{\varphi_3\varphi_4 22}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\right)_{(\varphi_3=c_3,\varphi_4=c_4)}\frac{\partial\mu_i}{\partial u_2}=\left\{\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\mathcal{D}^{-4}_{\varphi_3\varphi_4}\left\{\mathcal{B}_{\varphi_3\varphi_4}\pm\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\pm(-1)^i\left[\mathcal{B}^2_{\varphi_3\varphi_4}-\mathcal{A}_{\varphi_3\varphi_4 11}\,\mathcal{A}_{\varphi_3\varphi_4 22}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\right)_{(\varphi_3=c_3,\varphi_4=c_4)}-2\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\mathcal{D}^{-4}_{\varphi_3\varphi_4}\mathcal{A}_{\varphi_3\varphi_4 22}\right)_{(\varphi_3=c_3,\varphi_4=c_4)}\Big\}\mu_i,\ i=1,2$$

definierten Funktionen sind.

Dann gilt für Parameter $^*u_m$ $(m=1,2,3,4)$, Skalar $^*\varkappa$ und Tensoren $^*\overset{ss}{T}_{ij}$, $^*\overset{ds}{T}_{ij}$ aus dem Satz 16, in beliebigen Parametern u_m $(m=1,2,3,4)$ auf dem Kugelraum, speziell in Parametern u_1,u_2 (nach durch Symbol $(\varphi_3=c_3,\varphi_4=c_4)$ repräsentierten Substitutionen) auf der Kugelkongruenz (78):

(84) $$\frac{\partial u_i}{\partial {}^*u_j}=\overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{-1}\ \overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{i}_{j}\ ,\quad \frac{\partial {}^*u_i}{\partial u_j}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}\ ,$$

$$^*\varkappa=\varkappa\ ,\quad {}^*\varkappa_i=\overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{-1}\ \overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{k}_{i}\,\varkappa_k\ ,$$

(85)

$$^*\varkappa_{ij}=\overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{-1}\ \overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{l}_{j}\left(\overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{-1}\ \overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{k}_{i}\,\varkappa_k\right)_l\ ,$$

$$^*\overset{ss}{T}_{ij}=\overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{-2}\ \overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{k}_{i}\ \overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{l}_{j}\ \overset{ss}{T}_{kl}\ ,$$

(86)

$$^*\overset{ds}{T}_{ij}=\overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{-2}\ \overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{k}_{i}\ \overset{\varphi_1\varphi_2}{\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}}{}^{l}_{j}\ \underset{\varphi_3\varphi_4}{\overset{ds}{T}}_{kl}\ .$$

<u>Beweis</u>. Unter Anwendung von der Theorie der impliziten Funktionen von mehreren Veränderlichen, der Theorie der Krümmungslinien der Fläche, der Theorie der exakten Differential-

gleichungen, ferner unter Anwendung von Eigenschaften des Gradiententensors, dem Satz von Laplace aus Determinantentheorie und dem Transformationsgesetz für Koordinaten eines Tensors beweist man:

1) In durch die Transformationen

$$u_i - {}'u_i = 0,\ (i = 1,2),\ \varphi_k(u_1,\dots,u_4) - {}'u_k = 0,\ \det\left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j}\right| \neq 0,\ (k,j = 3,4)$$

bestimmten Parametern ${}'u_i$ $(i = 1,2,3,4)$ des Kugelraumes hat die Kugelkongruenz (78) die Gleichungen

$${}'u_k = c_k,\quad c_k = \text{konst}\ (k = 3,4)$$

und für die Koordinaten eines beliebigen kovarianten Tensors zweiter Stufe ${}'T_{ij}$ $(i,j = 1,\dots,4)$ gilt

$${}'T_{ij} = \mathcal{D}^{-2}_{\varphi_3\varphi_4}\, \mathcal{D}^{k}_{\varphi_3\varphi_4 i}\, \mathcal{D}^{l}_{\varphi_3\varphi_4 j}\, T_{kl} .$$

2) In Parametern ${}'u_i$ aus 1) kann man Differentialgleichungen der Krümmungslinien der Mittelpunktfläche $\mathfrak{s}$ der Kugelkongruenz (78) in Form der exakten Differentialgleichungen

$$\mu_i\left({}'k_{12} + {}'k_{21} \pm (-1)^i\sqrt{({}'k_{12}+{}'k_{21})^2 - 4\,{}'k_{11}\,{}'k_{22}}\right)_{({}'u_3=c_3,\,{}'u_4=c_4)} d\,{}'u_1 +$$

$$+ 2\,\mu_i \cdot ({}'k_{22})_{({}'u_3=c_3,\,{}'u_4=c_4)}\, d\,{}'u_2 = 0,\ (i = 1,2)$$

schreiben, wo μ_i eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$2({}'k_{22})_{({}'u_3=c_3,\,{}'u_4=c_4)} \frac{\partial \mu_i}{\partial\,{}'u_1} - \left({}'k_{12}+{}'k_{21} \pm (-1)^i\sqrt{({}'k_{12}+{}'k_{21})^2 - 4\,{}'k_{11}\,{}'k_{22}}\right)_{({}'u_3=c_3,\,{}'u_4=c_4)} \cdot$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial\,{}'u_2} = \left\{ \frac{\partial}{\partial\,{}'u_2}\left({}'k_{12}+{}'k_{21} \pm (-1)^i\sqrt{({}'k_{12}+{}'k_{21})^2 - 4\,{}'k_{11}\,{}'k_{22}}\right)_{({}'u_3=c_3,\,{}'u_4=c_4)} -\right.$$

$$\left. - 2\,\frac{\partial}{\partial\,{}'u_1}({}'k_{22})_{({}'u_3=c_3,\,{}'u_4=c_4)} \right\} \mu_i,\quad (i = 1,2),$$

bei

$$'k_{ij} = {}'\overset{ss}{T}_{1i}\, {}'\overset{ds}{T}_{2j} - {}'\overset{ss}{T}_{2i}\, {}'\overset{ds}{T}_{1j} =$$

$$= \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}^{-4}\, \overset{ss}{T}_{kl}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\overset{ds}{T}}{}_{mn}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{l}_{i}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{n}_{j} \left(\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{k}_{1}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{m}_{2} - \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{k}_{2}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}{}^{m}_{1} \right), \quad (i, j = 1, 2),$$

ist.

3) In Parametern u_i $(i = 1, \dots, 4)$ des Kugelraums haben die exakten Differentialgleichungen der Krümmungslinien der Mittelpunktfläche s der Kugelkongruenz (78) die Form

$$\mu_i \left(\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}^{-4} \{ \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{B}} \pm (-1)^i [\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{B}}^2 - 4 \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{A}}{}_{11}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{A}}{}_{22}]^{\frac{1}{2}} \} \right)_{(\varphi_3 = c_3, \varphi_4 = c_4)} du_1 +$$

$$+ 2 \mu_i \left(\underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{D}}^{-4}\, \underset{\varphi_3\varphi_4}{\mathcal{A}}{}_{22} \right)_{(\varphi_3 = c_3, \varphi_4 = c_4)} du_2 = 0 ,$$

wo μ_i die Lösung der partiellen Differentialgleichungen (83) ist. Die Krümmungslinien der Mittelpunktfläche s der Kugelkongruenz (78) haben also die Gleichungen $\varphi_i = c_i$ $(c_i = \text{konst}, i = 1,2)$, wo φ_i durch die Gleichungen (82), (83) gegeben sind.

4) In den durch die Transformationen

$$\varphi_i = {}^*u_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

bestimmten Parametern ${}^*u_i$ $(i = 1,2,3,4)$ des Kugelraums, wo φ_1, φ_2 bzw. φ_3, φ_4 die Funktionen aus (82), (83) bzw. (78) sind, und nur in diesen Parametern, hat die Kugelkongruenz (78) die Gleichungen

$${}^*u_k = c_k , \quad c_k = \text{konst} \quad (k = 3, 4)$$

und auf der Kugelkongruenz (78) gelten die Gleichungen

$${}^*\overset{ss}{T}_{12}({}^*u_1, {}^*u_2, {}^*u_3 = c_3, {}^*u_4 = c_4) = {}^*\overset{ds}{T}_{12}({}^*u_1, {}^*u_2, {}^*u_3 = c_3, {}^*u_4 = c_4) = 0 .$$

Für die Koordinaten eines beliebigen kovarianten Tensors zweiter Stufe $^*T_{ij}$ (i,j = 1,2,3,4) gilt

$$^*T_{ij} = \overset{q_1 q_2 -2}{\underset{q_3 q_4}{\mathcal{D}}} \; \overset{q_1 q_2 k}{\underset{q_3 q_4 i}{\mathcal{D}}} \; \overset{q_1 q_2 l}{\underset{q_3 q_4 j}{\mathcal{D}}} \; T_{kl} \quad .$$

Aus Behauptungen 1) bis 4) folgen Behauptungen des Satzes 17.

Konzeption, Inhalt und Methoden der dritten Phase können durch die Sätze 18, 19 und durch ihre Beweise charakterisiert werden.

Satz 18. 1. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine hyperbolische, reguläre, nichtzylindrische Linienkongruenz $p\,(p^1, p^2, p^3 = 1, p^4, p^5, p^6)$ $(p^i = p^i(u^1, u^2),\ i = 1, \dots, 6)$ die adjungierte Linienkongruenz einer Kugelkongruenz $(R\,;\,\wp)$ darstellt, ist bei

(87) $$r = (p^5, -p^4, 0), \quad a = [(p^1)^2 + (p^2)^2 + 1]^{-\frac{1}{2}} (p^1, p^2, 1) \ ,$$

(88)
$$e_{ij} = [(p^1)^2 + (p^2)^2 + 1]^{-\frac{3}{2}} (p^1_i \, p^2_j - p^2_i \, p^1_j) \ ,$$
$$e_{ij}\, e^{kj} = \delta^k_i \quad ,$$

(89)
$$a_{ij} = [(p^1)^2 + (p^2)^2 + 1]^{-3} \Big[\sum_{k=1}^{2} \{ p^k_i [(p^1)^2 + (p^2)^2 + 1] - p^k [p^1 p^1_i + p^2 p^2_i] \} \cdot \{ p^k_j [(p^1)^2 + (p^2)^2 + 1] - p^k [p^1 p^1_j + p^2 p^2_j] \} + [p^1 p^1_i + p^2 p^2_i][p^1 p^1_j + p^2 p^2_j] \Big] \ ,$$
$$a_{ij}\, a^{kj} = \delta^k_i \quad ,$$
$$\Gamma^i_{sk} = \Gamma^i_{ks} = \frac{1}{2} a^{ij} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial u^s} + \frac{\partial a_{sj}}{\partial u^k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial u^j} \right) \ ,$$

(90) $$\check{\mu}_i = [(p^1)^2 + (p^2)^2 + 1]^{-\frac{1}{2}} (p^1 p^5_i - p^2 p^4_i) \ ,$$

$$\check{b}_{ij} = -[(p^1)^2+(p^2)^2+1]^{-1}(p^1_i p^4_j + p^2_i p^5_j) \,, \tag{91}$$
$$\check{b}^{ik} = e^{im} e^{kn} \check{b}_{mn}$$

und bei positivem Ausdruck in der Klammer in (93)

$$R = r + \psi a - a^{kj}(\check{\mu}_j + \psi_j) a_k \,, \tag{92}$$

$$\varrho = \tag{93}$$
$$= [a^{ik}(\check{\mu}_i + \psi_i)(\check{\mu}_k + \psi_k) - 2\int e^{kj}(\check{b}_{ji} + \psi e_{ji})(\check{\mu}_k + \psi_k) du^i + c]^{\frac{1}{2}} \,,$$

wo ψ eine solche Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\check{b}^{ik}\psi_{ki} + (e^{ki}\check{\mu}_i + \check{b}^{ik}_i + \Gamma^i_{ji}\check{b}^{jk})\psi_k + e^{ik}\check{\mu}_{ki}\psi + \tag{94}$$
$$+ (\check{b}^{ik}\check{\mu}_k)_i + \Gamma^i_{ji}\check{b}^{jk}\check{\mu}_k = 0$$

ist, für welche bei $\tilde{r} = r + \psi a$

$$(\tilde{r}_1 \cdot \tilde{r}_1)(\tilde{r}_2 \cdot \tilde{r}_2) - (\tilde{r}_1 \cdot \tilde{r}_2)^2 \neq 0, \; (R_1 \cdot R_1)(R_2 \cdot R_2) - (R_1 \cdot R_2)^2 \neq 0 \,, \tag{95}$$
$$[R_1 \cdot R_1 - \varrho_1^2][R_2 \cdot R_2 - \varrho_2^2] - [R_1 \cdot R_2 - \varrho_1 \varrho_2]^2 > 0$$

gilt.

2. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz $(R; \varrho)$ aus der Behauptung 1 von Kugeln mit konstantem Halbmesser gebildet wird, ist

$$\check{\mu}_{12} = \check{\mu}_{21} \,. \tag{96}$$

Im Fall (96) ist

$$R = r - (\int \check{\mu}_i du^i + c) a \,, \tag{97}$$

$$(98) \qquad \varrho = konst \ .$$

__Beweis__, der eine solche Abbildung von Linienkongruenzen auf Flächen benutzt, in welcher konjungierte Netze den Torsennetzen entsprechen, steht völlig auf Ergebnissen von [8] (S. 445, 459-463, 412-413). Aus diesen Ergebnissen, aus [11] (Definition 4.1, Satz 3.2) und aus

$$(\check{b}^{k}{}_{\cdot i}\, \check{\mu}_{k})|^{i}_{\cdot} = (e^{kn} \check{b}_{ni}\ \check{\mu}_{k})|_{m}\ e^{im} =$$
$$= (e^{im} e^{kn} \check{b}_{ni}\ \check{\mu}_{k})|_{m} = -\, (\check{b}^{mk} \check{\mu}_{k})|_{m}$$

folgt:

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine hyperbolische, reguläre, nichtzylindrische Linienkongruenz (r ;a) die adjungierte Linienkongruenz einer Kugelkongruenz (R; ϱ) darstellt, ist bei

$$e_{ij} = \det |a, a_{i}, a_{j}|, \quad a_{ij} = a_{i} \cdot a_{j} \ ,$$
$$\check{\mu}_{k} = a \cdot r_{k}, \quad \check{b}_{ij} = \det |a, a_{i}, r_{j}| \ ,$$

bei zweiten Gleichungen in (88), (89), (91), bei dritter Gleichung in (89) und bei positivem Ausdruck in der Klammer in (93), die Gültigkeit der Gleichungen (92), (93), wo ψ eine solche Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u^{i}} [(\check{b}^{ik} + \psi e^{ik})(\check{\mu}_{k} + \psi_{k})] + \Gamma^{i}_{ji} (\check{b}^{jk} + \psi e^{jk})(\check{\mu}_{k} + \psi_{k}) = 0$$

ist, für welche bei $\check{r} = r + \psi a$ (95) gilt.

Unter Anwendung von kovarianter Ableitung beweist man, dass die vorhergehende Gleichung mit der Gleichung

$$(\check{b}^{ik} + e^{ik}\psi)\psi_{ki} + e^{ik}\psi_{i}\psi_{k} + (e^{ki}\check{\mu}_{i} + \check{b}^{ik}_{i} + \Gamma^{i}_{ji}\check{b}^{jk} + (e^{ik}|i - \Gamma^{k}_{ji} \cdot$$
$$e^{ij})\psi)\psi_{k} + (e^{ik}|i - \Gamma^{k}_{ji} e^{ij})\check{\mu}_{k}\psi + e^{ik}\check{\mu}_{ki}\psi + (\check{b}^{ik}\check{\mu}_{k})|i = 0$$

äquivalent ist, und also wegen $\psi_{ki} = \psi_{ik}$, $e^{ki} = -e^{ik}$, $\Gamma^{k}_{ji} e^{ij} = 0$, $e^{ik}|i = 0$ mit der Gleichung (94) äquivalent ist.

Aus vorhergehenden Betrachtungen und daraus, dass die Linienkongruenz p $(p^1, p^2, p^3 = 1, p^4, p^5, p^6)$ mit Rücksicht auf [5] (I, Sätze (2,4), (2,1), (2,6), S. 5 bis 7) mit Linienkongruenz (r; a), wo r, a durch die Gleichungen (87) gegeben sind, identisch ist, folgt Behauptung 1 des Satzes 18.

Aus der bewiesenen Behauptung 1 des Satzes 18, aus [11] (Satz 1.13) und aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren a_1, a_2 folgt, dass die von Kugeln mit konstantem Halbmesser gebildete Kugelkongruenz (R; ρ) durch

$$a^{kj}(\check{u}_j + \psi_j) = 0\,, \quad k = 1, 2$$

gekennzeichnet ist, was wegen $\det|a^{kj}| \neq 0$ mit

$$\psi_j = -\check{u}_j\,, \quad j = 1, 2$$

äquivalent ist. Aus dem Vorhergesagten, aus dem Beweis der Behauptung 1 des Satzes 18 und daraus, dass (96) Integrabilitätsbedingungen des vorhergehenden Systems von Differentialgleichungen sind, folgt Behauptung 2 des Satzes 18.

Satz 19. Differentialgeometrie von hyperbolischen, regulären, nichtzylindrischen Linienkongruenzen, auf denen eine solche Lösung ψ der Differentialgleichung (94), für welche (95) gilt, existiert, und Differentialgeometrie von ihren Untermannigfaltigkeiten können in Differentialgeometrie von adjungierten Linienkongruenzen und von ihren Untermannigfaltigkeiten überführt werden.

Beweis folgt aus dem Satz 18 und aus [11] (Satz 1.16).

Versteht man unter Kugelkongruenz eine solche Kugelkongruenz, deren Mittelpunktfläche von Kugelfläche und Ebene verschieden ist, kann man auf Grund der Sätze 1 bis 19 das resultierende Theorem folgendermassen formulieren:

Theorem. Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum kann im Sinne der Sätze 16 bis 19 im beliebig parametrisierten Kugelraum unter Anwendung von Skalar $\varkappa$ und Tensoren $\overset{\wedge\wedge}{T}_{ij}$, $\overset{\alpha\beta}{T}_{q_3 q_4 ij}$ aus (8) untersucht werden.

L i t e r a t u r

[1] W. BLASCHKE: Vorlesungen über Differentialgeometrie III, Berlin 1929.

[2] S.P. FINIKOV: Těorija kongruencij, Moskva-Leningrad 1950.

[3] V. HLAVATÝ: Zur Lie'schen Kugelgeometrie: I. Kanalflächen, Věstník Král. české společnosti nauk, Praha 1941.

[4] V. HLAVATÝ: K Liově kulové geometrii: II. Kongruence (Elementární vlastnosti), Rozpravy II. tř. České akademie, roč.LI, č. 33.

[5] V. HLAVATÝ: Diferenciální přímková geometrie I, II, Rozpravy II.tř. Čes.akademie, roč. L, č.27.

[6] V. HLAVATÝ: Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, JČMF Praha 1937.

[7] V.F. KAGAN: Osnovy teorii pověrchnostěj v tenzornom izloženii I, II, Moskva-Leningrad 1947, 1948.

[8] V.I. ŠULIKOVSKIJ: Klassičeskaja differencialnaja geometrija v tenzornom izloženii, Moskva 1963.

[9] Z. VANČURA: Les congruences de Lie-sphères (L-sphères), Spisy přírod.fakulty Karlovy university, Praha 1950.

[10] Z. VANČURA: Pláště kongruence koulí, Časopis pro pěsto-

vání matematiky 80(1955).

[11] Z. VANČURA: Kulové kongruence a jejich pláště. Adjungované přímkové kongruence a jejich pláště, Rozpravy Československé akademie věd, 78, Praha 1968.

Stavební fakulta
České vysoké učení technické
Trojanova 13, Praha 2
Československo

(Oblatum 19.12. 1974)