Rudolf Kryl

О конструктивном аналоге одной теоремы Лузина

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 15 (1974), No. 3, 465--480

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105571`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

15,3 (1974)

О КОНСТРУКТИВНОМ АНАЛОГЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ЛУЗИНА

Рудольф КРЫЛ , Прага

Содержание: В настоящей заметке доказано, что в конструктивной математике имеет место аналог теоремы Лузина (см. [1], стр. 215), а именно, что для всякого элемента пространства S (аналог пространства измеримых почти всюду на сегменте $0 \Delta 1$ конечных функций) осуществима равномерно непрерывная функция, которая на $0 \Delta 1$ почти всюду равномерно дифференцируема к этому элементу.

Ключевые слова: Конструктивная функция, измеримость функций по Лебегу, пространство L_1 , сингулярная функция, почти всюду равномерная дифференцируемость.

AMS: Primary: 02E99 Ref. Ž.: 2.644.2
Secondary: 28A20, 26A24

В следующем мы пользуемся определениями, обозначениями и результатами из [2] и [3]. На этом основании нам удастся доказать теорему методом близким классическому.

Напомним сначала несколько определений и результатов.

1) Пусть $P(x)$ некоторое свойство КДЧ. Говорим, что $P(x)$ выполнено для почти всех КДЧ из сегмента $0 \Delta 1$, если существует последовательность S-множеств $\{\mathcal{G}^k\}_k$ такая, что для всякого НЧ k имеет место

а) $\mathcal{G}^{k+1} \subset \mathcal{G}^k$ и мера S-множества $\mathcal{G}^k$ меньше чем $\frac{1}{3^k}$

б) $\forall x (\neg (x \in \mathcal{G}^k) \supset P(x))$.

2) Очевидно, что если для всякого НЧ ℓ свойство $P_\ell(x)$ выполняется для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$, то свойство $\forall_\ell P_\ell(x)$ также выполнено для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$.

3) Пусть $\{F_\ell\}_\ell$ последовательность ступенчатых остовов, x, u КДЧ, $0 \le x \le 1$. Тогда $P(u, \{F_\ell\}_\ell, x)$ значит: последовательность КДЧ $\{\vartheta(F_n x)\}_n$ определена и сходится к u (содержательно: u является значением $\{F_\ell\}_\ell$ в точке x).

4) Пусть f функция, $\{F_\ell\}_\ell$ последовательность ступенчатых остовов, $\mathcal{G}$ S-множество, p и s НЧ.

$Д(f, \{F_\ell\}_\ell, p, \mathcal{G}, s)$ означает:

мера $\mathcal{G}$ меньше чем $\dfrac{1}{3^p}$ и выполнено

$$\forall x (x \in 0 \Delta 1 \;\&\; \neg (x \in \mathcal{G}) \supset \exists u (P(u, \{F_\ell\}_\ell, x) \;\&$$

$$\& \forall y (|y-x| < \frac{1}{s} \supset |f(y) - f(x) - u(y-x)| \le \frac{1}{3^p} |y-x|))) .$$

$Д(f, \{F_\ell\}_\ell)$ означает:

существуют последовательности S-множеств $\{\mathcal{G}^k\}_k$ и НЧ $\{s_k\}_k$ такие, что $\forall_k \, Д(f, \{F_\ell\}_\ell; k; \mathcal{G}^k; s_k)$.

5) Если $Д(f, \{F_\ell\}_\ell)$ то, содержательно говоря, f является почти всюду на $0 \Delta 1$ равномерно дифференцируемой к значению $\{F_\ell\}_\ell$ (см. [3] замечание 1).

6) Пусть H сегмент, тогда $(H)^\circ \leftrightharpoons Эл(H) \triangledown Эm(H)$.

7) Пусть x, u КДЧ, $u \ge 0$, тогда $\lambda(x, u) \leftrightharpoons$
$\leftrightharpoons max(min(u, x), -u)$

Замечание 1. Возможно построить функцию π (конструктивный аналог функции Кантора) такую, что выполнено

1) π является неубывающей

2) $\forall x ((x \leq 0 \supset \pi(x) = 0) \& (x \geq 1 \supset \pi(x) = 1))$

3) π является сингулярной и, следовательно, имеет место $Д(\pi, \{0 \gamma 1 \sigma 0\}_m)$.
(см. [3]).

Замечание 2. Легко построить алгорифм $\mathcal{L}$ такой, что для всяких ступенчатого остова F и рационального сегмента $a \triangle b$, содержащегося в $0 \triangle 1$, $\mathcal{L}$ применим к слову $Fa \triangle b$ и выдает по нему ступенчатый остов $\mathcal{L}(Fa \triangle b)$, для которого выполнено

а) $\forall x (x \in 0 \triangle 1 \supset (!\vartheta(\mathcal{L}(Fa \triangle b)x) \equiv$

$\equiv (0 < x < a \vee b < x < 1 \vee (a < x < b \& !\vartheta(Fx)))))$

б) $\forall x (x \in a \triangledown b \supset \vartheta(\mathcal{L}(Fa \triangle b)x) \simeq \vartheta(Fx))$

в) $\forall x ((0 < x < a \vee b < x < 1) \supset \vartheta(\mathcal{L}(Fa \triangle b)x) \simeq 0)$

(по поводу обозначений см. [2]).
Если $\{F_\ell\}_\ell \in L_1$, то, очевидно, для всякого рационального сегмента $a \triangle b$, содержащегося в $0 \triangle 1$, имеет место $\{\mathcal{L}(F_\ell a \triangle b)\}_\ell \in L_1$.

Лемма 1. Пусть $\{F_\ell\}_\ell \in L_1$, m НЧ и $a \triangle b$ рациональный сегмент, содержащийся в $0 \triangle 1$. Тогда можно построить равномерно непрерывную функцию g, последовательность НЧ $\{t_k\}_k$ и последовательность S-множеств $\{\mathcal{Y}^k\}_k$ таких, что для всякого НЧ k выполнено

1) мера S -множества $\mathcal{Y}^k$ меньше чем $\frac{1}{3k}(b-a)$

2) $\forall x(x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{Y}^k) \supset \exists u(P(u, \{\mathcal{L}(F_\ell a \Delta b)\}_\ell, x) \,\&$
$\& \forall y(|y-x| < \frac{1}{t_k} \supset |g(y)-g(x)-u(y-x)| \le \frac{1}{3k}|y-x|)))$

3) $\forall x(x \le a \vee x \ge b \supset g(x) = 0)$

4) $\forall x(|g(x)| < \frac{1}{m})$.

<u>Доказательство</u>. По замечанию 2 $\{\mathcal{L}(F_\ell a \Delta b)\}_\ell$ элемент пространства L_1 и по теореме 2 из [2] существует абсолютно непрерывная функция h , являющаяся неопределенным интегралом от этого елемента. Тогда по следствию теоремы 2 из [3] выполнено $Д(h, \{\mathcal{L}(F_\ell a \Delta b)\}_\ell)$. Функция h , в виду своей абсолютной непрерывности, является функцией ограниченной вариации и, следовательно, существует возрастающая система РЧ $\{a_i\}_{i=0}^{p}$ такая, что выполнено

$$a_0 = a \,\&\, a_p = b \,\&\, \forall i\,(1 \le i \le p \,\&\, Var(u, h, a_{i-1} \Delta a_i) \supset u < \frac{1}{2m}).$$

Пусть π функция определенная в замечании 1. Мы построим для каждого $1 \le i \le p$ функцию f_i такую, что

$$f_i(x) = h(a_{i-1}) + \pi\left(\frac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}\right) \cdot (h(a_i) - h(a_{i-1})) .$$

Тогда возможно построить функцию f , для которой имеет место

$$f(x) = \begin{cases} h(a) & x \le a \\ f_i(x) \quad \text{если} & x \in a_{i-1} \Delta a_i \\ h(b) & x \ge b \end{cases}$$

Из определения функции f и свойств функции π немедленно вытекает, что f равномерно непрерывна и выполнено

$$Д(f, \{0 \gamma 1 \sigma 0\}_m) .$$

Определим $g \leftrightharpoons h - f$. Очевидно, что функция g равномерно непрерывна и обладает свойством 3). По замечанию 1 из [3] выполняется $Д(g, \{\mathcal{B}(F_\ell a \Delta b)\}_\ell)$. Но тогда нетрудно построить последовательности $\{y^k\}_k$, $\{t_k\}_k$ обладающие свойствами 1) и 2).

Остает доказать свойство 4). Пусть x КДЧ. Потому, что мы хотим доказать неравенство между КДЧ (с которого возможно снять двойное отрицание), достаточно поступать разбором случаев. Если существует НЧ i такое, что $1 \le i \le p$ & & $x \in a_{i-1} \triangledown a_i$, то

$$|g(x)| = |h(x) - f(x)| \le |h(x) - h(a_{i-1})| + |f(x) - f(a_{i-1})| \le$$

$$\le |h(x) - h(a_{i-1})| + |h(a_i) - h(a_{i-1})| \le \frac{1}{m} .$$

Если такое НЧ i не существует, то $g(x) = 0$ и оценка опять имеет место.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\{F_\ell\}_\ell \in L_1$, m НЧ, $\mathcal{G} \leftrightharpoons \{H_\ell\}_\ell$ S-множество. Пусть для почти всех КДЧ x из сегмента $0 \Delta 1$ выполнено**

$$\neg(x \in \mathcal{G}) \supset P(0, \{F_\ell\}_\ell, x) .$$

Тогда существуют равномерно непрерывная функция g, последовательность S-множеств $\{\mathcal{L}^k\}_k$ и последовательность НЧ $\{s_k\}_k$ такие, что

1) $\forall k \; Д(g, \{F_\ell\}_\ell, k, \mathcal{L}^k, s_k)$

г) $\forall xy(\neg \exists_\ell (x \in (H_\ell)^0) \supset g(x) = 0 \ \& \ |g(x+y)| \le \frac{|y|}{3^m})$.

<u>Доказательство</u>. I . Определим для всяких НЧ ℓ и ЦЧ

а) рациональное число a_i^ℓ так, что

$$a_i^\ell = \text{Эл}(H_\ell) + |H_\ell| \ \frac{2^{i+1}-1}{2^{i+1}}, \qquad \text{если } i \ge 0$$

$$a_i^\ell = \text{Эл}(H_\ell) + |H_\ell| \ \frac{1}{2^{-i+1}}, \qquad \text{если } i \le 0$$

б) натуральное число n_i^ℓ удовлетворяющее условию

$$\frac{1}{n_i^\ell} < \frac{1}{3^{m+\ell+|i|}} \cdot \min(\text{Эm}(H_\ell) - a_i^\ell, a_{i-1}^\ell - \text{Эл}(H_\ell)).$$

Тогда по лемме 1 существуют для всяких НЧ ℓ и ЦЧ i равномерно непрерывная функция g_i^ℓ , последовательность S -множеств $\{{}^i\mathcal{Y}_k^\ell\}_k$ и последовательность НЧ $\{{}^it_k^\ell\}_k$ такие, что имеет место

i) для всякого НЧ k мера S -множества ${}^i\mathcal{Y}_k^\ell$ меньше чем

$$\frac{1}{3^k}(a_i^\ell - a_{i-1}^\ell)$$

ii) $\forall xk(x \in 0 \triangle 1 \ \& \ \neg(x \in {}^i\mathcal{Y}_k^\ell) \supset$

$\supset \exists u(P(u, \{\mathcal{L}(F_\ell a_{i-1}^\ell \triangle a_i^\ell)\}_\ell, x) \ \& \ \forall y(|y-x| <$

$< \frac{1}{{}^it_k^\ell} \supset |g_i^\ell(y) - g_i^\ell(x) - u(y-x)| \le \frac{1}{3^k}|y-x|)))$

iii) $\forall x(x \le a_{i-1}^\ell \vee x \ge a_i^\ell \supset g_i^\ell(x) = 0)$

iv) $\forall x(|g_i^\ell(x)| < \frac{1}{n_i^\ell})$.

Легко видеть (по свойству iv)), что для всякого КДЧ x

ряд

(1) $$\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(g_0^{\ell}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{\ell}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}g_{-i}^{\ell}(x)\right)$$

сходится. Обозначим его сумму $g(x)$. Таким образом, определенная функция очевидно равномерно непрерывна.

Заметим, что выполнено

(2) $$\forall x i_1 i_2 \ell_1 \ell_2 (g_{i_1}^{\ell_1}(x)=g_{i_2}^{\ell_2}(x)\neq 0 \supset i_1=i_2 \,\&\, \ell_1=\ell_2 \,\&\, x\in a_{i_1-1}^{\ell_1}\nabla a_{i_1}^{\ell_1})$$

и $\forall x\,(g(x)\neq 0\supset \exists_{i\ell}\,(x\in a_{i-1}^{\ell}\nabla a_i^{\ell}\,\&\, g(x)=g_i^{\ell}(x)))$.

Покажем сначала, что функция g удовлетворяет требованиям пункта 2) леммы.

Пусть x, y КДЧ, $\neg\exists_{\ell}\,(x\in (H_{\ell})^{0})$.

Тогда выполнено $\neg\exists_{\ell i}\,(x\in a_{i-1}^{\ell}\Delta a_i^{\ell})$ и в силу $iii)$ имеет место $g(x)=0$.

Докажем оценку

(3) $$|g(x+y)|\leq\frac{|y|}{3^{m}} .$$

Если $g(x+y)=0$, то оценка (3) выполняется.

Если $\neg(g(x+y)=0)$, то по (2) существуют НЧ ℓ_0 и ЦЧ i_0 такие, что выполнено

$$x+y\in a_{i_0-1}^{\ell_0}\nabla a_{i_0}^{\ell_0}\,\&\, g(x+y)=g_{i_0}^{\ell_0}(x+y) ,$$

и тогда имеет место оценка

$$|g(x+y)|\leq\frac{1}{3^{m+\ell_0+|i_0|}}\cdot \min(\text{Эп}(H_{\ell_0})-a_{i_0}^{\ell_0},\, a_{i_0-1}^{\ell_0}-\text{Эл}(H_{\ell_0}))\leq\frac{|y|}{3^{m}} .$$

Итак, доказано двойное отрицание (3), но его возможно с майоризации снять.

II. Мы построим последовательности $\{\mathcal{L}^k\}_k$ и $\{s_k\}_k$. На основании предположений леммы осуществима последовательность S-множеств $\{\mathcal{G}^k\}_k$ такая, что выполняется

$$(4)\quad \begin{cases} \text{для всякого НЧ } k \text{ мера } \mathcal{G}^k \text{ меньше чем } \frac{1}{3^k} \\ \text{и } \mathcal{G}^{k+1} \subseteq \mathcal{G}^k \\ \forall x k\,(x \in 0\Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}^k) \supset \exists u\, P(u, \{F_\ell\}_\ell, x)) \\ \forall x k\,(x \in 0\Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}^k) \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}) \supset P(0, \{F_\ell\}_\ell, x)) . \end{cases}$$

Мы обозначим для всякого рационального сегмента $a \Delta b$, для которого имеет место $(0 < a < 1 \vee 0 < b < 1)$

$$(a \Delta b)' \leftrightharpoons max(a, 0) \Delta min(1, b) .$$

Пусть k НЧ.

Мы построим НЧ ℓ_k и m_k такие, что имеет место

$$(5)\qquad \ell_k > k \,\&\, \forall q \sum_{\ell=\ell_k+1}^{\ell_k+q} |H_\ell| < \frac{1}{3^{k+2}}$$

и

$$\frac{1}{m_k} < \frac{1}{2} \cdot \min_{\substack{\ell=1,\dots,\ell_k \\ -(2k+3)<i\leq 2k+3}} (a_i^\ell - a_{i-1}^\ell) \,\&\, \frac{2\ell_k(4k+7)}{m_k} < \frac{1}{3^{k+2}} .$$

Тогда возможно построить S-множество $\mathcal{L}^k$, меры меньшей чем $\frac{1}{3^k}$, которое содержит

а) для всякого НЧ ℓ и ЦЧ i S-множество ${}^i\mathcal{Y}^\ell_{k+1}$

б) S-множество $\mathcal{G}^{k+2}$

в) сегменты $\{H_\ell\}_{\ell=\ell_k+1}^{\infty}$

г) сегменты $\{(\text{Эл}(H_\ell)-\frac{|H_\ell|}{2^{2k+4}} \triangle \text{Эл}(H_\ell)+\frac{|H_\ell|}{2^{2k+4}})'\}_{\ell=1}^{\ell_k}$

д) сегменты $\{(\text{Эm}(H_\ell)-\frac{|H_\ell|}{2^{2k+4}} \triangle \text{Эm}(H_\ell)+\frac{|H_\ell|}{2^{2k+4}})'\}_{\ell=1}^{\ell_k}$

е) сегменты $\{a_i^\ell - \frac{1}{m_k} \triangle a_i^\ell + \frac{1}{m_k}\}_{\substack{\ell=1,\dots,\ell_k \\ |i|\leq 2k+3}}$

Мы определим

$$s_k = \max(m_k, \max_{\substack{\ell=1,\dots,\ell_n \\ -(2k+3)<i\leq 2k+3}} {}^i t^\ell_{k+1}) .$$

III. Докажем, что построенные объекты g, $\{\mathcal{L}^k\}_k$, $\{s_k\}_k$ удовлетворяют требованиям леммы.

Пусть k НЧ, x, y КДЧ, для которых верно

$$x \in 0 \triangle 1 \ \&\ \neg(x \in \mathcal{L}^k) \ \&\ |x-y| < \frac{1}{s_k} .$$

Из конструкции S-множества $\mathcal{L}^k$ вытекает, что тогда имеет место

$$(6) \qquad \exists_\ell (1 \leq \ell \leq \ell_k \ \&\ x \in (H_\ell)^\circ) \vee \neg(x \in \mathcal{Y})$$

и что существует КДЧ u, для которого выполняется $P(u, \{F_\ell\}_\ell, x)$.

α) Пусть $\neg(x \in \mathcal{Y})$.

По (4) и уже доказанному пункту 2) настоящей леммы выполнено

$$g(x) = 0 \ \&\ P(0, \{F_\ell\}_\ell, x) .$$

Если $g(y) = 0$, тогда $|g(y)-g(x)-0\cdot(y-x)| = 0 \leq \frac{1}{3^k}|y-x|$.

Если $\neg(g(y)=0)$, тогда по (2) существуют НЧ l_0 и ЦЧ i_0 такие, что $g(y)=g^{l_0}_{i_0}(y)$ & $y\in a^{l_0}_{i_0-1}\nabla a^{l_0}_{i_0}$. Из того, что $|x-y|<\frac{1}{m_k}$ вытекает, что $l_0>l_k$, и тогда по (5) и свойству $iv)$

$$|g(y)|=|g^{l_0}_{i_0}(y)|\le\frac{1}{3^{m+l_0+|i_0|}}|y-x|\le\frac{1}{3^k}|y-x|\ .$$

Итак, с учтением свойств предикатов $=$, $\le$, мы доказали в случае $\neg(x\in\mathcal{G})$ оценку

$$(7)\qquad |g(y)-g(x)-u(y-x)|\le\frac{1}{3^k}|y-x|\ .$$

β) Пусть $x\in(H_{l_0})^0$, $1\le l_0\le l_k$.

Тогда по конструкции S-множества $\mathcal{L}^k$ осуществимо ЦЧ i_0 такое, что

$$-(2k+3)<i_0\le 2k+3\ \&\ a^{l_0}_{i_0-1}+\frac{1}{m_k}\le x\le a^{l_0}_{i_0}-\frac{1}{m_k}\ \&\ P(u,\{\mathcal{B}(F_l a^{l_0}_{i_0-1}\Delta a^{l_0}_{i_0})\}_l,x).$$

По свойствам НЧ s_k и свойству $ii)$ мы имеем

$$y\in a^{l_0}_{i_0-1}\nabla a^{l_0}_{i_0}\quad\text{и}$$

$$|g(y)-g(x)-u(y-x)|=|g^{l_0}_{i_0}(y)-g^{l_0}_{i_0}(x)-u(y-x)|\le\frac{1}{3^{k+1}}|y-x|\ .$$

Итак, оценка (7) остается в силе и в случае $\exists_l(1\le l\le l_0\ \&\ x\in(H_l)^0)$.

Таким образом, в силу (6) выполнено

$$\forall x(x\in 0\Delta 1\ \&\ \neg(x\in\mathcal{L}^k)\supset\exists u(P(u,\{F_l\}_l,x)\ \&\ \forall y(|y-x|<\frac{1}{s_k}\supset|g(y)-g(x)-u(y-x)|\le\frac{1}{3^k}|y-x|)))$$

и лемма полностью доказана.

<u>Теорема</u>. Пусть $\{F_\ell\}_\ell \in S$. Тогда осуществима равномерно непрерывная функция f такая, что выполнено $Д(f, \{F_\ell\}_\ell)$.

<u>Доказательство</u>. По теореме 3 из [2] и свойствам равномерно непрерывных функций возможно построить возрастающую последовательность НЧ $\{R_k\}_k$ и последовательность S-множеств $\{\mathcal{G}^k\}_k$ такие, что выполнено

$$(8)\quad \begin{cases} \text{для всякого НЧ } k \text{ мера } S\text{-множества } \mathcal{G}^k \text{ меньше чем } \dfrac{1}{3^k} \text{ и имеет место } \mathcal{G}^{k+1} \subseteq \mathcal{G}^k \\ \forall x m (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}^m) \supset \exists z (P(z, \{F_\ell\}_\ell, x) \,\&\, |z| < R_m)). \end{cases}$$

Пусть для всякого k имеет место $\mathcal{G}^k \rightleftharpoons \{H^k_\ell\}_\ell$.

1) Построим индуктивно последовательности $\{g_k\}_k$ - равномерно непрерывных функций, $\{\{G^k_m\}_m\}_k$ - последовательностей ступенчатых остовов, $\{\{\mathcal{Y}^k_m\}_m\}_k$ - последовательностей S-множеств и $\{\{t^k_m\}_m\}_k$ - последовательностей НЧ такие, что для всякого НЧ k выполнено

$i)$ $\{G^k_m\}_m \in L_1$

$ii)$ для всякого НЧ n мера $\mathcal{Y}^k_m$ меньше чем $\dfrac{1}{3^n}$

$iii)$ $\forall x m (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{Y}^k_m) \supset \forall j (1 \le j \le k \supset \exists z_j (P(z_j,$
$\{G^j_\ell\}_\ell, x) \,\&\, \forall y (|y - x| < \frac{1}{t^k_m} \supset |g_j(y) - g_j(x) - z_j(y-x)| \le$
$\le \frac{1}{3^{k+j}} \,|\, y - x \,|))))$

$v)\ \forall xy\,(x\in 0\triangle 1\ \&\ \neg(x\in\mathcal{Y}^{k})\supset g_{k+1}(x)=0\ \&\ |g_{k+1}(x+y)|\le\frac{|y|}{3^{k+1}})$

$vi)$ для почти всех КДЧ $x\in 0\triangle 1$ имеет место

$$\neg(x\in\mathcal{Y}^{k})\supset P(0,\{F_\ell \mp (G_\ell^1 \pm G_\ell^2 \pm\ldots\pm G_\ell^{k})\}_\ell,x)\ .$$

Пусть $k=1$.

По свойствам пространств L_1 и S (см. лемму 1 из [2]) осуществима последовательность ступенчатых остовов $\{G_\ell^1\}_\ell\in$ $\in L_1$ такая, что выполнено

(9) $$\{G_\ell^1\}_\ell=\{\lambda_0(F_\ell,R_1)\}_\ell\ .$$

По лемме 1' возможно к $\{G_\ell^1\}_\ell\in L_1$, рациональному сегменту $0\triangle 1$ и НЧ 3 построить равномерно непрерывную функцию g_1, последовательность S-множеств $\{\mathcal{L}_\ell^1\}_\ell$ и последовательность НЧ $\{s_\ell^1\}_\ell$ такие, что имеет место

а) $\forall m\ Д(g_1,\{G_\ell^1\}_\ell,m,\mathcal{L}_m^1,s_m^1)$

б) $\forall x\,(x\le 0\vee x\ge 1\supset g_1(x)=0)$

в) $\forall x\,(|g_1(x)|<\frac{1}{3})$.

Определим для всякого НЧ m $\mathcal{Y}_m^1 \leftrightharpoons \mathcal{L}_{m+1}^1$ и $t_m^1=s_{m+1}^1$.

Очевидно, что построенные объекты удовлетворяют условиям $i)$ – $v)$. Но в силу (8) и (9) условие $vi)$ тоже выполняется.

Пусть для НЧ k уже построены системы равномерно непрерывных функций $\{g_j\}_{j=1}^{k}$, последовательностей ступенчатых остовов $\{\{G_m^j\}_m\}_{j=1}^{k}$, последовательностей S-множеств $\{\{\mathcal{Y}_m^j\}_m\}_{j=1}^{k}$ и последовательностей НЧ $\{\{t_m^j\}_m\}_{j=1}^{k}$ удовлетворяющие условиям $i) - vi)$

Тогда по свойствам пространств L_1 и S осуществима последовательность ступенчатых остовов $\{G_\ell^{k+1}\}_\ell \in L_1$ такая, что выполнено

$$\{G_\ell^{k+1}\}_\ell = \{\lambda_0(F_\ell \mp (G_\ell^1 \dot{+} \ldots \dot{+} G_\ell^k), R_{k+1})\}_\ell$$

По индукционному предположению (свойство $vi)$) имеет для почти всех КДЧ $x \in 0 \Delta 1$ место

$$\neg(x \in \mathcal{Y}^k) \supset P(0, \{G_\ell^{k+1}\}_\ell, x) .$$

Тогда по лемме 2 возможно (к $\{G_\ell^{k+1}\}_\ell \in L_1$, НЧ $k+1$ и S-множеству $\mathcal{Y}^k$) построить равномерно непрерывную функцию g_{k+1}, последовательность S-множеств $\{\mathcal{L}_m^{k+1}\}_m$ и последовательность НЧ $\{s_m^{k+1}\}_m$ такие, что выполняется

а) $\forall m\ Д(g_{k+1}, \{G_\ell^{k+1}\}_\ell, n, \mathcal{L}_m^{k+1}, s_m^{k+1})$

б) $\forall xy(\neg \exists_\ell (x \in (H_\ell^k)^0) \supset g_{k+1}(x) = 0 \,\&\, |g(x+y)| \leq \frac{|y|}{3^{k+1}})$.

Для всякого НЧ m построим S-множество $\mathcal{Y}_m^{k+1}$, меры меньшей чем $\frac{1}{3^m}$, содержащее S-множества $\mathcal{L}_{m+k+1}^{k+1}$, $\mathcal{Y}_{m+1}^{k}$ и определим НЧ

$$t_m^{k+1} = max(s_{m+k+1}^{k+1}, \max_{1 \leq j \leq k} t_{m+1}^j) .$$

Тогда очевидно, что построенные объекты удовлетворяют условиям $i) - v)$.

Покажем, что условие $vi)$ тоже выполняется.

По свойствам пространств L_1 и S и по определению равенства последовательностей ступенчатых остовов для почти всех КДЧ $x \in 0 \Delta 1$ существуют КДЧ $x, x_1, \ldots\ldots, x_{k+1}$ такие, что

$$P(x, \{F_\ell\}_\ell, x) \;\&\; \forall j\,(1 \leq j \leq k+1 \supset P(x_j, \{G_\ell^j\}_\ell, x))$$

и выполнено

$$x_1 = \lambda(x, R_1) \;\&\; x_2 = \lambda(x - x_1, R_2) \;\&\; \ldots\ldots \;\&\; x_{k+1} = \lambda(x - \sum_{j=1}^{k} x_j, R_{k+1}) \;.$$

Если имеет место $\neg(x \in \mathcal{Y}^{k+1})$, то по (8) $|x| < R_{k+1}$ и следовательно

$$x = \sum_{j=1}^{k+1} x_j \;.$$

Итак, для почти всех КДЧ $x \in 0 \Delta 1$ выполнено

$$\neg(x \in \mathcal{Y}^{k+1}) \supset P(0, \{F_\ell \mathbin{\bar{-}} (G_\ell^1 \dotplus \ldots \dotplus G_\ell^{k+1})\}_\ell, x) \;.$$

2) Существует последовательность S-множеств $\{\mathcal{H}^\ell\}_\ell$ такая, что для всякого НЧ ℓ $\mathcal{H}^{\ell+1} \subseteq \mathcal{H}^\ell$, мера S-множества $\mathcal{H}^\ell$ меньше чем $\frac{1}{3^\ell}$ и для всякого КДЧ $x \in 0 \Delta 1$ такого, что $\neg(x \in \mathcal{H}^\ell)$, имеет место

а) последовательность КДЧ $\{\vartheta(G_m^1 x) - \vartheta(\lambda_0(F_m, R_1) x)\}_m$ определена и сходится к 0

б) для всякого НЧ k последовательность КДЧ

$$\{\vartheta(G_m^{k+1} x) - \vartheta(\lambda_0(F_m \mathbin{\bar{-}} (G_m^1 \dotplus \ldots \dotplus G_m^k), R_{k+1}) x)\}_m$$

определена и сходится к 0 .

Определим для всякого НЧ k $f_k(x) = \sum_{j=1}^{k} g_j(x)$.

По условию iv) очевидно, что последовательность равномерно непрерывных функций $\{f_k\}_k$ является сходящейся к равномерно непрерывной функции. Обозначим ее предел через f .

Мы построим последовательности S -множеств $\{\mathcal{G}^n\}_n$ и НЧ $\{\varkappa_n\}_n$ такие, что выполнено

$$\forall n \; Д(f, \{F_\ell\}_\ell, n, \mathcal{G}^n, \varkappa_n) .$$

Пусть n любое НЧ.

Построим S -множество $\mathcal{G}^n$, меры меньшей чем $\frac{1}{3^n}$, содержащее S -множества $\mathcal{G}^{n+1}$, $\mathcal{H}^{n+1}$, $\mathcal{G}^{n+1}_{n+1}$ и определим НЧ

$$\varkappa_n \leftrightharpoons t^{n+1}_{n+1} .$$

Пусть x КДЧ такое, что $x \in 0 \Delta 1 \;\&\; \neg(x \in \mathcal{G}^n)$.

Тогда по прежнему существуют КДЧ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n+1}$ такие, что $P(\sum_{j=1}^{n+1} x_j, \{F_\ell\}_\ell, x)$ и для $j = 1, \ldots\ldots, n+1$ имеет место

$$\forall y (|x-y| < \frac{1}{\varkappa_n} \supset |g_j(y) - g_j(x) - x_j(y-x)| \leq \frac{1}{3^{n+1+j}} |y-x|) .$$

Пусть y КДЧ, $|x-y| < \frac{1}{\varkappa_n}$, тогда по условию v) получаем

$$|f(y)-f(x)-\sum_{j=1}^{n+1} x_j(y-x)| \leq |f_{n+1}(y) - f_{n+1}(x) - \sum_{j=1}^{n+1} x_j(y-x)| +$$
$$+ |f(y)-f_{n+1}(y)| + |f(x)-f_{n+1}(x)| \leq \sum_{j=1}^{n+1} |g_j(y) - g_j(x) -$$
$$- x_j(y-x)| + |f(y) - f_{n+1}(y)| \leq \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{3^{n+1+j}} |y-x| +$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}} |y-x| \leq \frac{1}{3^{n+1}} |y-x| .$$

Итак, доказано

$$\forall x m \, (x \in 0 \Delta 1 \ \& \ \neg (x \in \mathscr{G}^m) \supset \exists z \, (P(z, \{F_\ell\}_\ell, x) \ \&$$

$$\& \ \forall y \, (|y - x| < \frac{1}{n_m} \supset |f(y) - f(x) - z(y - x)| \le \frac{1}{3^m} |y - x|))) \ .$$

Теорема полностью доказана.

Автор выражает благодарность O. Демуту за внимание к работе.

Литература

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] ДЕМУТ O.: Пространства L_κ и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10 (1969),261-284.

[3] ДЕМУТ O.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math.Univ.Carolinae 12(1971),687-711.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83, 18600 Praha 8
Československo

(Oblatum 12.6.1974)