Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

Достаточное условие представимости конструктивной функции в виде суммы двух суперпозиций абсолютно непрерывных функций

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 13 (1972), No. 2, 265--282

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105415

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

13,2 (1972)

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРЕДСТАВИМОСТИ КОНСТРУКТИВНОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СУММЫ ДВУХ СУПЕРПОЗИЦИЙ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

В классической математике всякая функция, которая непрерывна на сегменте $0 \Delta 1$ и имеет конечную производную квазивсюду на $0 \Delta 1$ ([1], стр. 198), представима в виде суммы двух суперпозиций абсолютно непрерывных функций ([1], стр. 222). В настоящей работе показано, что в конструктивной математике это утверждение неверно, и приведено условие, которое является в конструктивной математике достаточным для названной представимости.

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [3] - [7].

<u>Обозначения</u>. Пусть f функция.

1) Мы обозначим $\mathcal{Y}_0(f)$, если существуют последовательности S_σ -множеств $\{\{L_m^q\}_m\}_q$ и $\{\mathcal{G}^q\}_q$ и последовательность абсолютно непрерывных функций $\{f^q\}_q$ такие, что выполнено $\mathcal{Y}_0(f, \{f^q\}_q, \{\{L_m^q\}_m\}_q, \{\mathcal{G}^q\}_q)$:

для всякого НЧ q сегменты последовательности $\mathcal{G}^q$ являются рациональными, $\{L_m^{q+1}\}_m \subseteq \{L_m^q\}_m \subseteq 0 \Delta 1$,

---

AMS, Primary: 02E99 Secondary: 26A72 Ref. Ž. 2.644.2

$\mathcal{G}^{q+1} \subseteq \mathcal{G}^{q}$, мера $\mathcal{G}^{q}$ меньше чем $\frac{1}{2^q}$ и $\forall x ((x \in \{L^q_m\}_m \supset f(x) \in \mathcal{G}^q \ \& \ f^q(x) \in \mathcal{G}^q) \ \&$

$\& (\neg \exists m (\partial \lambda (L^q_m) < x < \partial m (L^q_m)) \supset f^q(x) =$

$= f(x))) \ \& \ \forall \ell (q < \ell \supset \sum_{m=1}^{\infty} V [f^q]_{\llcorner} L^{\ell}_{m \lrcorner} < \frac{1}{2^{\ell}})$.

2) Мы обозначим $Ш_1(f)$, если для всякого сегмента $\xi \Delta \eta$, $\xi \Delta \eta \subseteq 0 \Delta 1$, существуют $\mathcal{S}_{\sigma}$-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $|\xi \Delta \eta|$ и равномерно непрерывная функция $\mathcal{U}$ такие, что

$\forall x (x \in \xi \Delta \eta \ \& \ \neg (x \in \mathcal{G}) \supset D(\mathcal{U}(x), f, x))$.

<u>Теорема</u>. Пусть f равномерно непрерывная функция и пусть $Ш_1(f)$. Тогда существуют абсолютно непрерывные функции $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ и ψ_2 такие, что $f = \psi_1 * \varphi_1 + \psi_2 * \varphi_2$ и $0 \leq \varphi_1 \leq 1 \ \& \ 0 \leq \varphi_2 \leq 1$.

<u>Замечание 1</u>: 1) Если для функции f выполнено $\alpha(f)$, то f равномерно непрерывна и согласно [6] выполнено $Ш_1(f)$.

2) Если Φ покрытие, а f функция такие, что $f = f/\Phi$, то - очевидно - $Ш_1(f)$.

Ввиду [7] и того, что для всякой функции f , которая равномерно непрерывна или удовлетворяет условию $\mathcal{Y}_0(f)$, существуют РЧ a и НЧ k такие, что $a < f < a + k$, и, следовательно,

$0 < \frac{1}{k}(f - a) < 1 \ \& \ (\mathcal{Y}_0(f) \equiv \mathcal{Y}_1(\frac{1}{k} \cdot (f - a)))$,

верно следующее утверждение.

<u>Лемма 1</u>. Для функции f существуют абсолютно непрерывные функции g_1 и g_2 такие, что $f = g_2 * g_1$ и

$0 \le g_1 \le 1$ в том и только том случае, если $\mathcal{Y}_0(f)$.

Если $\mathcal{Y}_0(f)$, то существуют сегмент $a \Delta b$, $\langle \sigma, f \rangle_{\llcorner} 0 \Delta 1_{\lrcorner} \subseteq a \Delta b$, абсолютно непрерывные функции φ и ψ и конструктивная функция ψ_0, которая абсолютно непрерывна и возрастает на $a \Delta b$ такие, что $\varphi = \psi_0 * f \,\&\, 0 \le \varphi \le 1 \,\&\, \forall x y (|\varphi(x) - \varphi(y)| \le |x - y|)$, ψ является неубывающей, $\forall x (x \in a \Delta b \supset \psi(\psi_0(x)) = x)$ и, следовательно, $f = \psi * \varphi$.

Лемма 2. Пусть f равномерно непрерывная функция, $\xi \Delta \eta$ сегмент, $\xi \Delta \eta \subseteq 0 \Delta 1$, а $\mathcal{G}$ $\mathcal{S}_6$-множество меры меньшей чем $|\xi \Delta \eta|$ такие, что $\forall x (x \in \xi \Delta \eta \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}) \supset \exists u \, \mathrm{D}(u, f, x))$.

Тогда существует $\mathcal{S}_6$-множество $\{L_n\}_n$ меры меньшей чем $|\xi \Delta \eta|$ такое, что ряд $\sum_n \langle \omega, f \rangle_{\llcorner} L_{n \lrcorner}$ сходится и

$$\{L_n\}_n \subseteq \xi \Delta \eta \,\&\, \forall x (x \in \xi \nabla \eta \,\&\, x \in \mathcal{G} \supset \exists n (\partial \lambda(L_n) < x < \partial_n(L_n)) \,\&\, \partial \lambda(L_1) = \xi \,\&\, \partial n(L_2) = \eta . \tag{1}$$

Доказательство. а) Пусть x_0 и u КДЧ, для которых выполнено $0 \le x_0 \le 1 \,\&\, \mathrm{D}(u, f, x_0)$. Тогда существуют возрастающая последовательность НЧ $\{m_n\}_n$ и последовательности КДЧ $\{z_n\}_n$ и $\{v_n\}_n$ такие, что для всякого НЧ n выполнено $\forall x (|x - x_0| \le \frac{1}{m_n} \supset |f(x) - f(x_0) - u \cdot (x - x_0)| \le \frac{1}{2^n} \cdot |x - x_0|) \,\&\, \mathrm{Sup}(z_n, \lambda y (\exists x (|x - x_0| \ge \frac{1}{m_n} \,\&\, y = \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|))) \,\&\, v_n = \max(z_n, |u| + \frac{1}{2^n})$.

Тогда $\forall n\,(|v_n - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}})$ и для предела v последовательности $\{v_n\}_n$ выполнено $S(v, x_0)$, где

$$\forall wz\,(S(w,z) \rightleftharpoons Sup\,(w, \wedge y\,(\exists x\,(\neg(x=z)\ \&\ y = \\ = \left|\frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right|)))) .$$

б) Существует последовательность сегментов $\{H_k\}_k$ такая, что ряд $\sum_k |H_k|$ сходится к КДЧ меньшему чем $|\xi \Delta \eta|$ и $\forall x\,((x \in \mathcal{Y} \vee x = \xi \vee x = \eta \vee \exists a\,(\xi < a < \eta\ \&$ $\&\ x = a)) \supset \neg\neg \exists k\,(x \in H_k))$.

Исходя от $\{H_k\}_k$ можно согласно лемме 8 из [7] построить S_σ -множество $\{P_k\}_k$ меры меньшей чем $|\xi \Delta \eta|$ и последовательность КДЧ $\{\lambda_k\}_k$ такие, что

$$\forall x n\,(x \in H_n \supset \exists k\,(\partial l\,(P_k) < x < \partial m\,(P_k)))\ \&$$

$$\&\ \forall x\,(\exists k\,(x = \lambda_k) \equiv \exists k\,(x \in \xi \Delta \eta\ \&\ (x = \partial l\,(P_k) \vee x = \partial m\,(P_k)))).$$

Пусть $\mathcal{M} \rightleftharpoons \wedge y\,(y \in \xi \nabla \eta\ \&\ \neg \exists k\,(\partial l\,(P_k) < y < \partial m\,(P_k)))$.

Тогда $\forall k\,(\lambda_k \in \mathcal{M})\ \&\ \forall x n\,(x \in \mathcal{M} \supset \exists k\,(|\lambda_k - x| < \frac{1}{n}))$ и $\mathcal{M}$ нормальное множество, которое образует полное сепарабельное подпространство пространства всех КДЧ. Мы имеем $\forall x\,(x \in \mathcal{M} \supset \exists u\, D(u, f, x))$ и, следовательно, согласно а) $\forall x\,(x \in \mathcal{M} \supset \exists v\ S(v, x))$. Таким образом, существует алгорифмический оператор $\mathcal{L}$ из $\mathcal{M}$ в пространство КДЧ такой, что $\forall x\,(x \in \mathcal{M} \supset !\,\mathcal{L}\llcorner x \lrcorner\ \&\ S(\mathcal{L}\llcorner x \lrcorner, x))$.

Можно построить КДЧ x_0, $x_0 \in \xi \nabla \eta\ \&\ \neg(x_0 \in \{P_k\}_k)$, которое является точкой разрежения S_σ -множества $\{P_k\}_k$. Выполнено $x_0 \in \mathcal{M}$ и согласно сказанному и теореме Г.С.

Цейтина [2] существуют РЧ $\mathscr{b}_1$ и $\mathscr{b}_2$ и НЧ q такие, что

$$(2)\quad \xi < \mathscr{b}_1 < x_0 < \mathscr{b}_2 < \eta \;\&\; \nu \ulcorner \{P_k\}_k \urcorner \llcorner \mathscr{b}_1 \Delta \mathscr{b}_2 \lrcorner < |\mathscr{b}_1 \Delta \mathscr{b}_2| \;\&$$
$$\& \; \forall x (x \in \mathscr{M} \;\&\; x \in \mathscr{b}_1 \Delta \mathscr{b}_2 \supset |\mathscr{L}\llcorner x \lrcorner| < q) \;.$$

Ввиду этого и утверждения леммы 8 из [7] можно построить бесконечную последовательность разных НЧ $\{k_\ell\}_\ell$, которая содержит именно те НЧ k , для которых сегменты P_k и $\mathscr{b}_1 \Delta \mathscr{b}_2$ перекрываются. Можно требовать, чтобы имело место $\mathscr{b}_1 \in P_{k_1} \;\&$ $\& \; \mathscr{b}_2 \in P_{k_2}$. Мы определим $L_1 \rightleftharpoons \xi \Delta \mathfrak{I}m(P_{k_1})$, $L_2 \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \mathfrak{I}\lambda (P_{k_2}) \Delta \eta$ и для всякого НЧ m, $2 < m$, $L_m \rightleftharpoons P_{k_m}$. Тогда $\{L_m\}_m$ S_σ -множество меры меньшей чем $|\xi \Delta \eta|$, выполнено (1), $\mathfrak{I}m(L_1) \in \mathscr{M} \;\&\; \forall m (2 \le m \supset \mathfrak{I}\lambda(L_m) \in \mathscr{M})$ и, следовательно, ввиду (2) верно $\forall m (\langle w, f \rangle \llcorner L_m \lrcorner \le 2q.|L_m|)$.

<u>Доказательство теоремы.</u> а) Согласно лемме 2, [3] и [4] существуют нормальные алгорифмы H , $\mathscr{C}$, $\mathscr{M}$, q и $\varkappa$ такие, что для всяких сегмента $\xi \Delta \eta$, $\xi \Delta \eta \subseteq 0 \Delta 1$ и НЧ m

1) $\forall \ell (!\mathrm{H}\llcorner \xi \Delta \eta \,\square\, m \ell \lrcorner)$, для всякого НЧ i , $1 \le i \le m$, последовательность $\{\widetilde{\mathrm{H}}_{\xi\Delta\eta\square m}\llcorner m.(\ell-1)+i \lrcorner\}_\ell$ является S_σ -множеством меры меньшей чем $\frac{1}{m}.|\xi \Delta \eta|$, $(\{\widetilde{\mathrm{H}}_{\xi\Delta\eta\square m}\llcorner m.(\ell-1)+i\lrcorner\}_\ell \subseteq (\xi + \frac{i-1}{m}.|\xi\Delta\eta|)\Delta(\xi+\frac{i}{m}.$ $.|\xi \Delta \eta|)) \;\&\; \mathfrak{I}\lambda(\widetilde{\mathrm{H}}_{\xi\Delta\eta\square m}\llcorner i \lrcorner) = \xi + \frac{i-1}{m}.|\xi\Delta\eta| \;\&$ $\& \; \mathfrak{I}m(\widetilde{\mathrm{H}}_{\xi\Delta\eta\square m}\llcorner m+i \lrcorner) = \xi + \frac{i}{m}.|\xi \Delta \eta|$

и ряд $\sum_\ell \langle \omega, f \rangle \llcorner \mathrm{H} \llcorner \xi \Delta \eta \,\square\, m \ell \lrcorner \lrcorner$ сходится;

2) $\mathscr{C}_{\xi\Delta\eta\square m\square}$ равномерно непрерывная функция,

$\forall x(x \in \xi \Delta \eta \;\&\; \neg (x \in \widetilde{H}_{\xi\Delta\eta\square m}) \supset D(\widetilde{\mathcal{U}}_{\xi\Delta\eta\square m\square}\llcorner x \lrcorner , f, x))$;

3) для всякого НЧ i , $1 \le i \le m$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\xi\Delta\eta\square m i}$ элемент M такой, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно

$$x \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\xi\Delta\eta\square m i} \equiv (x \in (\xi + \frac{i-1}{m} \cdot |\xi \Delta \eta|) \Delta (\xi + \frac{i}{m} \cdot |\xi\Delta\eta|) \;\&$$
$$\& \neg (x \in \widetilde{H}_{\xi\Delta\eta\square m})) ;$$

4) $\widetilde{\mathfrak{g}}_{0\square\xi\Delta\eta\square m\square}$ и $\widetilde{\mathfrak{g}}_{1\square\xi\Delta\eta\square m\square}$ абсолютно непрерывные функции, для которых выполнено

$$\forall x (0 \le x \le 1 \supset (\widetilde{\mathfrak{g}}_{0\square\xi\Delta\eta\square m\square}\llcorner x \lrcorner = (f(\eta) - f(\xi)) \cdot \frac{1}{m} \cdot$$
$$\cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\int_0^1 \chi\llcorner \widetilde{\mathfrak{M}}_{\xi\Delta\eta\square m i}\lrcorner} \cdot \int_0^x \chi\llcorner \widetilde{\mathfrak{M}}_{\xi\Delta\eta\square m i}\lrcorner) \& (\widetilde{\mathfrak{g}}_{1\square\xi\Delta\eta\square m\square}\llcorner x \lrcorner =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (f(\xi + \frac{i}{m} \cdot |\xi\Delta\eta|) - f(\xi + \frac{i-1}{m} \cdot |\xi\Delta\eta|)) \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{\int_0^1 \chi\llcorner \widetilde{\mathfrak{M}}_{\xi\Delta\eta\square m i}\lrcorner} \cdot \int_0^x \chi\llcorner \widetilde{\mathfrak{M}}_{\xi\Delta\eta\square m i}\lrcorner))$$

и, следовательно, функция $\widetilde{\mathfrak{g}}_{0\square\xi\Delta\eta\square m\square}$ не может не быть монотонной, $\forall j x (0 \le j \le 1 \supset (x \le \xi \supset \widetilde{\mathfrak{g}}_{j\square\xi\Delta\eta\square m\square}\llcorner x \lrcorner = 0) \;\&$

$$\& (\eta \le x \supset \widetilde{\mathfrak{g}}_{j\square\xi\Delta\eta\square m\square}\llcorner x \lrcorner = f(\eta) - f(\xi)) \;\&$$
$$\& \forall \ell (x \in H\llcorner \xi\Delta\eta\square m \ell \lrcorner \supset \widetilde{\mathfrak{g}}_{j\square\xi\Delta\eta\square m\square}\llcorner x \lrcorner =$$
$$= \widetilde{\mathfrak{g}}_{j\square\xi\Delta\eta\square m\square}\llcorner \text{Эл}(H\llcorner \xi\Delta\eta\square m \ell\lrcorner)\lrcorner)) ;$$

5) $\widetilde{\mathfrak{X}}_{0\square\xi\Delta\eta\square m\square}$ и $\widetilde{\mathfrak{X}}_{1\square\xi\Delta\eta\square m\square}$ равномерно непрерывные функции такие, что $\forall j x (0 \le j \le 1 \supset \widetilde{\mathfrak{X}}_{j\square\xi\Delta\eta\square m\square}\llcorner x \lrcorner =$

$= f(\max(\min(x, \eta), \xi)) - f(\xi) - \tilde{\varphi}_{j \square \xi \Delta \eta \square m \square \llcorner x \lrcorner})$

и, следовательно,

$$\forall j (0 \leq j \leq 1 \supset \forall x ((x \leq \xi \vee \eta \leq x) \supset \tilde{\varkappa}_{j \square \xi \Delta \eta \square m \square \llcorner x \lrcorner} = 0) \&$$

$$\& \forall \ell \exists z \forall x (x \in \tilde{H}_{\xi \Delta \eta \square m \llcorner \ell \lrcorner} \supset \tilde{\varkappa}_{j \square \xi \Delta \eta \square m \square \llcorner x \lrcorner} = f(x) + z)) \&$$

$$\& \langle \omega, \tilde{\varkappa}_{1 \square \xi \Delta \eta \square m \square} \rangle_{\llcorner} \xi \Delta \eta_{\lrcorner} \leq$$

$$\leq 2 . \max_{1 \leq i \leq m} \langle \omega, f \rangle_{\llcorner} (\xi + \frac{i-1}{m} \cdot |\xi \Delta \eta|) \Delta (\xi + \frac{i}{m} \cdot |\xi \Delta \eta|)_{\lrcorner} .$$

б) Пусть $\xi \Delta \eta$ сегмент, $\xi \Delta \eta \subseteq 0 \Delta 1$, m и t НЧ и $\{p_\ell\}_\ell$ последовательность НЧ. Тогда согласно а) и лемме 9 из [7] функция ψ, $\forall x (\psi(x) =$

$$= f(\max(\min(x, \eta), \xi)) - f(\xi) - \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{\varkappa}_{sg((t+1) \dot{-} \ell) \square H_{\llcorner} \xi \Delta \eta \square m \ell_{\lrcorner} \square p_\ell \square \llcorner x \lrcorner}),$$

является абсолютно непрерывной. Итак, мы получаем, что функция ψ_1,

$$\psi_1 \rightleftharpoons \tilde{\varkappa}_{1 \square \xi \Delta \eta \square m \square} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{\varkappa}_{sg((t+1) \dot{-} \ell) \square H_{\llcorner} \xi \Delta \eta \square m \ell_{\lrcorner} \square p_\ell \square}$$

абсолютно непрерывна, ибо $\psi_1 = \psi - \tilde{\varphi}_{1 \square \xi \Delta \eta \square m \square}$.

Выполнено $\forall x ((x \leq \xi \vee \eta \leq x) \supset \psi_1(x) = 0) \&$

$$\& (\langle \sigma, \psi_1 \rangle_{\llcorner} \xi \Delta \eta_{\lrcorner} \leq \langle \sigma, \tilde{\varkappa}_{1 \square \xi \Delta \eta \square m \square} \rangle_{\llcorner} \xi \Delta \eta_{\lrcorner}) \& (\langle \sigma, \tilde{\varkappa}_{1 \square \xi \Delta \eta \square m \square} -$$

$$- \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{\varkappa}_{1 \square H_{\llcorner} \xi \Delta \eta \square m \ell_{\lrcorner} \square p_\ell \square} \rangle_{\llcorner} \xi \Delta \eta_{\lrcorner} \leq \langle \sigma, \tilde{\varkappa}_{1 \square \xi \Delta \eta \square m \square} \rangle_{\llcorner} \xi \Delta \eta_{\lrcorner}) .$$

в) Функция f равномерно непрерывна. Следовательно, существует возрастающая последовательность НЧ $\{m_n\}_n$ такая, что $\forall x y n (|x - y| \leq \frac{1}{m_n} \supset |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^{n+3}+1})$.

α) Мы определим ${}^{0}\mathrm{H} \rightleftharpoons 0 \Delta 1$.

β) Пусть s НЧ, $r_1, r_2, \ldots, r_{s-1}$ НЧ, пусть уже построен сегмент ${}^{s-1}\mathrm{H}^{r_1, r_2, \ldots, r_{s-1}}$. Мы для всяких НЧ ℓ и ЦЧ j , $0 \leq j \leq 1$, определим

$${}^{s}\mathrm{H}^{r_1, \ldots, r_{s-1}, \ell} \rightleftharpoons \mathrm{H}_{\llcorner}{}^{s-1}\mathrm{H}^{r_1, \ldots, r_{s-1}} \square\, m_{s+r_1+\ldots+r_{s-1}}\, \ell_{\lrcorner} ,$$

$${}^{s}g^{r_1, \ldots, r_{s-1}} \rightleftharpoons \tilde{g}_{0 \square}{}^{s-1}\mathrm{H}^{r_1, \ldots, r_{s-1}} \square\, m_{s+r_1+\ldots+r_{s-1}} \square$$

и $${}^{s}\varkappa_{j}^{r_1, \ldots, r_{s-1}} \rightleftharpoons \tilde{\varkappa}_{j \square}{}^{s-1}\mathrm{H}^{r_1, \ldots, r_{s-1}} \square\, m_{s+r_1+\ldots+r_{s-1}} \square .$$

Тогда $\{{}^{s}\mathrm{H}^{r_1, \ldots, r_{s-1}, \ell}\}_{\ell}$ $\mathcal{S}_{\sigma}$ -множество меры меньшей чем $|{}^{s-1}\mathrm{H}^{r_1, \ldots, r_{s-1}}|$, которое содержится в ${}^{s-1}\mathrm{H}^{r_1, \ldots, r_{s-1}}$, ${}^{s}g^{r_1, \ldots, r_{s-1}}$ абсолютно непрерывная функция, которая не может не быть монотонной,

$$\langle \omega, {}^{s}\varkappa_{1}^{r_1, \ldots, r_{s-1}} \rangle_{\llcorner}{}^{s-1}\mathrm{H}^{r_1, \ldots, r_{s-1}}{}_{\lrcorner} < \frac{1}{2^{2+s+r_1+\ldots+r_{s-1}}} ,$$

ряд $\sum\limits_{\ell} \langle \omega, f \rangle_{\llcorner}{}^{s}\mathrm{H}^{r_1, \ldots, r_{s-1}, \ell}{}_{\lrcorner}$ сходится, и, следовательно, существует возрастающая последовательность НЧ $\{{}^{s}t_{m}^{r_1, \ldots, r_{s-1}}\}_{m}$ такая, что $3 \leq {}^{s}t_{1}^{r_1, \ldots, r_{s-1}}$ &

$$\& \forall m q \Big(\sum_{\ell = {}^{s}t_{m}^{r_1, \ldots, r_{s-1}}+1}^{{}^{s}t_{m}^{r_1, \ldots, r_{s-1}}+q} \langle \omega, f \rangle_{\llcorner}{}^{s}\mathrm{H}^{r_1, \ldots, r_{s-1}, \ell}{}_{\lrcorner} < \frac{1}{1+2^{4+m+s+r_1+\ldots+r_{s-1}}} \Big).$$

Заметим, что функция $f - {}^{1}\varkappa_{1}$ абсолютно непрерывна.

г) Мы для всякого НЧ ℓ определим

$$h_{\ell} \rightleftharpoons {}^{1}\varkappa_{1} + \sum_{\tau=1}^{\ell-1} (-1)^{\tau} \sum_{r_1=1}^{{}^{1}t_{\ell-1}} \sum_{r_2=1}^{{}^{2}t_{\ell-1}^{r_1}} \ldots \sum_{r_\tau=1}^{{}^{\tau}t_{\ell-1}^{r_1, \ldots, r_{\tau-1}}} {}^{\tau+1}\varkappa_{1}^{r_1, \ldots, r_{\tau}}$$

Тогда $\forall \ell\,(|h_{\ell+1}-h_\ell| < \frac{1}{2^{\ell+3}})$ и мы посредством h обозначим равномерно непрерывную функцию, которая является пределом последовательности $\{h_\ell\}_\ell$.

Пусть q НЧ, $p_1, p_2, \ldots, p_{2q}$ НЧ. Тогда для всякого КДЧ x, $x \in {}^{2q}H^{p_1,\ldots,p_{2q}}$,

$$h(x) = h(\ni\lambda({}^{2q}H^{p_1,\ldots,p_{2q}})) + {}^{2q+1}\varkappa_1^{p_1,\ldots,p_{2q}}(x) -$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p_{2q+1}=1}^{\infty}\sum_{p_{2q+2}=1}^{\infty}\ldots\sum_{p_{2q+2j-1}=1}^{\infty}({}^{2q+2j}\varkappa_1^{p_1,\ldots,p_{2q+2j-1}}(x) -$$

$$-\sum_{p_{2q+2j}=1}^{\infty}{}^{2q+2j+1}\varkappa_1^{p_1,\ldots,p_{2q+2j}}(x))$$

и, следовательно, по б) и в)

$$\langle\omega, h\rangle_{\llcorner}{}^{2q}H^{p_1,\ldots,p_{2q}}{}_{\lrcorner} < \frac{1}{2^{2q+2+p_1+\ldots+p_{2q}}},$$

$$\langle\omega, f-h\rangle_{\llcorner}{}^{2q}H^{p_1,\ldots,p_{2q}}{}_{\lrcorner} < \langle\omega, f\rangle_{\llcorner}{}^{2q}H^{p_1,\ldots,p_{2q}}{}_{\lrcorner} + \frac{1}{2^{2q+2+p_1+\ldots+p_{2q}}}.$$

Аналогично,

$$\langle\omega, f-h\rangle_{\llcorner}{}^{2q-1}H^{p_1,\ldots,p_{2q-1}}{}_{\lrcorner} < \langle\omega, f\rangle_{\llcorner}{}^{2q}H^{p_1,\ldots,p_{2q}}{}_{\lrcorner} + \frac{1}{2^{2q+2+p_1+\ldots+p_{2q-1}}}$$

и

$$\langle\omega, h\rangle_{\llcorner}{}^{2q-1}H^{p_1,\ldots,p_{2q-1}}{}_{\lrcorner} < \langle\omega, f\rangle_{\llcorner}{}^{2q-1}H^{p_1,\ldots,p_{2q-1}}{}_{\lrcorner} + \frac{1}{2^{2q+1+p_1+\ldots+p_{2q-1}}}.$$

д) Пусть для всякого НЧ ℓ — $\{L_k^\ell\}_k$ S_σ-множество, образованное сегментами ${}^{\tau}H^{p_1,\ldots,p_\tau}$, где $1 \le \tau \le \ell \,\&\, \forall i\,(1 \le i < \tau \supset 1 \le p_i \le {}^{i}t_{\ell-1}^{p_1,\ldots,p_{i-1}})\,\&\,(\tau < \ell \supset {}^{\tau}t_{\ell-1}^{p_1,\ldots,p_{\tau-1}} + 1 \le p_\tau)$. Для всякого НЧ j мы на основании оценок из в) и г) получаем $\sum_{k=1}^{\infty}\langle\omega, h\rangle_{\llcorner}L_k^{2j}{}_{\lrcorner} < \frac{1}{2^{2j+1}}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\langle\omega, f-h\rangle_{\llcorner}L_k^{2j-1}{}_{\lrcorner} < \frac{1}{2^{2j}}$.

Таким образом, существуют S_σ-множества $\overline{\mathscr{C}}^{2j}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{2j+1}}$ и $\overline{\mathscr{C}}^{2j-1}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{2j}}$

такие, что

$$\forall x((x \in \{L^{2j}_{k}\}_{k} \supset h(x) \in \overline{\mathcal{G}}^{2j}) \& (x \in \{L^{2j-1}_{k}\}_{k} \supset (f(x) - h(x)) \in \overline{\mathcal{G}}^{2j-1}))$$

и что $\overline{\mathcal{G}}^{2j}$ и $\overline{\mathcal{G}}^{2j-1}$ – последовательности рациональных сегментов. Согласно замечанию 1 из [4] можно построить последовательность $S_{\mathcal{B}}$ -множеств $\{\mathcal{G}^{\ell}\}_{\ell}$ такую, что для всякого НЧ ℓ – $\mathcal{G}^{\ell}$ последовательность рациональных сегментов, мера $\mathcal{G}^{\ell}$ меньше чем $\frac{1}{2^{\ell}}$, $\overline{\mathcal{G}}^{\ell} \subseteq \mathcal{G}^{\ell}$ и $\mathcal{G}^{\ell+1} \subseteq \mathcal{G}^{\ell}$.

е) Пусть j НЧ. Мы определим

$$\varphi_{2j} \rightleftharpoons {}^{1}\varkappa_{1} - \sum_{n_1=1}^{\infty} {}^{2}\varkappa^{n_1}_{sg((^{1}t_{2j-1}+1) \dot{-} n_1)} +$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{j-1} \sum_{n_1=1}^{^{1}t_{2j-1}} \sum_{n_2=1}^{^{2}t^{n_1}_{2j-1}} \dots \sum_{n_{2\tau}=1}^{^{2\tau}t^{n_1,\dots,n_{2\tau-1}}_{2j-1}} ({}^{2\tau+1}\varkappa_{1}^{n_1,\dots,n_{2\tau}} -$$

$$- \sum_{n_{2\tau+1}=1}^{\infty} {}^{2\tau+2}\varkappa^{n_1,\dots,n_{2\tau+1}}_{sg((^{2\tau+1}t^{n_1,\dots,n_{2\tau}}+1) \dot{-} n_{2\tau+1})})$$

и

$$\varphi_{2j-1} \rightleftharpoons f - {}^{1}\varkappa_{1} + \sum_{\tau=1}^{j-1} \sum_{n_1=1}^{^{1}t_{2j-2}} \sum_{n_2=1}^{^{2}t^{n_1}_{2j-2}} \dots \sum_{n_{2\tau-1}=1}^{^{2\tau-1}t^{n_1,\dots,n_{2\tau-2}}_{2j-2}} ({}^{2\tau}\varkappa_{1}^{n_1,\dots,n_{2\tau-1}} -$$

$$- \sum_{n_{2\tau}=1}^{\infty} {}^{2\tau+1}\varkappa^{n_1,\dots,n_{2\tau}}_{sg((^{2\tau}t^{n_1,\dots,n_{2\tau-1}}_{2j-2}+1) \dot{-} n_{2\tau})}) .$$

Тогда согласно б) функции φ_{2j} и φ_{2j-1} абсолютно непрерывны. Выполнено

$$\forall x((\neg \exists k(\ni n(L^{2j}_{k}) < x < \ni m(L^{2j}_{k})) \supset \varphi_{2j}(x) = h_{2j}(x) =$$

$$= h(x)) \& (\neg \exists k(\ni n(L^{2j-1}_{k}) < x < \ni m(L^{2j-1}_{k})) \supset \varphi_{2j-1}(x) =$$

$$= f(x) - h_{2j-1}(x) = f(x) - h(x))) .$$

Легко показать, что для всякого НЧ k верно $(\langle \sigma, \varphi_{2j} \rangle_{\llcorner} L^{2j}_{k \lrcorner} \subseteq$

$\langle \sigma, h \rangle_{\llcorner} L^{2j}_{k} \lrcorner) \& (\langle \sigma, \varphi_{2j-1} \rangle_{\llcorner} L^{2j-1}_{k} \lrcorner \leq \langle \sigma, f-h \rangle_{\llcorner} L^{2j-1}_{k} \lrcorner).$

Ввиду этого и д) имеет место

$$\forall x ((x \in \{L^{2j}_{k}\}_{k} \supset h(x) \in \mathcal{G}^{2j} \& \varphi_{2j}(x) \in \mathcal{G}^{2j}) \& (x \in \{L^{2j-1}_{k}\}_{k} \supset$$

$$\supset (f(x) - h(x)) \in \mathcal{G}^{2j-1} \& \varphi_{2j-1}(x) \in \mathcal{G}^{2j-1})) .$$

Для любых НЧ q и НЧ $p_1, p_2, \dots, p_{2q}$ верны следующие оценки:

если $(j \leq q \vee \exists s (1 \leq s \leq 2q \& {}^{s}t^{p_1,\dots,p_{s-1}}_{2j-1} + 1 \leq p_s))$, то

$V[\varphi_{2j}]_{\llcorner} {}^{2q}H^{p_1,\dots,p_{2q}} \lrcorner = 0$;

если

$1 \leq q \leq j \& \forall s (1 \leq s < 2q-1 \supset 1 \leq p_s \leq {}^{s}t^{p_1,\dots,p_{s-1}}_{2j-1}) \& {}^{2q-1}t^{p_1,\dots,p_{2q-2}}_{2j-1} + 1 \leq p_{2q-1}$,

то

$$V[\varphi_{2j}]_{\llcorner} {}^{2q-1}H^{p_1,\dots,p_{2q-1}} \lrcorner = V[{}^{2q}g^{p_1,\dots,p_{2q-1}}]_{\llcorner} {}^{2q-1}H^{p_1,\dots,p_{2q-1}} \lrcorner =$$

$$= |f(\exists m({}^{2q-1}H^{p_1,\dots,p_{2q-1}})) - f(\exists n({}^{2q-1}H^{p_1,\dots,p_{2q-1}}))| \leq$$

$$\leq \langle \omega, f \rangle_{\llcorner} {}^{2q-1}H^{p_1,\dots,p_{2q-1}} \lrcorner ;$$

если $(j < q \vee \exists s (1 \leq s \leq 2q-2 \& {}^{s}t^{p_1,\dots,p_{s-1}}_{2j-1} + 1 \leq p_s))$, то

$V[\varphi_{2j}]_{\llcorner} {}^{2q-1}H^{p_1,\dots,p_{2q-1}} \lrcorner = 0$;

если $(j \leq q \vee \exists s (1 \leq s \leq 2q-1 \& {}^{s}t^{p_1,\dots,p_{s-1}}_{2j-2} + 1 \leq p_s))$, то

$V[\varphi_{2j-1}]_{\llcorner} {}^{2q-1}H^{p_1,\dots,p_{2q-1}} \lrcorner = 0$;

если $1 \leq q \leq j-1 \& \forall s (1 \leq s \leq 2q-1 \supset 1 \leq p_s \leq {}^{s}t^{p_1,\dots,p_{s-1}}_{2j-2}) \&$

$\& {}^{2q}t^{p_1,\dots,p_{2q-1}}_{2j-1} + 1 \leq p_{2q}$, то

$V[\varphi_{2j-1}]_{\llcorner} {}^{2q}H^{p_1,\dots,p_{2q}} \lrcorner \leq \langle \omega, f \rangle_{\llcorner} {}^{2q}H^{p_1,\dots,p_{2q}} \lrcorner$;

если $(j \leq q \vee \exists s (1 \leq s \leq 2q-1 \& {}^{s}t^{p_1,\dots,p_{s-1}}_{2j-2} + 1 \leq p_s))$, то

$V[\varphi_{2j-1}]_{\llcorner}{}^{2q}H^{p_1,\dots,p_{2q}}{}_{\lrcorner} = 0$.

Следовательно, для всякого НЧ ℓ, $j < \ell$, верно $\sum_{k=1}^{\infty} V[\varphi_{2j}]_{\llcorner} L_k^{2\ell}{}_{\lrcorner} < \frac{1}{2^{2\ell+3}}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} V[\varphi_{2j-1}]_{\llcorner} L_k^{2\ell-1}{}_{\lrcorner} < \frac{1}{2^{2\ell+2}}$.

ж) Итак, мы доказали $\mathcal{Y}_0(h, \{\varphi_{2\ell}\}_\ell, \{\{L_k^{2\ell}\}_k\}_\ell, \{\psi^{2\ell}\}_\ell) \,\&\, \mathcal{Y}_0(f-h, \{\varphi_{2\ell-1}\}_\ell, \{\{L^{2\ell-1}\}_k\}_\ell, \{\psi^{2\ell-1}\}_\ell)$. Для завершения доказательства достаточно применить лемму 1.

На основании леммы 1 легко доказать следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть функция g представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций, а $\{L_k\}_k$ S_σ-множество, содержащееся в $0 \Delta 1$. Тогда можно построить функцию $\bar{g}$ и абсолютно непрерывные функции $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ такие, что

$$\forall x ((x \in 0\Delta 1 \,\&\, \neg \exists k (\partial\ell(L_k) < x < \partial m(L_k)) \supset$$
$$\supset \bar{g}(x) = g(x)) \,\&\, \forall k (x \in L_k \supset \bar{g}(x) =$$
$$= g(\partial\ell(L_k)) + \frac{x - \partial\ell(L_k)}{|L_k|} \cdot (g(\partial m(L_k)) -$$
$$- g(\partial\ell(L_k))))) \,\&\, 0 \le \bar{\varphi} \le 1 \,\&\, \bar{g} = \bar{\psi} * \bar{\varphi} \quad .$$

Лемма 4. Пусть функция f представима в виде суммы двух суперпозиций абсолютно непрерывных функций и пусть $\xi \Delta \eta$ сегмент такой, что $\xi \Delta \eta \subseteq 0 \Delta 1$, f не может не быть монотонной на $\xi \Delta \eta$ и f не является абсолютно непрерывной на $\xi \Delta \eta$.

Тогда существуют равномерно непрерывная функция $\varkappa$ и $\mathfrak{Э}_\sigma$-множество $\mathcal{Y}$ меры меньшей чем $|\xi \Delta \eta|$ такие, что $\mathcal{Y} \subseteq \xi \Delta \eta \,\&\, \forall x (x \in \xi \Delta \eta \,\&\, \neg (x \in \mathcal{Y}) \supset \mathfrak{D}(\varkappa(x), f, x))$.

<u>Доказательство</u>. Выполнено $f(\xi) < f(\eta) \vee f(\eta) < f(\xi)$. Без ограничения общности можно предположить, что $f(\xi) < < f(\eta)$. Тогда f является неубывающей на $\xi \Delta \eta$. Согласно нашим предположениям, [7], и лемме 1 существуют абсолютно непрерывные функции $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ и ψ_2 такие, что $f = \psi_1 * \varphi_1 + \psi_2 * \varphi_2$ и для всякого НЧ j, $1 \leq j \leq 2$, ψ_j является неубывающей и $0 \leq \varphi_j \leq 1 \,\&\, \forall x y (|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \leq |x - y|)$.

Допустим, что $\neg \exists j s a b (1 \leq j \leq 2 \,\&\, \xi < a < b < < \eta \,\&\, \psi_j * \varphi_j(a) - \psi_j * \varphi_j(b) > \frac{1}{2^s})$. Тогда функции $\psi_1 * \varphi_1$ и $\psi_2 * \varphi_2$ являются неубывающими на $\xi \Delta \eta$ и, следовательно, согласно [5] они абсолютно непрерывны на $\xi \Delta \eta$, что противоречит нашим предположениям.

Таким образом, пользуясь свойствами функций ψ_1 и ψ_2 и отношения " $<$ " и принципом конструктивного подбора, можно построить НЧ j_0, s и t и РЧ a и b такие, что

$$
(3) \quad \begin{aligned} & 1 \leq j_0 \leq 2 \,\&\, \xi < a < b < \eta \,\&\, \psi_{j_0} * \varphi_{j_0}(a) - \\ & - \psi_{j_0} * \varphi_{j_0}(b) > \frac{1}{2^s} \,\&\, \varphi_{j_0}(a) - \varphi_{j_0}(b) > \frac{1}{2^t} . \end{aligned}
$$

Мы используем доказательство леммы 10 из [7], где $\psi \rightleftharpoons \psi_{j_0}$, $\varphi \rightleftharpoons \varphi_{j_0}$, $x_0 \rightleftharpoons a$ и $x_1 \rightleftharpoons b$. В следующем пользуемся обозначениями из названного доказательства. Мы можем предположить, что $j_0 = 1$ и что $p > 2^t$. Тогда, как легко доказать, ввиду (3) существует НЧ i, для которого верно

$$1 \le i \le 2^m \,\&\, \exists j\,(1 \le j \le n \,\&\, i = i_j \,\&\, \neg(P_j^1 \mp \Lambda))\,\&$$

$$\&\, \forall x\,(x \in \tau_{i-1} \Delta \tau_i \supset \mathfrak{A}_1(x) < -\frac{1}{10n}).$$

Мера S_6 -множества $\{Q_k^i\}_k$ меньше чем $|\tau_{i-1} \Delta \tau_i|$,

$\{Q_k^i\}_k \subseteq \tau_{i-1} \Delta \tau_i$ и существуют НЧ k_1 и k_2 такие,

что $\ni\!\ell\,(Q_{k_1}^i) = \tau_{i-1} \,\&\, \ni\! n\,(Q_{k_2}^i) = \tau_i$. Выполнено

$$\forall x\,(x \in \tau_{i-1} \nabla \tau_i \,\&\, \neg \exists k\,(\ni\!\ell\,(Q_k^i) < x < \ni\! n\,(Q_k^i)) \supset \neg(\varphi(x) \in \mathcal{G}^5)).$$

Пусть x и y КДЧ, $x \in \tau_{i-1} \nabla \tau_i \,\&\, \neg \exists k\,(\ni\!\ell\,(Q_k^i) < < x < \ni\! n\,(Q_k^i)) \,\&\, y \in \tau_{i-1} \Delta \tau_i$.

Если $x \le y$, то ввиду (9) из [7] верно $\varphi(y) - \varphi(x) \le \le \mathfrak{A}_1(x) \cdot (y - x) + \frac{1}{20n} \cdot |y - x| \le -\frac{1}{20n} \cdot (y - x)$

и, следовательно, $\psi * \varphi(y) - \psi * \varphi(x) \le 0$, т.е.

$\psi_1 * \varphi_1(y) \le \psi_1 * \varphi_1(x)$. Если $y \le x$, то - аналогично -

$\psi_1 * \varphi_1(x) \le \psi_1 * \varphi_1(y)$.

Мы определим $L_1 \rightleftharpoons \xi \Delta \tau_{i-1}$, $L_2 \rightleftharpoons \tau_i \Delta \eta$

и для всякого НЧ k, $2 < k$, $L_k \rightleftharpoons Q_{k-2}^i$. Тогда $\{L_k\}_k$ S_6 -множество меры меньшей чем $|\xi \Delta \eta|$, $\{L_k\}_k \subseteq \xi \Delta \eta$.

Пусть 6_0 НЧ такое, что мера $\{L_k\}_k$ меньше чем

$|\xi \Delta \eta| - \frac{2}{6_0}$.

Мы построим функцию $\overline{f}$ и согласно лемме 3 функции g_1 и g_2 являющиеся суперпозициями двух абсолютно непрерывных функций, такие, что функции $\overline{f}$, g_1 и g_2 линейны на всяком сегменте последовательности $\{L_k\}_k$ и

$$\forall x\,(x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg \exists k\,(\ni\!\ell\,(L_k) < x < \ni\! n\,(L_k)) \supset \overline{f}(x) = = f(x) \,\&\, g_1(x) = \psi_1 * \varphi_1(x) \,\&\, g_2(x) = \psi_2 * \varphi_2(x)).$$

Тогда $\overline{f} = g_1 + g_2$, $\overline{f}$ является неубывающей на $\xi \Delta \eta$ и согласно выведенным нами оценкам g_1 является невозрастающей на $\tau_{i-1} \Delta \tau_i$. Таким образом, функция g_2 является неубывающей на $\tau_{i-1} \Delta \tau_i$ и согласно [5] g_1, g_2 и, следовательно, и $\overline{f}$ абсолютно непрерывны на $\tau_{i-1} \Delta \tau_i$ (и тогда и на $\xi \Delta \eta$).

Согласно [3] и [4] существуют S_6 -множества $\mathcal{L}^1$ и $\mathcal{L}^2$ меры меньшей чем $\frac{1}{6_0}$ и $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $|\xi \Delta \eta|$ и равномерно непрерывная функция $\varkappa$ такие, что

$$\forall x\, ((x \in \xi \Delta \eta \,\&\, \neg (x \in \mathcal{L}^1) \supset D(\varkappa(x), \overline{f}, x)) \,\&$$
$$\&\, (x \in \xi \Delta \eta \,\&\, \neg (x \in \{L_k\}_k) \,\&\, \neg (x \in \mathcal{L}^2) \supset$$
$$\supset D(0, \nu_1 \langle \{L_k\}_k \rangle, x))) \,\&\, \mathcal{L}^1 \subseteq \mathcal{G} \,\&$$
$$\&\, \mathcal{L}^2 \subseteq \mathcal{G} \,\&\, \{L_k\}_k \subseteq \mathcal{G} \subseteq \xi \Delta \eta \quad .$$

Пусть x КДЧ, $x \in \xi \Delta \eta \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G})$, а m НЧ. Тогда $\overline{f}(x) = f(x)$ и существуют НЧ q_1 и q такие, что

$$|\varkappa| < \frac{q_1}{3m} \,\&\, 2 \leq q_1 < \frac{1}{2}\, q \quad \text{и}$$

$$\forall y\, ((|y - x| \leq \frac{1}{q_1} \supset |\overline{f}(y) - \overline{f}(x) - \varkappa(x) \cdot (y - x)| \leq$$
$$(4) \qquad \leq \frac{1}{3m} \cdot |y - x|) \,\&\, (|y - x| \leq \frac{2}{q} \supset |\nu_1 \langle \{L_k\}_k \rangle_{\llcorner} y_{\lrcorner} -$$
$$- \nu_1 \langle \{L_k\}_k \rangle_{\llcorner} x_{\lrcorner}| \leq \frac{1}{2q_1} \cdot |y - x|)) \; .$$

Ввиду этого можно построить КДЧ z_1 и z_2 ,

$$(5)\; \neg (z_1 \in \{L_k\}_k) \,\&\, \neg (z_2 \in \{L_k\}_k) \,\&\, x - \frac{2}{q} < z_1 < x - \frac{1}{q} < x < x + \frac{1}{q} <$$
$$< z_2 < x + \frac{2}{q} \; .$$

Пусть z КДЧ, $|z - x| \leq \frac{1}{q}$. Мы докажем, что

(6) $|f(z) - f(x) - æ(x).(z-x)| \leq \frac{1}{m}.|z-x|$.

Не может не иметь места один из следующих двух случаев.

а) Верно $\neg \exists k (\text{Э}л(L_k) < z < \text{Э}m(L_k))$. Тогда $\overline{f}(z) = f(z)$ и ввиду (4) выполнено (6).

б) Существует НЧ k_0 такое, что $\text{Э}л(L_{k_0}) < z < \text{Э}m(L_{k_0})$. Тогда $x < \text{Э}л(L_{k_0}) < z < \text{Э}m(L_{k_0}) < z_2 \vee z_1 < \text{Э}л(L_{k_0}) < z < \text{Э}m(L_{k_0}) < x$. Пусть, например, $x < \text{Э}л(L_{k_0}) < z < \text{Э}m(L_{k_0}) < z_2$. Мы имеем ввиду (4)

$$|L_{k_0}| \leq |\nu_1 \langle \{L_k\}_k \rangle \llcorner \text{Э}m(L_{k_0}) \lrcorner - \nu_1 \langle \{L_k\}_k \rangle \llcorner x \lrcorner| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2q_1} . (|\text{Э}л(L_{k_0}) - x| + |L_{k_0}|)$$

и, следовательно, $|L_{k_0}| \leq \frac{1}{2q_1 - 1} . |\text{Э}л(L_{k_0}) - x| < \frac{1}{q_1} . |z - x|$,

$$|f(\text{Э}m(L_{k_0})) - f(x) - æ(x).(z-x)| \leq |f(\text{Э}m(L_{k_0})) - f(x) -$$
$$- æ(x).(\text{Э}m(L_{k_0}) - x)| + |æ(x)|.|L_{k_0}| \leq \frac{1}{3m}(|z-x| +$$
$$+ |L_{k_0}|) + \frac{|æ(x)|}{q_1} . |z-x| \leq \frac{1}{m} . |z-x|$$

и, аналогично, $|f(\text{Э}л(L_{k_0})) - f(x) - æ(x).(z-x)| \leq \frac{1}{m}.|z-x|$.

Но тогда ввиду $f(\text{Э}л(L_{k_0})) \leq f(z) \leq f(\text{Э}m(L_{k_0}))$ верно (6).

Таким образом, согласно а), б) и $\forall u v (u \leq v \equiv \neg\neg(u \leq v))$ (6) доказано.

<u>Следствие</u>. Пусть f функция и пусть для всякого сегмента $a \triangle b$, $a \triangle b \subseteq 0 \triangle 1$, существует сегмент

$\xi \Delta \eta$, $\xi \Delta \eta \subseteq a \Delta b$, такой, что или f абсолютно непрерывна на $\xi \Delta \eta$ или f не может не быть монотонной на $\xi \Delta \eta$ и одновременно f не является абсолютно непрерывной на $\xi \Delta \eta$.

Тогда если f представима в виде суммы двух суперпозиций абсолютно непрерывных функций, то f равномерно непрерывна и выполнено $Ш_1(f)$.

<u>Замечание 2</u>. Можно построить функцию f и последовательность РЧ $\{a_m\}_m$ такие, что

1) f возрастает на $0 \Delta 1$, $\forall xy(|f(x)-f(y)| \leq$
$\leq |x-y|) \& \forall x(x \in 0\Delta 1 \& \neg \exists m(x = a_m) \supset \exists u \, D(u, f, x))$;

2) не существуют S_σ-множество $\mathcal{S}$ меры меньшей чем 1 и равномерно непрерывная функция $\varkappa$ такие, что $\forall x(x \in 0\Delta 1 \& \neg(x \in \mathcal{S}) \supset D(\varkappa(x), f, x))$.

Таким образом, согласно [3] f не может быть абсолютно непрерывной на $0 \Delta 1$. Отсюда мы на основании леммы 4 получаем:

3) f нельзя представить в виде суммы двух суперпозиций абсолютно непрерывных функций.

Литература

[1] BARY N.: **Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues, Math.Annalen 103(1930),185-248.**

[2] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Труды Мат.инст. им.В.А.Стеклова,т. LXVII (1962),295-361.

[3] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969),261-284.

[4] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment.Math. Univ. Carolinae 10(1969),463-492.

[5] ДЕМУТ О.: О суперпозициях абсолютно непрерывныцх конструктивных функций, Comment.Math. Univ. Carolinae 12(1971),423-450.

[6] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment.Math.Univ. Carolinae 12(1971),687-710.

[7] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суперпозиции абсолютно непрерывных функций, Comment.Math.Univ. Carolinae 13(1972),227-251.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Sokolovská 83, Praha 8 Karlín

Československo

(Oblatum 11.1.1972)