Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

N. G. Perlova

Об одном условии жёсткости вротого порядка

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 16 (1975), No. 3, 425--433

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105637

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

16,3 (1975)

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ЖЕСТКОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н.Г. ПЕРЛОВА, Ростов-на-Дону

Аннотация: Доказывается
1) жесткость второго порядка двусвязной поверхности вращения класса C^2 без асимптотических параллелей при условии, что в каждой точке некоторой не геодезической ее параллели касательная плоскость поверхности не испытывает поворота вокруг касательной к параллели;
2) жесткость второго порядка аналитической поверхности, содержащей окружность L - линию кривизны ненулевой геодезической кривизны, при условии, что в каждой точке L касательная плоскость поверхности не испытывает поворота вокруг касательной к L .

Ключевые слова: Поверхность вращения, бесконечно малое изгибание.

AMS: 53A05 Ref. Ž.: 3.934.14

1° Рассмотрим поверхность вращения класса C^2, ограниченную двумя параллелями. В подвижном репере $\bar{e}$, $\bar{a}(v)$, $\bar{a}'(v)$ [1] уравнение поверхности имеет вид $\bar{r} = u\bar{e} + \varkappa(u)\,\bar{a}(v)$, $u \in [0, U]$. Будем считать, что $[\varkappa'(u)]^{-1} \neq 0$, то есть поверхность не имеет асимптотических параллелей.

Выясним, допускает ли названная поверхность бесконечно малое изгибание первого порядка, при котором касательные плоскости во всех точках некоторой ее параллели не испытывают поворота вокруг касательных к параллели.

Теорема 1. На поверхности вращения класса C^2 отрицательной кривизны, ограниченной параллелями $u = 0$ и $u = U$, существует счетное множество параллелей $u = u_k, 0 < u_k \le U$, таких, что пояс поверхности, заключенный между параллелями $u = 0$ и $u = u_k$, допускает бесконечно малое изгибание первого порядка, при котором касательные плоскости к поверхности во всех точках граничных параллелей не испытывают поворота вокруг касательных к этим параллелям.

<u>Доказательство</u>. Бесконечно малое изгибание первого порядка поверхности вращения определяется полем скоростей

$$\bar{z}(u,v) = \alpha(u,v)\bar{e} + \beta(u,v)\bar{a}(v) + \gamma(u,v)\bar{a}'(v) ,$$

компоненты которого удовлетворяют системе уравнений [1]:

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_u + r'\beta_u = 0 , \\ \gamma_v + \beta = 0 , \\ \alpha_v + r'(\beta_v - \gamma) + r\gamma_u = 0 . \end{cases}$$

Известно [1], что коэффициенты Фурье $\alpha_k(u)$, $\beta_k(u)$, $\gamma_k(u)$ функций $\alpha(u,v)$, $\beta(u,v)$, $\gamma(u,v)$ по системе $e^{\pm ikv}$ удовлетворяют системе уравнений

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha_k' + r'\beta_k' = 0 , \\ ik\gamma_k + \beta_k = 0 , \\ ik\alpha_k + r'(ik\beta_k - \gamma_k) + r\gamma_k' = 0 \end{cases}$$

при $k = 0, \pm 1, \dots$, причем $\alpha_{-k} = \bar{\alpha}_k$. Решения системы (2) при $k = 0$ и $k = \pm 1$ определяют тривиальное бесконечно малое изгибание.

Исключая из (2) неизвестные функции α_k и β_k, получим для определения функции γ_k уравнение

$$(3) \qquad r\gamma_k'' + (k^2 - 1)r''\gamma_k = 0 .$$

<u>Замечание</u>. Если бесконечно малое изгибание $\bar{z}$ допуска-

ет продолжение второго порядка $\bar{w}$, то изгибание $\bar{z}+\bar{z}_0$, где $\bar{z}_0$ тривиально, тоже допускает продолжение второго порядка. Поэтому можно считать $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ тождественно равными нулю и рассматривать систему (2) и уравнение (3) лишь при $k \geq 2$.

При бесконечно малом изгибании первого порядка касательные плоскости поверхности во всех точках параллели $u=u_0$ не испытывает поворота вокруг касательной тогда и только тогда, когда

$$(\bar{y}\,\bar{a}')_{|u=u_0}=0 \;,$$

где $\bar{y}$ - поле вращений. Как нетрудно проверить, для поверхности $\bar{x}=\bar{x}(u,v)$ поле вращений $\bar{y}$ выражается через поле скоростей $\bar{z}$ по формуле

$$\bar{y}=(EG-F^2)^{-\frac{1}{2}}\{(\bar{z}_v\,\bar{m})\bar{x}_u-(\bar{z}_u\,\bar{m})\bar{x}_v+(\bar{z}_u\,\bar{x}_v)\bar{m}\} \;,$$

где $\bar{m}=\dfrac{[\bar{x}_u\;\bar{x}_v]}{|[\bar{x}_u\,\bar{x}_v]|}$. В рассматриваемом случае $F=0$, $\bar{x}_v=\bar{a}'$.
Поэтому условие $(\bar{y}\,\bar{a}')_{|u=u_0}=0$ равносильно условию

$$(\bar{z}_u\,\bar{m})_{|u=u_0}=0$$

или, что то же,

$$(\varkappa'\alpha_u-\beta_u)_{|u=u_0}=0 \;.$$

Учитывая уравнение (1_1), из последнего равенства получаем:

$$\alpha_u|_{u=u_0}=\beta_u|_{u=u_0}=0 \;.$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно найти решение системы (2) по крайней мере при одном значении $k \geq 2$ такое, что

$$\alpha'_k|_{u=0}=\alpha'_k|_{u=u_k}=\beta'_k|_{u=0}=\beta'_k|_{u=u_k}=0$$

при некотором $0 < u_k \leq U$. Для этого, в свою очередь, достаточно найти решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям

$$\gamma_k'|_{u=0} = \gamma_k'|_{u=u_k} = 0 .$$

Такое решение существует. Действительно, уравнение (3) имеет на отрезке $[0, U]$ ненулевое решение $\gamma_k(u)$ при любых начальных условиях вида $\gamma_k(0) \neq 0$, $\gamma_k'(0) = 0$. Сравнивая (3) с уравнением

$$\gamma_k'' + (k^2 - 1) \min_{[0,U]} \frac{r''}{r} \gamma_k = 0 ,$$

замечаем, что при $k > \rho = [1 + 4\pi^2 (U^2 \min_{[0,U]} \frac{r''}{r})^{-1}]^{\frac{1}{2}}$

решение $\gamma_k(u)$ уравнения (3) имеет на отрезке $[0, U]$ по крайней мере два нуля. Следовательно, найдется точка $0 < u_k \leq$ $\leq U$ такая, что $\gamma_k'(u_k) = 0$. Поверхность, заключенная между параллелями $u = 0$ и $u = u_k$ при $k > \rho$, допускает бесконечно малое изгибание первого порядка $\bar{z}_k$, удовлетворяющее условиям теоремы.

<u>Теорема 2</u>. Поверхность вращения S класса C^2 без асимптотических параллелей, заключенная между двумя параллелями, обладает жесткостью второго порядка относительно бесконечно малых изгибаний, при которых касательные плоскости поверхности во всех точках одной граничной параллели ненулевой геодезической кривизны не испытывают поворота вокруг касательных к поверхности.

<u>Доказательство</u>. Как в доказательстве теоремы 1, найдем решения уравнения (3) при любом $k \geq 2$, удовлетворяющие условию $\gamma_k'(0) = 0$. Эти решения определяют бесконечно малое изги-

бание $\bar{z} = \sum_{k\geq 2} \bar{z}_k$ поверхности S, при котором $(\bar{y}\,\bar{a}')|_{u=0} = 0$, а параллель $u = U$ свободна. Поле $\bar{z}$ удовлетворяет условию $(\bar{z}_u \bar{r}_v)|_{u=0} = 0$, так как $\gamma_u(0) = 0$.

Бесконечно малое изгибание второго порядка поверхности S определяется полем ускорений $w = a(u,v)\bar{e} + b(u,v)\bar{a}(v) + c(u,v)\bar{a}'(v)$, компоненты которого удовлетворяют системе уравнений [1]:

$$
(4) \qquad \begin{cases} a_u + \varkappa' b_u = -\{\alpha_u^2 + \beta_u^2 + \gamma_u^2\}, \\ c_v + b = -\frac{1}{r}\{\alpha_v^2 + (\beta_v - \gamma)^2\}, \\ a_v + \varkappa'(b_v - c) + r c_u = -2\{\alpha_u \alpha_v + \beta_u(\beta_v - \gamma)\}. \end{cases}
$$

Как нетрудно проверить, поле угловых ускорений $\bar{y}^*$ для поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ выражается через поле ускорений $\bar{w}$ по формуле

$$
(5) \qquad \begin{aligned} \bar{y}^* = (EG-F^2)^{-1}\{&[(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}(\bar{w}_v \bar{m}) - (\bar{z}_u \bar{z}_v)(\bar{y}\,\bar{r}_v)]\,\bar{r}_u + \\ &+ [-(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}(\bar{w}_u \bar{m}) + (\bar{z}_u \bar{z}_v)(\bar{y}\,\bar{r}_u)]\,\bar{r}_v + \\ &+ [(\bar{w}_u \bar{r}_v) + (\bar{z}_u \bar{z}_v)]\,\bar{m}\}. \end{aligned}
$$

Предположим, что поверхность S допускает бесконечно малое изгибание второго порядка, при котором касательная плоскость S в каждой точке параллели $u = 0$ не испытывает поворота вокруг ксательной к параллели. Тогда

$$(\bar{y}^* \bar{a}')|_{u=0} = 0 .$$

Из (5) следует, что $(\bar{w}_u \bar{m})|_{u=0} = 0$ или, что то же, $(\varkappa' a_u - b_u)|_{u=0} = 0$. Учитывая уравнение ($4_1$), из последнего равенства получаем:

$$a_u|_{u=0} = b_u|_{u=0} = 0 .$$

Проинтегрируем уравнение (4_2) по v от 0 до 2π:

(6) $$\int_0^{2\pi} \ell\, dv = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{\varkappa}\, [\alpha_v^2 + (\beta_v - \gamma)^2]\, dv \ .$$

Дифференцируя (6) по u и учитывая, что $\ell_u|_{u=0} = 0$, получим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\varkappa^2(0)} \{2\varkappa[\alpha_v\alpha_{vu} + (\beta_v - \gamma)(\beta_{vu} - \gamma_u) - \varkappa^2[\alpha_v^2 + (\beta_v-\gamma)^2]\}_{u=0}\, dv = 0 ,$$

или, так как

$$\alpha_{uv}|_{u=0} = \beta_{uv}|_{u=0} = \gamma_u|_{u=0} = 0 ,$$

(7) $$\int_0^{2\pi} \varkappa'(0)\, [\alpha_v^2 + (\beta_v - \gamma)^2]_{u=0}\, dv = 0 \ .$$

Левая часть равенства (7) представляет собой нулевой коэффициент Фурье подинтегральной функции. Выписывая этот коэффициент, найдем:

$$2\varkappa'(0) \sum_{k\geq 2} \{|\alpha_k|^2 + (k^2-1)|\gamma_k|^2\}_{u=0} = 0 \ .$$

Пусть параллель $u = 0$ - не геодезическая. Тогда $\varkappa'(0) \neq 0$, и из последнего равенства получаем:

$$\gamma_k(0) = 0$$

при $k \geq 2$. Так как, кроме того, $\gamma_k'(0) = 0$ при $k \geq 0$, то $\gamma_k(u) \equiv 0$ при $k \geq 2$. Следовательно, $\bar{z} = \sum_{k\geq 2} \bar{z}_k \equiv 0$, что и доказывает жесткость второго порядка поверхности S.

2° <u>Теорема 3</u>. Пусть аналитическая поверхность S содержит окружность L, являющуюся линией кривизны ненулевой геодезической кривизны. Поверхность S обладает жесткостью второго порядка относительно аналитических бесконечно малых изгибаний, при которых касательная плоскость поверхности S в каждой точке линии L не испытывает поворота вокруг касательной к L в соответствующей точке.

Доказательство. Примем L в качестве линии $u = 0$ и будем считать v натуральным параметром вдоль L. Тогда $\bar{x}_v$, $\bar{m}$, $\bar{b} = [\bar{x}_v \bar{m}]$ – сопровождающий репер поверхностной полосы вдоль L.

Предположим, что S допускает бесконечно малое изгибание первого порядка, при котором $(\bar{y}\bar{x}_v)|_L = 0$. Тогда вдоль L

(8) $$\bar{y}(v) = \xi(v)\bar{m}(v) + \eta(v)\bar{b}(v) .$$

Дифференцируя (8), получим:

$$\bar{y}_v = \xi'\bar{m} + \eta'\bar{b} + (-\xi k_m + \eta k_g)\bar{x}_v ,$$

где $k_m = const$ и $k_g = const$ – нормальная и геодезическая кривизны L. Известно [2], что вектор $\bar{y}_v$ компланарен $\bar{x}_v$ и $\bar{b}$. Следовательно, $\xi' \equiv 0$, и потому $\xi = const$ вдоль L.

Докажем, что поле $\bar{y}$ не допускает продолжения второго порядка $\bar{y}^*$ такого, что $(\bar{y}^*\bar{x}_v)|_L = 0$. Заметим, что если поле $\bar{y}$ допускает продолжение второго порядка $\bar{y}^*$, то поле $\bar{y} + \bar{y}_0$, где $\bar{y}_0$ постоянно, тоже допускает продолжение второго порядка: им является поле $\bar{y}^* + [\bar{y}_0 \bar{y}]$. В силу этого достаточно доказать, что не допускает продолжения второго порядка поле $\bar{y} - \frac{\xi k}{k_g}\bar{\beta}$, где $k = const$ – кривизна L, $\bar{\beta} = -\frac{k_g}{k}\bar{m} + \frac{k_m}{k}\bar{b}$ – бинормаль L.

Предположим, что поле $\bar{y} - \frac{\xi k}{k_g}\bar{\beta}$ допускает продолжение второго порядка $\bar{y}^*$ такое, что вдоль L

(9) $$\bar{y}^*(v) = \lambda(v)\bar{m}(v) + \mu(v)\bar{b}(v) .$$

Дифференцируя (9), получим:

$$\bar{y}^*_v = \lambda'\bar{m} + \mu'\bar{b} + (-\lambda k_m + \mu k_g)\bar{n}_v .$$

Известно [2], что вектор $\bar{y}^*_v - [\bar{y} - \frac{\xi k}{k_g}\bar{\beta}, \bar{y}_v]$ компланарен $\bar{n}_v$ и $\bar{b}$. Легко убедиться, что

$$[\bar{y} - \frac{\xi k}{k_g}\bar{\beta}, \bar{y}_v] = \frac{1}{k_g}(-\xi k_m + \eta k_g)^2\bar{m} + \dots ,$$

где невыписанное члены являются линейной комбинацией $\bar{n}_v$ и $\bar{b}$. Следовательно,

$$\lambda' - \frac{1}{k_g}(-\xi k_m + \eta k_g)^2 = 0 . \tag{10}$$

Интегрируя (10) по v от 0 до ℓ, где ℓ - длина L, получим:

$$\int_0^\ell (-\xi k_m + \eta k_g)^2 = 0 ,$$

откуда следует:

$$\eta = \frac{k_m}{k_g}\xi .$$

Таким образом, предположение о том, что поле $\bar{y} - \frac{\xi k}{k_g}\bar{\beta}$ допускает продолжение второго порядка, привело к заключению, что

$$\bar{y} - \frac{\xi k}{k_g}\bar{\beta} = \xi\bar{m} + \frac{\xi k_m}{k_g}\bar{b} - \frac{\xi k}{k_g}\bar{\beta} \equiv \bar{0} .$$

Жесткость второго порядка поверхности S доказана.

Литература

[1] S. COHN-VOSSEN: Unstarre geschlossene Flächen, Math. Ann. 102(1929),10-29.

[2] Н.В. ЕФИМОВ: Качественные вопросы теории деформаций поверхностей, УМН 2/24(1948),45-158.

Кафедра геометрии

Ростовский гос. университет

Ростов-на-Дону

С С С Р

(Oblatum 12.3.1975)