Antonín Kučera

Достаточные условия нормируемости линейных операторов в конструктивной математике

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 12 (1971), No. 2, 377--399

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105353`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

12,2 (1971)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НОРМИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Антонин КУЧЕРА, Прага

Настоящая статья посвящена вопросам нормируемости и аппроксимируемости линейных операторов в полных конструктивных линейных нормированных пространствах с базисом.

В дальнейшем пользуемся определениями, обозначениями и результатами из [1],[2] и [3]. В частности в следующем предполагаем, что алгорифмические операторы, линейные функционалы и линейные операторы всюду определены в соответствующих конструктивных пространствах (см.[3]). Буквы i, j, k, l, p, q служат переменными для натуральных чисел (НЧ), буква u переменной для конструктивных действительных чисел (КДЧ). Далее пользуемся определениями и обозначениями записи алгорифма $\mathfrak{A}$ относительно алфавита A из [2] стр.298. Запись алгорифма $\mathfrak{A}$ относительно алфавита A есть, таким образом, запись некоторого алгорифма в стандартном расширении алфавита A, эквивалентного алгорифму $\mathfrak{A}$ относительно алфавита A; она обозначается $\{\mathfrak{A}, A\}$. Записи алгорифмов являются словами в алфавите $Ч_0 \leftrightharpoons \{0, 1\}$. Как в [2] стр.302,

---

AMS, Primary 02E99
Secondary 47B99

Ref.Ž. 2.644.2

если A есть алфавит, то α обозначает букву, не принадлежащую ни алфавиту $Ч_0$, ни стандартному расширению алфавита A, а $\mathcal{B}^{A,\alpha}$ – универсальный алгорифм для стандартного расширения алфавита A. Таким образом, если $\mathfrak{A}$ – алгорифм в стандартном расширении алфавита A, P – запись алгорифма $\mathfrak{A}$ относительно алфавита A, то для всякого слова Q в алфавите A выполнено $\mathcal{B}^{A,\alpha}(P\alpha Q) \simeq \mathfrak{A}(Q)$.

Обозначения: 1) Для КЛНП π (т.е. конструктивного линейного нормированного пространства) A_π обозначает алфавит этого пространства, а $Б_\pi$ – алфавит $A_\pi \cup Ч_3$. Итак, если f линейный функционал в пространстве π и $P \rightleftharpoons \mathcal{E}\, f, Б_\pi\, 3$, то для всякого $X \in \pi$

$\widetilde{\mathcal{B}^{Б_\pi,\alpha}_{P\alpha}}(X) \simeq f(X)$. (Согласно [3], алфавит A_π не содержит букву $\square$.)

2) Если σ – КЛНП, то $\underset{\sigma}{=}$ обозначает равенство в пространстве σ,

$\| \ \|_\sigma$ – алгорифм вычисления нормы в пространстве σ,

$\underset{\sigma}{+}$ – алгорифм сложения элементов пространства σ,

$\underset{\sigma}{\cdot}$ – алгорифм умножения элементов пространства σ на КДЧ, O_σ – нулевой элемент пространства σ, а X_σ и Y_σ – переменные для слов в алфавите A_σ. Для упрощения записи формул опускаем знак соответствующего пространства там, где это не может привести к недоразумениям. Если далее f и g – линейные функционалы в пространстве σ и x – КДЧ, то мы посредством $f + g$ обозначаем сумму функционалов f и g, а посредством $x \cdot f$ – результат умножения функционала f на КДЧ x .

3) Пусть $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ алгорифмы такие, что $\mathcal{I}_1(P \bowtie Q) \simeq P$ и $\mathcal{I}_2(P \bowtie Q) \simeq Q$ для любых слов P и Q в алфавите $Ч_3$.

4) Для любого НЧ m мы обозначаем посредством $\mathcal{E}_m$ КЛНП всех m-ок КДЧ с нормой $\| u_1 * \ldots * u_m \|_{\mathcal{E}_m} = \max\limits_{1 \le j \le m} |u_j|$.

<u>Замечание 1</u>. В [3] определено понятие базиса КЛНП π . Условимся о следующем изменении терминологии. Алгорифм $\mathcal{L}$ назовем базисом КЛНП π , если для любых НЧ k и $X \in \pi$ выполнено $!\mathcal{L}(k) \,\&\, !\mathcal{L}(k * X)$, $\mathcal{L}(k)$ - элемент пространства π и $\mathcal{L}(k * X)$ - КДЧ, причем последовательность $\{\mathcal{L}(k)\}_k$ и алгорифм $\mathcal{L}$ образуют базис КЛНП π в смысле [3]. Напомним (см.[3]), что если $\mathcal{L}$ - базис КЛНП π , то

1) для любых НЧ $n, s, n \le s$ мы посредством $\pi_{n,s}$ обозначаем подпространство КЛНП π такое, что $X \in \pi_{n,s} \equiv$ $\equiv X = \sum\limits_{j=n}^{s} \mathcal{L}(j * X) \cdot \mathcal{L}(j)$;

2) для любого НЧ k мы посредством U_k и V_k обозначаем линейные операторы в пространстве π такие, что для любого $X \in \pi$ выполнено $U_k(X) =$ $= \sum\limits_{j=1}^{k} \mathcal{L}(j * X) \cdot \mathcal{L}(j)$ и $V_k(X) = X - U_k(X)$.

Ввиду зависимости этих обозначений от данного базиса КЛНП π , мы всегда явно укажем базис, к которому они построены. Напомним далее, что E -пространством называем полное КЛНП, для которого существует базис.

__Определения.__ Пусть π есть КЛНП.

1) Пусть ψ -линейный оператор из пространства π в КЛНП τ. Скажем, что КДЧ $\varkappa$ является нормой оператора ψ относительно пространства π, если выполнено

$$\forall_X (X \in \pi \supset \| \psi(X) \|_\tau \leq \varkappa . \| X \|_\pi) \quad \text{и}$$

$$\forall_k \exists_X (X \in \pi \; \& \; \| X \|_\pi \leq 1 \; \& \; \| \psi(X) \|_\tau > \varkappa - \frac{1}{2^k}) .$$

(В случае линейного функционала пространство τ является пространством $\mathcal{E}_1$.)

2) Пусть $\mathcal{F}N(\pi)$ - множество слов в алфавите $Ч_3 \cup \{ \bowtie \}$ вида $P \bowtie \varkappa$, где P - слово в алфавите $Ч_0$ и $\varkappa$ - КДЧ такие, что $\widetilde{\mathcal{B}^{B_\pi, \alpha}_{P \alpha}}$ является линейным функционалом в пространстве π а $\varkappa$ - норма этого функционала относительно пространства π.

3) КЛНП σ назовем пространством, сопряженным к пространству π, если выполнены следующие условия

а) $Ч_3 \cup \{ \bowtie \}$ является алфавитом пространства σ;

б) для всякого слова P в алфавите $Ч_3 \cup \{ \bowtie \}$
$P \in \sigma \equiv P \in \mathcal{F}N(\pi)$;

в) для всяких $P_1 \in \sigma$, $P_2 \in \sigma$ (т.е. $P_1 \in \mathcal{F}N(\pi)$, $P_2 \in \mathcal{F}N(\pi)$) и $X \in \pi$ выполнено

$$\mathcal{B}^{B_\pi, \alpha}(\mathcal{J}_1(P_1 \underset{\sigma}{+} P_2) \alpha X) = \mathcal{B}^{B_\pi, \alpha}(\mathcal{J}_1(P_1) \alpha X) + \mathcal{B}^{B_\pi, \alpha}(\mathcal{J}_1(P_2) \alpha X) ;$$

г) для всяких $P \in \sigma$ (т.е. $P \in \mathcal{F}N(\pi)$) и КДЧ $\varkappa$ выполнено

$$\mathcal{B}^{B_\pi, \alpha}(\mathcal{J}_1(\varkappa \underset{\sigma}{\cdot} P) \alpha X) = \varkappa . \mathcal{B}^{B_\pi, \alpha}(\mathcal{J}_1(P) \alpha X) ;$$

д) для всякого $P \in \sigma$ (т.е. $P \in \mathcal{F}N(\pi)$)

$$\| P \|_\sigma = \mathcal{J}_2(P) .$$

Замечание 2. Пусть π - КЛНП. Тогда ясно, что существует алгорифм $\dot{\circ}$ умножения элементов множества $\mathcal{F}N(\pi)$ на КДЧ, удовлетворяющий условию описанному в 3г). Если дополнительно существует алгорифм $\overset{+}{\circ}$ сложения элементов множества $\mathcal{F}N(\pi)$, удовлетворяющий условию описанному в 3в), то множество $\mathcal{F}N(\pi)$ в алфавите $Ч_3 \cup \{\bowtie\}$, алгорифмы $\overset{+}{\circ}$ и $\dot{\circ}$, алгорифм $\mathfrak{I}_2$ (в качестве нормы) а нулевой элемент вида $\mathcal{E}\,\mathcal{O}, B_\pi\, 3 \bowtie 0$ (где $\mathcal{O}$ - нулевой функционал в пространстве π) образуют КЛНП σ, сопряженное к пространству π.

Для КЛНП ℓ_1 такой алгорифм сложения элементов множества $\mathcal{F}N(\ell_1)$ не существует (часть 2) примера из [3]). Таким образом, пространство ℓ_1 не обладает сопряженным пространством.

Лемма 1. Пусть π и τ - КЛНП и для всякого НЧ k ψ_k -линейный оператор из пространства π в пространство τ.

1) Если пространство τ полно и выполнено

$$\forall_n \exists_q \forall_k \forall_X (X \in \pi \,\&\, k \geq q \supset$$
$$\supset \| \psi_k(X) - \psi_q(X)\|_\tau \leq \frac{1}{n} \cdot \|X\|_\pi),$$

то существует линейный оператор ψ из пространства π в пространство τ, для которого выполнено

$$(1) \quad \forall_n \exists_q \forall_k \forall_X (X \in \pi \,\&\, k \geq q \supset$$
$$\supset \| \psi(X) - \psi_k(X)\|_\tau \leq \frac{1}{n} \cdot \|X\|_\pi).$$

2) Если ψ - линейный оператор из пространства π в пространство τ, для которого выполнено (1), и для всякого оператора ψ_k существует норма относительно пространства

$\mathcal{T}$, то тем же свойством обладает и оператор ψ .

Доказательство проводится точным копированием соответствующих классических рассуждений.

<u>Следствие</u>. КЛНП σ , сопряженное к КЛНП $\mathcal{T}$ является полным. Таким образом, если существует базис пространства σ , то оно является E -пространством.

<u>Определение</u>. Пусть σ - КЛНП, сопряженное к КЛНП $\mathcal{T}$, $\mathcal{L}$ - базис пространства $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ - базис пространства σ . Базис $\mathcal{D}$ назовем базисом, сопряженным к базису $\mathcal{L}$, если для всяких НЧ k и $X \in \mathcal{T}$ выполнено

$$(2)\quad \mathcal{B}^{B_{\mathcal{T}},\alpha}(\mathcal{J}_1(\mathcal{D}(k))\propto X)=$$

$$=\mathcal{B}^{B_{\mathcal{T}},\alpha}(\mathcal{J}_1(\mathcal{D}(k))\propto \mathcal{L}(k)).\mathcal{L}(k * X) .$$

<u>Замечание 3</u>. 1) Пусть σ - КЛНП, сопряженное к КЛНП $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$ - базис пространства σ , сопряженный к базису $\mathcal{L}$ пространства $\mathcal{T}$. Тогда, по определению, $\forall_k (\| \mathcal{D}(k)\|_\sigma = 1)$. Если обозначим $\omega_k \leftrightharpoons \mathcal{B}^{B_{\mathcal{T}},\alpha}(\mathcal{J}_1(\mathcal{D}(k))\propto \mathcal{L}(k))$, то ввиду (2), для всякого НЧ k $\omega_k \neq 0$, причем $\frac{1}{\omega_k}$ является нормой линейного функционала $\widetilde{\mathcal{L}_{k*}}$ относительно пространства $\mathcal{T}$ и, таким образом, $\mathcal{D}(k) \underset{\sigma}{=} \varepsilon\, \omega_k . \widetilde{\mathcal{L}_{k*}}$, $B_{\mathcal{T}}\, 3 \bowtie 1$.

Далее нетрудно проверить, что для всяких НЧ k и $P \in \sigma$ выполнено $\mathcal{D}(k * P) = \frac{1}{\omega_k} . \mathcal{B}^{B_{\mathcal{T}},\alpha}(\mathcal{J}_1(P)\propto \mathcal{L}(k))$.

Таким образом, базис, сопряженный к данному базису КЛНП $\mathcal{T}$ определен в приведенном смысле однозначно.

2) Нетрудно построить базис $\mathcal{L}$ E -пространства ℓ_2

такой, что не все функционалы $\widetilde{\mathcal{L}}_{k*}$ обладают нормами.

Таким образом, существуют E-пространство π, базис $\mathcal{L}$ пространства π и E-пространство σ, сопряженное к пространству π, для которых нельзя построить базис пространства σ, сопряженный к базису $\mathcal{L}$.

<u>Лемма 2</u>. Пусть π - КЛНП и $\mathcal{L}$ - базис пространства π такие, что существуют КЛНП, сопряженное к пространству π и базис этого пространства, сопряженный к базису $\mathcal{L}$. Пусть $\{X_k\}_k$ - ограниченная по норме последовательность элементов пространства π такая, что для всякого НЧ j последовательность КДЧ $\{\widetilde{\mathcal{L}}_{j*}(X_k)\}_k$ сходится к нулю. Тогда выполнено

$$(3) \qquad X_k \xrightarrow{c} \mathcal{O}_\pi .$$

<u>Доказательство</u>. Пусть σ - КЛНП, сопряженное к пространству π и $\mathcal{D}$ - базис пространства σ, сопряженный к базису $\mathcal{L}$. По определению слабой сходимости ([3]) мы должны доказать, что для всякого $P \in \sigma$ сходится к нулю последовательность КДЧ $\{\mathcal{B}^{B_n,\alpha}(\mathcal{J}_1(P)\alpha X_k)\}_k$.

Итак, пусть $P \in \sigma$. Тогда, как нетрудно проверить, для любых НЧ k, m выполнено

$$|\mathcal{B}^{B_n,\alpha}(\mathcal{J}_1(P)\alpha X_k)| \le \|P - \sum_{j=1}^{m} \mathcal{D}(j * P).\mathcal{D}(j)\|_\sigma \cdot \|X_k\|_\pi +$$
$$+ \|P\|_\sigma \cdot \sum_{j=1}^{m} |\mathcal{L}(j * X_k)| .$$

Ввиду сходимости к нулю последовательности

$\{\|P - \sum_{j=1}^{m}\mathcal{D}(j * P).\mathcal{D}(j)\|_\sigma\}_m$ и предположений леммы получаем (3).

Теорема 1. Пусть π есть E -пространство, p - НЧ, $\mathcal{B}$ - базис пространства π такой, что для всяких КДЧ $u_1, \ldots, u_p$ существует норма линейного функционала $\sum_{j=1}^{p} u_j \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{j*}$. Пусть τ - КЛНП, а ψ - линейный оператор из пространства π в пространство τ такой, что $\forall_k (k > p \supset \psi(\mathcal{B}(k)) \underset{\tau}{=} \mathcal{O}_\tau)$. Тогда существует КДЧ w, являющееся нормой оператора ψ относительно пространства π.

Доказательство. Будем пользоваться обозначениями приведенными в замечании 1.

Если $p = 1$, то для любого $X \in \pi$ очевидно имеем $\psi(X) \underset{\tau}{=} \widetilde{\mathcal{B}}_{1*}(X) \cdot \psi(\mathcal{B}(1))$, и утверждение теоремы непосредственно следует из предполагаемых свойств базиса $\mathcal{B}$. Итак, пусть $p > 1$.

1) Посредством $\mathcal{P}$ мы обозначим непустое множество такое, что

(4) $$Y \in \mathcal{P} \equiv Y \in \pi_{1,p} \,\&\, \|Y\|_\pi = 1 .$$

Тогда для всякого $Y \in \mathcal{P}$ существует подпространство $\pi(Y)$ пространства π, для которого $X \in \pi(Y) \equiv X \in \pi \,\&\, \exists u \,(U_p(X) = u \cdot Y)$. Ясно, что если $Y_1 \in \mathcal{P} \,\&\, Y_2 \in \mathcal{P} \,\&\, Y_1 = Y_2$, то для любого $X \in \pi$ $X \in \pi(Y_1) \equiv X \in \pi(Y_2)$.

Пусть теперь $Y \in \mathcal{P}$. Тогда существует НЧ i такое, что $1 \leq i \leq p \,\&\, \mathcal{B}(i * Y) \neq 0$. Для любого $X \in \pi(Y)$ положим $\sigma(Y \square X) \leftrightharpoons \dfrac{\mathcal{B}(i * X)}{\mathcal{B}(i * Y)}$.

(Заметим, что если j - НЧ и $1 \le j \le p$ & $\mathcal{L}(j * Y) \ne 0$, то для любого $X \in \pi(Y)$ $\dfrac{\mathcal{L}(i * X)}{\mathcal{L}(i * Y)} = \dfrac{\mathcal{L}(j * X)}{\mathcal{L}(j * Y)}$.)
Тогда $\widetilde{\sigma}_{Y\Box}$ является линейным функционалом в пространстве $\pi(Y)$ и нетрудно проверить, что для любого $X \in \pi(Y)$ выполнено

(5) $\mathcal{U}_p(X) = \sigma(Y \Box X) . Y$, $\sigma(Y \Box X) = \sigma(Y \Box \mathcal{U}_p(X))$,
$\| \mathcal{U}_p(X) \|_\pi = | \sigma(Y \Box X) |$,

(6) $Y \in \pi(Y)$ & $\sigma(Y \Box Y) = 1$.

Далее, если $Y_1 \in \mathcal{P}$ & $Y_2 \in \mathcal{P}$ & $Y_1 = Y_2$, то для всякого $X \in \pi(Y_1)$ имеем

(7) $\sigma(Y_1 \Box X) = \sigma(Y_2 \Box X)$.

Из сказанного легко следует, что для любого $Y \in \mathcal{P}$ $\pi(Y)$ является E-пространством.

2) Докажем, что существует алгорифм φ, применимый к всякому $Y \in \mathcal{P}$ и выдающий по нему норму функционала $\widetilde{\sigma}_{Y\Box}$ относительно пространства $\pi(Y)$.
Согласно лемме 3 из [3] существует КДЧ $K \ge 1$ такое, что $\forall_k \forall_X (X \in \pi \supset \| \mathcal{U}_k(X) \|_\pi \le K . \| X \|_\pi)$. По (5), для любых $Y \in \mathcal{P}$ и $X \in \pi(Y)$ имеем

(8) $| \sigma(Y \Box X) | \le K . \| X \|_\pi$.

Для любых КДЧ $v_1, \dots, v_p$ и $X \in \pi$ теперь положим $\widetilde{f}(v_1 * \dots * v_p * X) \leftrightharpoons \sum_{j=1}^{p} v_j . \mathcal{L}(j * X)$. Тогда $f_{v_1 * \dots * v_p *}$ - линейный функционал в пространстве π и для любого $X \in \pi$ $f(v_1 * \dots * v_p * X) = f(v_1 * \dots * v_p * \mathcal{U}_p(X))$.
Ввиду предположений теоремы существует алгорифм h такой,

что для любых КДЧ $v_1, \ldots, v_p$ выполнено $! h(v_1 * \ldots * v_p)$ и $h(v_1 * \ldots * v_p)$ - норма функционала $\widetilde{f_{v_1 * \ldots * v_p *}}$ относительно пространства π. Нетрудно проверить, что h - равномерно непрерывный алгорифмический оператор из КЛНП $\mathcal{E}_p$ в КЛНП $\mathcal{E}_1$. Пусть теперь $Y \in \mathcal{P}$. Мы построим $\varphi(Y)$. Если для КДЧ $v_1, \ldots$ $\ldots, v_p$ выполнено $f(v_1 * \ldots * v_p * Y) = 1$, то по (5), для всякого $X \in \pi(Y)$ имеем

(9) $f(v_1 * \ldots * v_p * X) = \delta(Y \sqcap X)$ и, следовательно,

(10) $|\delta(Y \sqcap X)| \leq h(v_1 * \ldots * v_p) \cdot \| X \|_\pi$.

Пусть $\mathcal{D}(Y)$ - множество p-ок КДЧ $v_1 * \ldots * v_p$ таких, что $f(v_1 * \ldots * v_p * Y) = 1$. Ввиду (4), существует НЧ i, для которого $1 \leq i \leq p \,\&\, \mathcal{L}(i * Y) \neq 0$. Не теряя общности допустим, что $\mathcal{L}(p * Y) \neq 0$. Для всяких КДЧ $v_1, \ldots, v_{p-1}$ положим

$$g(v_1 * \ldots * v_{p-1}) \leftrightharpoons v_1 * \ldots * v_{p-1} * \frac{1}{\mathcal{L}(p*Y)} \cdot (1 - \sum_{j=1}^{p-1} v_j \cdot \mathcal{L}(j*Y)).$$

Ясно, что g - равномерно непрерывный алгорифмический оператор из КЛНП $\mathcal{E}_{p-1}$ в КЛНП $\mathcal{E}_p$, причем для любых КДЧ $u_1, \ldots, u_p$, $v_1, \ldots, v_{p-1}$ таких, что $u_1 * \ldots$ $\ldots * u_p \in \mathcal{D}(Y)$ выполнено

(11) $g(v_1 * \ldots * v_{p-1}) \in \mathcal{D}(Y)$ и $u_1 * \ldots * u_p =$
$= g(u_1 * \ldots * u_{p-1})$.

Обозначим $X \in R \leftrightharpoons X \in \mathcal{E}_{p-1} \,\&\, \| X \|_{\mathcal{E}_{p-1}} \leq K$. Нормальная композиция $h \circ g$ - равномерно непрерывный алгорифмический оператор из КЛНП $\mathcal{E}_{p-1}$ в КЛНП $\mathcal{E}_1$ и, таким образом, используя идеи доказательства теоремы 5.4 из [2] стр.435, можно доказать существование КДЧ $\varkappa$, являющегося инфимумом значений оператора $h \circ q$ на множестве $\mathcal{R}$. Определим теперь $\varphi(Y) \leftrightharpoons \varkappa$. Докажем, что $\varkappa$ - норма функционала $\widetilde{\delta}_{Y\square}$ относительно пространства $\pi(Y)$.

Ввиду (10) и (11), имеем $\forall_X (X \in \pi(Y) \supset |\delta(Y \square X)| \leq \leq \varkappa \cdot \|X\|_{\pi})$. Далее воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

Если ξ - линейный функционал в пространстве $\pi(Y)$ и w - КДЧ такие, что $\forall_X (X \in \pi(Y) \supset |\xi(X)| \leq w \cdot \|X\|_{\pi})$,

то не может не существовать линейный функционал η в пространстве π, для которого

$\forall_X (X \in \pi(Y) \supset \eta(X) = \xi(X)) \,\&\, \forall_X (X \in \pi \supset |\eta(X)| \leq w \cdot \|X\|_{\pi})$.

Подробное доказательство мы здесь не приводим и сделаем лишь некоторые замечания. Сначала можно построить базис $\mathcal{L}_1$ пространства π и подпространства σ_j $(j = 1,\dots,n)$ пространства π такие, что $\mathcal{L}_1(n) \asymp Y$, $\forall_\ell (\ell \neq n \supset \mathcal{L}_1(\ell) \asymp \mathcal{L}(\ell))$ и для любых $X \in \pi$ и $j = = 1,\dots,n$ $X \in \sigma_j \equiv \forall_k (k < j \supset \mathcal{L}_1(k * X) = 0)$.

Тогда пространство σ_1 совпадает с пространством π и пространство σ_n с пространством $\pi(Y)$. Затем, ввиду сепарабельности пространств σ_j $(j = 1,\dots,n)$, можно методом описанным в доказательстве леммы 5 из [3] постепенно в $n-1$ шагах доказать, что не может не существовать требуемое продолжение функционала ξ на пространство σ_1, т.е. на пространство π.

Допустим теперь, что для НЧ q выполнено

$$\forall_X (X \in \pi(Y) \ \& \ \|X\|_\pi \leq 1 \supset |\delta(Y \square X)| \leq x - \frac{1}{2^q}).$$

Согласно вспомогательному утверждению и, по (8), не может не существовать линейный функционал η в пространстве π, для которого

$$\forall_X (X \in \pi(Y) \supset \eta(X) = \delta(Y \square X)) \ \& \ \forall_X (X \in \pi \supset$$
$$\supset |\eta(X)| \leq min(K, x - \frac{1}{2^q}) \cdot \|X\|_\pi)$$

и, следовательно, $\eta(Y) = 1 \ \& \ \forall_X (X \in \pi \supset \eta(X) = \eta(U_p(X)))$.
Значит, не могут не существовать КДЧ $v_1, \ldots, v_p$ такие, что $v_1 * \ldots * v_p \in \mathfrak{D}(Y)$ и $h(v_1 * \ldots * v_p) \leq$
$\leq min(K, x - \frac{1}{2^q})$. Заметим, что для любых КДЧ $u_1, \ldots$
$\ldots, u_p$ выполнено $f(u_1 * \ldots * u_p * \mathcal{B}(i)) = u_i$
$(i = 1, \ldots, p)$ и, следовательно,

$$\|u_1 * \ldots * u_{p-1}\|_{\ell_{p-1}} = \max_{1 \leq j \leq p-1} |u_j| \leq h(u_1 * \ldots * u_p).$$

Таким образом, по (11), не могут не существовать КДЧ $v_1, \ldots$
$\ldots, v_{p-1}$, для которых $v_1 * \ldots * v_{p-1} \in \mathbf{R}$ и

$$h(q(v_1 * \ldots * v_{p-1})) \leq x - \frac{1}{2^q}.$$

Но это противоречит определению КДЧ x. Итак, имеем

$$\neg \exists_q \forall_X (X \in \pi(Y) \ \& \ \|X\|_\pi \leq 1 \supset |\delta(Y \square X)| \leq x - \frac{1}{2^q})$$

и, следовательно,

$$\forall_q \neg\neg \exists_X (X \in \pi(Y) \ \& \ \|X\|_\pi \leq 1 \ \& \ |\delta(Y \square X)| > x - \frac{1}{2^q}).$$

Ввиду сепарабельности пространства $\pi(Y)$ можно на основании принципа А.А. Маркова доказать

$$\forall_q \exists_X (X \in \pi(Y) \ \& \ \|X\|_\pi \leq 1 \ \& \ |\delta(Y \square X)| > x - \frac{1}{2^q}).$$

Таким образом, КДЧ $\varphi(\mathcal{Y})$ действительно является нормой функционала $\widetilde{\sigma}_{Y_\square}$ относительно пространства $\pi(\mathcal{Y})$.

На основании (10) и (11), $\varphi(\mathcal{Y})$ является тоже инфимумом значений оператора h на множестве $\mathcal{D}(\mathcal{Y})$. Далее, по (6) и (8), для любого $\mathcal{Y} \in \mathcal{P}$ очевидно имеем

(12) $$1 \le \varphi(\mathcal{Y}) \le K .$$

3) Если ρ обозначает метрическую функцию пространства π, то $(\mathcal{P}, \rho)$ является метрическим пространством. Ввиду (7), из $\mathcal{Y}_1 \in \mathcal{P}$ & $\mathcal{Y}_2 \in \mathcal{P}$ & $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$ следует $\varphi(\mathcal{Y}_1) = \varphi(\mathcal{Y}_2)$; значит, φ - алгорифмический оператор из пространства $(\mathcal{P}, \rho)$ в КЛНП $\mathcal{E}_1$. Докажем, что оператор φ равномерно непрерывен в пространстве $(\mathcal{P}, \rho)$. Для этого достаточно доказать, что если $\mathcal{Y}_1 \in \mathcal{P}$ & $\mathcal{Y}_2 \in \mathcal{P}$ & $\| \mathcal{Y}_2 - \mathcal{Y}_1 \|_\pi \le \frac{1}{2K}$, то

(13) $$| \varphi(\mathcal{Y}_2) - \varphi(\mathcal{Y}_1) | \le 2K^2 . \| \mathcal{Y}_2 - \mathcal{Y}_1 \|_\pi .$$

Допустим $\mathcal{Y}_1 \in \mathcal{P}$ & $\mathcal{Y}_2 \in \mathcal{P}$ & $\| \mathcal{Y}_2 - \mathcal{Y}_1 \|_\pi \le \frac{1}{2K}$. Если $\varphi(\mathcal{Y}_1) = \varphi(\mathcal{Y}_2)$, то (13) выполнено. Пусть, например, $\varphi(\mathcal{Y}_1) < \varphi(\mathcal{Y}_2)$. Построим НЧ q_0 такое, что $\varphi(\mathcal{Y}_1) + \frac{1}{q_0} < \varphi(\mathcal{Y}_2)$ и пусть q - НЧ, $q \ge q_0$. Согласно 2), $\varphi(\mathcal{Y}_1)$ является инфимумом значений оператора h на множестве $\mathcal{D}(\mathcal{Y}_1)$ и, следовательно, существуют КДЧ $v_1, \ldots, v_p$ такие, что $v_1 * \ldots * v_p \in \mathcal{D}(\mathcal{Y}_1)$ и

$$\varphi(\mathcal{Y}_1) \le h(v_1 * \ldots * v_p) < \varphi(\mathcal{Y}_1) + \frac{1}{q} < \varphi(\mathcal{Y}_2) .$$

По (12), имеем тоже $\varphi(\mathcal{Y}_2) \le K$. Тогда, обозначив $n \leftrightharpoons \widetilde{f}_{v_1 * \ldots * v_p *}$ получаем

(14) $|\eta(Y_2) - \eta(Y_1)| = |\eta(Y_2) - 1| \leq$
$\leq h(v_1 * \ldots * v_n) \cdot \| Y_2 - Y_1 \|_\pi \leq K \cdot \| Y_2 - Y_1 \|_\pi \leq \frac{1}{2}$.

Таким образом, $\eta(Y_2) > 0$ и существует КДЧ $v > 0$ такое, что $v \cdot \eta(Y_2) = 1$. Значит, $v \cdot v_1 * \ldots * v \cdot v_n \in \mathcal{D}(Y_2)$ и, следовательно, $\varphi(Y_2) \leq h(v \cdot v_1 * \ldots * v \cdot v_n) = v \cdot h(v_1 * \ldots * v_n) < v \cdot \varphi(Y_2)$. Отсюда $v > 1$ и $\eta(Y_2) < 1$ и, по (14), $|\eta(Y_2) - 1| = 1 - \eta(Y_2) \leq K \cdot \| Y_2 - Y_1 \|_\pi$.

Следовательно, $v - v \cdot \eta(Y_2) = v - 1 \leq K \cdot \| Y_2 - Y_1 \|_\pi \cdot v \leq \frac{1}{2} \cdot v$.

Таким образом, $v \leq 2$ и $v - 1 \leq 2K \cdot \| Y_2 - Y_1 \|_\pi$.

Имеем

$$|\varphi(Y_2) - \varphi(Y_1)| = \varphi(Y_2) - \varphi(Y_1) \leq$$

$$\leq v \cdot h(v_1 * \ldots * v_n) - \varphi(Y_1) \leq v \cdot (\varphi(Y_1) + \frac{1}{q}) -$$

$$- \varphi(Y_1) = (v-1) \cdot \varphi(Y_1) + v \cdot \frac{1}{q} \leq 2K^2 \cdot \| Y_2 - Y_1 \|_\pi + \frac{2}{q} .$$

Так как НЧ q может быть взято сколь угодно большим, то (13) выполнено. Случай $\varphi(Y_2) < \varphi(Y_1)$ рассматривается аналогично. Ввиду того, что $\neg\neg(\varphi(Y_1) < \varphi(Y_2) \vee \varphi(Y_1) = \varphi(Y_2) \vee \varphi(Y_1) > \varphi(Y_2))$ и что из неравенства (13) можно снять двойное отрицание, то (13) доказано. Итак, действительно, φ - равномерно непрерывный алгорифмический оператор из пространства $(\mathcal{P}, \rho)$ в пространство $\mathcal{E}_1$.

4) Теперь можно перейти к доказательству существования нормы оператора ψ . По лемме 1 из [3], оператор ψ ограниченный и, следовательно, равномерно непрерывный в пространстве π . Таким образом (ввиду ограниченности опера-

торов φ и ψ на множестве $\mathcal{P}$), $\varphi(X) . \|\psi(X)\|_{\tau}$ - равномерно непрерывный алгорифмический оператор из пространства $(\mathcal{P}, \rho)$ в КЛНП $\mathcal{E}_1$. Теперь аналогично доказательствам теоремы 5.4 из [2] стр.435 и леммы 4 из [3] получаем, что существует КДЧ w, являющееся супремумом значений этого оператора на множестве $\mathcal{P}$. Покажем, что w - норма оператора ψ относительно пространства π.

Заметим, что для любого $X \in \pi$ выполнено $\psi(X) = \psi(\mathcal{U}_p(X))$. Пусть теперь $X \in \pi$. Если $\|\mathcal{U}_p(X)\|_{\pi} = 0$, то очевидно $\|\psi(X)\|_{\tau} \leq w . \|X\|_{\pi}$.

Если $\|\mathcal{U}_p(X)\|_{\pi} \neq 0$, то обозначив

$Y \leftrightharpoons \dfrac{\mathcal{U}_p(X)}{\|\mathcal{U}_p(X)\|_{\pi}}$, имеем $Y \in \mathcal{P} \,\&\, X \in \pi(Y)$ и, по (5), $\|\mathcal{U}_p(X)\|_{\pi} = |\sigma(Y \square X)|$. Таким образом,

$$\|\psi(X)\|_{\tau} = \|\mathcal{U}_p(X)\|_{\pi} . \|\psi(Y)\|_{\tau} = |\sigma(Y \square X)| \cdot$$

$$. \|\psi(Y)\|_{\tau} \leq \varphi(Y) . \|X\|_{\pi} . \|\psi(Y)\|_{\tau} \leq w . \|X\|_{\pi} .$$

Ввиду того, что $\neg\neg(\|\mathcal{U}_p(X)\|_{\pi} = 0 \vee \|\mathcal{U}_p(X)\|_{\pi} \neq 0)$ и что из неравенства $\|\psi(X)\|_{\tau} \leq w . \|X\|_{\pi}$ можно снять двойное отрицание, доказано

$$\forall_X (X \in \pi \supset \|\psi(X)\|_{\tau} \leq w . \|X\|_{\pi}) .$$

Пусть далее k - НЧ. Тогда существует $Y \in \mathcal{P}$, для которого $\varphi(Y) . \|\psi(Y)\|_{\tau} > w - \dfrac{1}{2.2^k}$.

Согласно (12), очевидно имеем $\|\psi(Y)\|_{\tau} \leq w \leq x$, где $x \leftrightharpoons max(w, 1)$. Как мы уже знаем, $\varphi(Y)$ - норма функционала $\widetilde{\sigma}_{Y\square}$ относительно пространства

$\pi(Y)$ и, следовательно, существует $X \in \pi(Y)$ такой, что $\| X \|_{\pi} \leq 1$ и $\varphi(Y) \geq \sigma(Y \square X) >$
$> \varphi(Y) - \dfrac{1}{2x \cdot 2^{k}}$. Отсюда

$$|\varphi(Y) - \sigma(Y \square X)| \cdot \| \psi(Y) \|_{\tau} \leq \frac{1}{2 \cdot 2^{k}} .$$

По (5), $U_p(X) = \sigma(Y \square X) \cdot Y$ и, следовательно,

$$\| \psi(X) \|_{\tau} = \| \psi(U_p(X)) \|_{\tau} = |\sigma(Y \square X)| \cdot \| \psi(Y) \|_{\tau} \geq$$
$$\geq |\varphi(Y)| \cdot \| \psi(Y) \|_{\tau} - |\varphi(Y) - \sigma(Y \square X)| \cdot$$
$$\cdot \| \psi(Y) \|_{\tau} > w - \frac{1}{2^{k}} .$$

Итак, мы доказали

$$\forall_k \exists_X (X \in \pi \; \& \; \| X \|_{\pi} \leq 1 \; \& \; \| \psi(X) \|_{\tau} > w - \frac{1}{2^{k}}) .$$

Таким образом, КДЧ w действительно является нормой оператора ψ относительно пространства π и теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Пусть π есть E -пространство и $\mathcal{B}$ - базис пространства π , для которых существуют КЛНП, сопряженное к пространству π и базис этого пространства, сопряженный к базису $\mathcal{B}$. Пусть далее p - НЧ, τ - КЛНП, а ψ - линейный оператор из пространства π в пространство τ такой, что $\forall_k (k > p \supset \psi(\mathcal{B}(k)) \underset{\tau}{=} O_{\tau})$. Тогда существует КДЧ w , являющееся нормой оператора ψ относительно пространства π .

<u>Доказательство</u>. Ввиду предполагаемых свойств пространства π и базиса $\mathcal{B}$, очевидно для всяких НЧ k и КДЧ $u_1, \ldots, u_k$ существует норма функционала $\sum_{j=1}^{k} u_j \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{j*}$. Таким образом, выполнены условия теоремы 1.

<u>Замечание 4</u>. E -пространство l_1 не обладает

сопряженным пространством, но можно построить базис $\mathscr{L}$ этого пространства такой, что для любых НЧ k и КДЧ $u_1, \dots, u_k$ существует норма функционала $\sum_{j=1}^{k} u_j \cdot \widetilde{\mathscr{L}}_{j*}$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть π есть E -пространство и $\mathscr{L}$ - базис пространства π, для которых существуют КЛНП, сопряженное к пространству π и базис этого пространства, сопряженный к базису $\mathscr{L}$. Пусть τ - КЛНП, а ψ - линейный оператор из пространства π в пространство τ такой, что для всякой последовательности $\{X_k\}_k$ элементов пространства π, для которой $X_k \xrightarrow{c} O_\pi$, последовательность КДЧ $\{\|\psi(X_k)\|_\tau\}_k$ сходится к нулю. Тогда существует КДЧ x , являющееся нормой оператора ψ относительно пространства π и далее, если для любых НЧ k и $X \in \pi$ положим $\psi_k(X) \leftrightharpoons \psi(U_k(X))$ (т.е. $\psi_k(X) = \psi(\sum_{j=1}^{k} \mathscr{L}(j * X) \cdot \mathscr{L}(j))$), то для всякого НЧ k ψ_k - линейный оператор из пространства π в пространство τ , обладающий нормой относительно пространства π, и выполнено

$$(15) \qquad \forall_n \exists_q \forall_k \forall_X (X \in \pi \;\&\; k \geq q \supset \|\psi(X) - \psi_k(X)\|_\tau \leq \frac{1}{n} \cdot \|X\|_\pi) .$$

<u>Доказательство</u>. Будем пользоваться обозначениями приведенными в замечании 1.

Аналогично лемме 4 из [3] можно доказать, что для любых НЧ n, q существует КДЧ $w_{n,q}$, являющееся нормой оператора ψ относительно подпространства $\pi_{n, n+q-1}$. Очевидно, что для всяких НЧ $n, q, \varkappa, b$, для которых

$r \le p \,\&\, p + q \le r + s$, выполнено

(16) $$w_{p,q} \le w_{r,s} .$$

1) Пусть $\{m_k\}_k$ и $\{m_k\}_k$ - последовательности НЧ. Докажем, что если выполнено $\forall_p \exists_q \forall_k (k \ge q \supset m_k > p)$, то последовательность КДЧ $\{w_{m_k, m_k}\}_k$ сходится к нулю. Для любого НЧ k существует $X_k \in \pi_{m_k, m_k + m_k - 1}$ такой, что $\| X_k \|_\pi \le 1 \,\&\, \| \psi(X_k) \|_\tau > w_{m_k, m_k} - \frac{1}{2^k}$. Тогда, согласно лемме 2, $X_k \xrightarrow{c} O_\pi$ и, следовательно, последовательность КДЧ $\{ \| \psi(X_k) \|_\tau \}_k$ сходится к нулю. Таким образом, сходится к нулю тоже последовательность $\{ w_{m_k, m_k} \}_k$.

2) По 1), для любого НЧ p последовательность $\{w_{k,p}\}_k$ сходится к нулю. Ввиду того можно аналогично доказательству леммы 2 из [3] построить алгорифм $\mathfrak{A}$ такой, что

а) для всякого НЧ p $\widetilde{\mathfrak{A}}_{p*}$ - алгорифмический оператор из КЛНП $\mathcal{E}_1$ в КЛНП $\mathcal{E}_1$,

б) для всяких НЧ p, q и рационального числа a выполнено

$$\mathfrak{A}(p * \frac{1}{q}) = \mathfrak{A}(p * -\frac{1}{q}) = w_{q,p} , \quad \mathfrak{A}(p * 0) = 0 ,$$

если $|a| \ge 1$, то $\mathfrak{A}(p * a) = w_{1,p}$ и если $\frac{1}{q+1} \le |a| < \frac{1}{q}$, то $\mathfrak{A}(p * a) = (w_{q,p} - w_{q+1,p}) \cdot$
$$\cdot\, q \cdot (q+1) \cdot (|a| - \frac{1}{q+1}) + w_{q+1,p} .$$

Заметим, что для любых НЧ k и КДЧ u выполнено $\mathfrak{A}(k * u) \ge 0$.

3) Пусть $\{u_k\}_k$ - последовательность КДЧ сходящаяся к нулю. Докажем, что тогда сходится к нулю и последовательность $\{\mathfrak{A}(k * u_k)\}_k$. Не теряя общности, допустим $\forall_k (0 \leq u_k < 1)$.

а) Пусть сначала $\forall_k (u_k \geq \frac{1}{k+3})$. Тогда можно построить последовательность НЧ $\{l_k\}_k$ такую, что для любого НЧ k $\frac{1}{l_k+2} < u_k < \frac{1}{l_k}$. Следовательно, последовательность $\{\frac{1}{l_k}\}_k$ сходится к нулю и, по 1), сходится к нулю и последовательность $\{w_{l_k, k+2}\}_k$. Ввиду свойств алгорифма $\mathfrak{A}$ для любого НЧ k выполнено

$$\mathfrak{A}(k * u_k) \leq \max_{0 \leq j \leq 2} \mathfrak{A}(k * \frac{1}{l_k+j}) = \max_{0 \leq j \leq 2} w_{l_k+j, k}.$$

По (16), имеем $w_{l_k+j,k} \leq w_{l_k, k+2}$ $(j = 0, 1, 2)$.

Таким образом, для любого НЧ k $0 \leq \mathfrak{A}(k * u_k) \leq$

$\leq w_{l_k, k+2}$ и, следовательно, последовательность $\{\mathfrak{A}(k * u_k)\}_k$ сходится к нулю.

б) Допустим теперь, что $\forall_k (u_k \leq \frac{1}{k+3})$. Согласно 1), последовательность $\{w_{k,k}\}_k$ сходится к нулю. Итак, если p - НЧ, то существует НЧ q такое, что

$\forall_k (k \geq q \supset w_{k,k} \leq \frac{1}{p})$. Пусть k - НЧ, $k \geq q$. Если $u_k = 0$, то $0 = \mathfrak{A}(k * u_k) \leq \frac{1}{p}$. Если $u_k > 0$, то очевидно существует НЧ l такое, что $l \geq k + 2$ & & $\frac{1}{l+2} < u_k < \frac{1}{l}$. Тогда, аналогично а) и по (16), имеем $0 \leq \mathfrak{A}(k * u_k) \leq w_{l, k+2} \leq w_{l,l} \leq \frac{1}{p}$.

Ввиду того, что $\neg\neg(u_k = 0 \vee u_k > 0)$ и что из нера-

венства $\mathcal{U}(k * u_k) \leq \frac{1}{p}$ можно снять двойное отрицание, имеет место $\forall_k (k \geq q \supset 0 \leq \mathcal{U}(k * u_k) \leq \frac{1}{p})$.
Таким образом, последовательность $\{\mathcal{U}(k * u_k)\}_k$ сходится к нулю.

в) В общем случае (т.е. $\forall_k (0 \leq u_k < 1)$), для всякого НЧ k обозначим $v_k^1 \leftrightharpoons max(\frac{1}{k+3}, u_k)$ и $v_k^2 \leftrightharpoons min(\frac{1}{k+3}, u_k)$. Тогда $\forall_k \neg\neg (u_k = v_k^1 \vee u_k = v_k^2)$ и, по а) и б), последовательности $\{\mathcal{U}(k * v_k^1)\}_k$ и $\{\mathcal{U}(k * v_k^2)\}_k$ сходятся к нулю. Таким образом, последовательность $\{\mathcal{U}(k * u_k)\}_k$ действительно сходится к нулю.

4) Построим теперь конструктивный аналог классического пространства c_0 (т.е. последовательностей действительных чисел сходящихся к нулю). Пусть $\mathcal{A}$ - множество слов в алфавите $Ч_0 \cup \{\bowtie\}$, для которого $P \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда существуют алгорифмы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$ такие, что $P \rightleftharpoons \{\mathcal{C}, Ч_3\} \bowtie \{\mathcal{E}, Ч_0\}$, причем для всякого НЧ k выполнено $!\mathcal{C}(k)$, $\mathcal{C}(k)$ есть КДЧ, а алгорифм $\mathcal{E}$ - регулятор сходимости к нулю последовательности $\{\mathcal{C}(k)\}_k$. В согласии с классической математикой можно построить алгорифмы сложения элементов множества $\mathcal{A}$ и умножения элементов множества $\mathcal{A}$ на КДЧ, нулевой элемент множества $\mathcal{A}$ и алгорифм вычисления нормы (действительно, существует алгорифм применимый к всякому $P \in \mathcal{A}$ и выдающий по нему предел последовательности

$\{\max_{1 \le j \le k} | \mathcal{B}^{Ч_3, \alpha}(\mathcal{J}_1(P) \propto j)| \}_k)$, причем эта система будет образовать полное сепарабельное КЛНП, которое обозначим посредством c_0. Заметим, что если $P \in \mathcal{A}$ и $P \doteq \mathcal{E} \mathcal{C}, Ч_3 \mathcal{З} \bowtie \mathcal{E} \mathcal{C}, Ч_0 \mathcal{З}$, то для любого НЧ k $\mathcal{B}^{Ч_3, \alpha}(\mathcal{J}_1(P) \propto k) \doteq \mathcal{C}(k)$.

Для всяких НЧ k и $X \in c_0$ положим $\varphi(k * X) \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons \mathcal{M}(k * \mathcal{B}^{Ч_3, \alpha}(\mathcal{J}_1(X) \propto k))$. Тогда, по 2) и 3), алгорифм φ удовлетворяет предположениям леммы 2 из [3]. Таким образом, имеем

$$\forall_p \exists_q \forall_k \forall_X (X \in c_0 \,\&\, \|X\|_{c_0} \le \frac{1}{q} \,\&\, k \ge q \supset |\varphi(k * X)| \le \frac{1}{p}).$$

Для всяких НЧ k, ℓ очевидно существует $X_k^\ell \in c_0$ такой, что $\mathcal{B}^{Ч_3, \alpha}(\mathcal{J}_1(X_k^\ell) \propto k) \doteq \frac{1}{\ell}$ и для НЧ q, $q \ne k$ $\mathcal{B}^{Ч_3, \alpha}(\mathcal{J}_1(X_k^\ell) \propto q) \doteq 0$. Значит, $\|X_k^\ell\|_{c_0} = \frac{1}{\ell}$ и $\varphi(k * X_k^\ell) = \mathcal{M}(k * \frac{1}{\ell}) = w_{\ell, k}$.

Следовательно, $\forall_p \exists_q \forall_k \forall_\ell (\ell \ge q \,\&\, k \ge q \supset w_{\ell, k} \le \frac{1}{p})$

и, по (16)

(17) $$\forall_p \exists_q \forall_k \forall_\ell (\ell \ge q \supset w_{\ell, k} \le \frac{1}{p}).$$

5) Для любых НЧ k и $X \in \pi$ положим $\psi_k(X) \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons \psi(\mathcal{U}_k(X))$ и $\eta_k(X) \leftrightharpoons \psi(V_k(X))$. Тогда ψ_k и η_k – линейные операторы из пространства π в пространство τ. Докажем, что операторы ψ_k обладают требуемыми свойствами.

Ввиду свойств операторов $\mathcal{U}_k$, имеем $\forall_k \forall_j (j > k \supset$ $\supset \psi_k(\mathcal{L}(j)) \underset{\tau}{=} \mathcal{O}_\tau)$. Тогда, согласно следствию теоремы 1, для всякого НЧ k оператор ψ_k обладает нормой относительно пространства π.

Докажем (15). Заметим, что для любых НЧ k и $X \in \pi$ $\eta_k(X) = \psi(X) - \psi_k(X)$. Далее, по лемме 3 из [3], существует КДЧ $K \geq 1$ такое, что $\forall_k \forall_X (X \in \pi \supset \supset \| V_k(X)\|_\pi \leq K . \| X \|_\pi)$. Пусть теперь p - НЧ. По (17), существует НЧ q такое, что для любых НЧ k, ℓ если $k \geq q$, то $w_{k,\ell} \leq \frac{1}{p . K}$. Допустим, что существуют НЧ k и $X \in \pi$ такие, что $k \geq q \;\&\; \| X \|_\pi = 1 \;\&\; \| \eta_k(X)\|_\tau > \frac{1}{p}$. Ввиду ограниченности оператора η_k можно построить НЧ n и $Y \in \pi_{1,n}$ такие, что $n \geq k + 1 \;\&\; \| Y \|_\pi = 1 \;\&\; \| \eta_k(Y)\|_\tau > \frac{1}{p}$. (Возьмем $Y \leftrightharpoons \frac{U_n(X)}{\| U_n(X)\|_\pi}$ для достаточно большого n.) Тогда $V_k(Y) \in \pi_{k+1,n}$ и, следовательно, $\| \eta_k(Y)\|_\tau = \| \psi(V_k(Y))\|_\tau \leq w_{k+1,n-k} . \| V_k(Y)\|_\pi \leq \frac{1}{p . K} . K = \frac{1}{p}$. Но это противоречие и нетрудно видеть, что отсюда получаем (15). Таким образом, согласно лемме 1, существует КДЧ x, являющееся нормой оператора ψ относительно пространства π. Теорема доказана.

Литература

[1] А.А. МАРКОВ: Теория алгорифмов, Труды Мат.инст.им.В.А. Стеклова XLII (1954).

[2] - Проблемы конструктивного направления в математике, 2 (сборник работ), Труды Мат.инст.им.В.А. Стеклова LXVII (1962).

[3] A. КУЧЕРА: Слабая сходимость в конструктивной математике, Comment.Math. Univ.Carolinae 11 (1970),285-308.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83, Praha 8
Československo

(Oblatum 13.1.1971)