Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

О представимости конструктивных функций слабо ограниченной вариации

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 11 (1970), No. 3, 421--434

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105289`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

11,3 (1970)

О ПРЕДСТАВИМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ СЛАБО ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

О. ДЕМУТ , Прага

В конструктивной математике введены два аналога классического понятия функций ограниченной вариации - конструктивные функции ограниченной вариации и конструктивные функции слабо ограниченной вариации ([2], стр.447 и 463). В первом случае требуется существование вариации а во втором лишь существование верхней границы вариационных сумм. Известно, что всякую конструктивную функцию ограниченной вариации можно представить в виде разности двух неубывающих функций ([2], 453) и что существует равномерно непрерывная функция слабо ограниченной вариации, которую нельзя представить таким образом ([2], 486). Доказательство последнего утверждения основано на том, что в конструктивной математике монотонные функции равномерно непрерывны.

В [4] были определены объекты, являющиеся аналогом классических почти всюду определенных монотонных функций. В настоящей заметке показано, что существует функция слабо ограниченной вариации, которую нельзя представить (в смысле равенства почти всюду) в виде разности объектов этого типа.

В дальнейшем буквы k, l, m, n, p и q служат переменными для натуральных чисел (НЧ), i и j - переменными для целых чисел а u, v, w, x, y и z - для конструктивных действительных чисел (КДЧ).

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [3] и [4]. В частности, для всяких последовательности ступенчатых остовов $\{G_l\}_l$, последовательности ${}^{(1)}S_\sigma$-множеств $\{{}^m\mathcal{G}\}_m$ (определения приведены в [3]), КДЧ u и v, $0 \leq u \leq 1$, и знака $\ast$, $\ast \equiv \leq \vee \ast \equiv \geq$,

1) $P(\{G_l\}_l, u, v)$ обозначает: последовательность КДЧ $\{\vartheta(G_l u)\}_l$ определена и сходится к v и

2) $A_\ast(\{G_l\}_l, \{{}^m\mathcal{G}\}_m)$ обозначает: для всякого НЧ m ${}^{(1)}S_\sigma$-множество ${}^{m+1}\mathcal{G}$ является частью ${}^m\mathcal{G}$, мера ${}^m\mathcal{G}$ меньше чем $\frac{1}{2^m}$ и выполнено

$$\forall x y (0 \leq x \leq y \leq 1 \,\&\, \neg(x \in {}^m\mathcal{G}) \,\&\, \neg(y \in {}^m\mathcal{G}) \supset$$

$$\supset \exists w z (P(\{G_l\}_l, x, w) \,\&\, P(\{G_l\}_l, y, z) \,\&\, w \ast z))$$ и

3) мы определим $C_\ast(\{G_l\}_l, \{{}^m\mathcal{G}\}_m, u, v) \rightleftharpoons 0 < u < 1 \,\&$
$\& \, \mathrm{Inf}(v, \wedge z(\exists k y(0 < y < 1 \,\&\, u \ast y \,\&\, \neg(u = y) \,\&$
$\& \, \neg(y \in {}^k\mathcal{G}) \,\&\, P(\{G_l\}_l, y, z)))) \,\&\, \mathrm{Sup}(v, \wedge z(\exists k y(0 <$
$< y < 1 \,\&\, y \ast u \,\&\, \neg(u = y) \,\&\, \neg(y \in {}^k\mathcal{G}) \,\&$
$\& \, P(\{G_l\}_l, y, z))))$.

<u>Теорема 1</u>. Можно построить функцию g такую, что

а) g является равномерно непрерывной функцией слабо ограниченной вариации на сегменте $0 \Delta 1$ и б) не существуют последовательности ступенчатых остовов $\{G_\ell^1\}_\ell$ и $\{G_\ell^2\}_\ell$ и последовательности ${}^{(1)}S_\sigma$ - множеств $\{{}^m\mathcal{G}^1\}_m$ и $\{{}^m\mathcal{G}^2\}_m$, для которых выполнено

$$(1)\quad A_\le(\{G_\ell^1\}_\ell, \{{}^m\mathcal{G}^1\}_m) \& A_\le(\{G_\ell^2\}_\ell, \{{}^m\mathcal{G}^2\}_m) \& \forall m x u v (0< <x<1 \& \neg(x\in{}^m\mathcal{G}^1) \& \neg(x\in{}^m\mathcal{G}^2) \& P(\{G_\ell^1\}_\ell, x, u) \& \& P(\{G_\ell^2\}_\ell, x, v) \supset g(x) = u - v).$$

<u>Лемма 1</u>. Пусть $\{G_\ell^1\}_\ell$ и $\{G_\ell^2\}_\ell$ последовательности ступенчатых остовов, $\{{}^m\mathcal{G}^1\}_m$ и $\{{}^m\mathcal{G}^2\}_m$ последовательности ${}^{(1)}S_\sigma$ -множеств, $\divideontimes$ один из знаков $\le$ и $\ge$ и b_1 и b_2 рациональные числа такие, что

$$(2)\quad A_\divideontimes(\{G_\ell^1\}_\ell, \{{}^m\mathcal{G}^1\}_m) \& A_\divideontimes(\{G_\ell^2\}_\ell, \{{}^m\mathcal{G}^2\}_m) \& 0<b_1<b_2<1.$$

Тогда 1) существует возрастающая последовательность НЧ $\{m_n\}_n$ и последовательности систем КДЧ $\{\{\xi_i^n\}_{i=0}^{2^{n-1}}\}_n$ и $\{\{\eta_i^n\}_{i=0}^{2^{n-1}}\}_n$ такие, что $0<\xi_0^1<b_1<b_2<\xi_1^1<1$ и для всякого НЧ n

$$(3)\quad 0<\xi_0^1=\xi_0^n<\xi_1^n<\ldots<\xi_{2^{n-1}}^n=\xi_1^1<1 \& \forall i(0\le i\le \le 2^{n-1}\supset \neg(\xi_i^n\in{}^{m_n}\mathcal{G}^1) \& \neg(\xi_i^n\in{}^{m_n}\mathcal{G}^2) \& \& \exists y z(P(\{G_\ell^1\}_\ell, \xi_i^n, y) \& \& P(\{G_\ell^2\}_\ell, \xi_i^n, z) \& \eta_i^n = y+z))$$

и

$$(4)\quad \forall j(1\le j\le 2^{n-1}\supset \xi_{2j-2}^{n+1}=\xi_{j-1}^n<\xi_{j-1}^n+\tfrac{1}{3}(\xi_j^n-\xi_{j-1}^n)\le \le \xi_{2j-1}^{n+1}\le \xi_{j-1}^n+\tfrac{2}{3}\cdot(\xi_j^n-\xi_{j-1}^n)<\xi_j^n=\xi_{2j}^{n+1} \& \& \eta_{2j-2}^{n+1}=\eta_{j-1}^n \divideontimes \eta_{2j-1}^{n+1} \divideontimes \eta_j^n = \eta_{2j}^{n+1}),$$

2) для любого НЧ p существуют последовательность неубывающих систем НЧ $\{\{{}^p q_j^n\}_{j=1}^{t_p}\}_n$ и системы КДЧ $\{{}^p x_j\}_{j=1}^{t_p}$, для которых выполнено

$$\forall n j\,(1 \leq j \leq t_p \supset 1 \leq {}^p q_j^n \leq 2^{n-1} \,\&\, \xi^n_{{}^p q_j^n - 1} \leq {}^p x_j \leq \xi^n_{{}^p q_j^n} \,\&$$

$$(5) \qquad \&\, ({}^p q_j^{n+1} = 2 \cdot {}^p q_j^n \vee {}^p q_j^{n+1} = 2 \cdot {}^p q_j^n - 1)) \,\&\, \forall n i\,(1 \leq i \leq$$

$$\leq 2^{n-1} \,\&\, \neg \exists j\,(1 \leq j \leq t_p \,\&\, {}^p q_j^n = i) \supset |\eta_i^n - \eta_{i-1}^n| < \frac{1}{2^p}),$$

3) если u КДЧ такое, что $b_1 < u \leq b_2$ & & $\forall p j\,(1 \leq j \leq t_p \supset \neg(u = {}^p x_j))$, то существует КДЧ v, для которого имеет место $C_*(\{G_\ell^1\}_\ell,\ \{{}^m\mathcal{G}^1\}_m, u, v)$.

<u>Обозначения</u>. Пусть m НЧ, x и u КДЧ, $0 \leq x \leq 1$. Тогда мы обозначим

$$B(m,x) \rightleftharpoons (0 < x < 1 \,\&\, \neg(x \in {}^m\mathcal{G}^1) \,\&\, \neg(x \in {}^m\mathcal{G}^2)),$$

$$P_i(x,u) \rightleftharpoons P(\{G_\ell^i\}_\ell, x, u) \qquad (i = 1, 2) \qquad \text{и}$$

$$P_0(x,u) \rightleftharpoons P(\{G_\ell^1\}_\ell + \{G_\ell^2\}_\ell, x, u).$$

<u>Доказательство леммы 1</u>. 1) а) Ввиду (2) для любых НЧ m и КДЧ x из $B(m,x)$ следует

$$B(m+1,x) \,\&\, \exists u v\,(P_1(x,u) \,\&\, P_2(x,v) \,\&\, P_0(x,u+v)).$$

б) Пусть y и z КДЧ и m НЧ такие, что $0 < y < z < 1 \,\&\, \frac{1}{2^{m-1}} < z - y$. ${}^m\mathcal{G}^1$ и ${}^m\mathcal{G}^2$ ${}^{(1)}S_\sigma$-множества меры меньшей чем $\frac{1}{2^m}$. Объединением последовательностей ${}^m\mathcal{G}^1$ и ${}^m\mathcal{G}^2$ возникает последовательность сегментов ${}^m\mathcal{G}$ такая, что частные суммы длин ее сегментов сходятся к КДЧ, меньшему чем $\frac{1}{2^{m-1}}$. Согласно доказательству теоремы 2.4 из [2], 470-3, существует КДЧ x, для которого выполнено $0 < y \leq x \leq z < 1 \,\&\, \neg(x \in {}^m\mathcal{G}^1) \,\&\, \neg(x \in {}^m\mathcal{G}^2)$, т.е. $B(m,x) \,\&\, x \in y \Delta z$. Но тогда – согласно а) – существуют КДЧ u и v такие, что

$P_1(x,u) \& P_2(x,v) \& P_0(x,u+v)$.

в) α) Мы построим НЧ m_1 , для которого верно $\frac{1}{2^{m_1-1}} < \frac{1}{3}\cdot min(b_1, 1-b_2)$. Тогда по б) существуют КДЧ ξ_0^1 , ξ_1^1 , η_0^1 и η_1^1 такие, что $0<\frac{1}{3}\cdot b_1 \le \xi_0^1 \le \frac{2}{3}b_1 < b_1 < b_2 < b_2+\frac{1}{3}(1-b_2) \le \xi_1^1 \le b_2 + {}$ ${}+\frac{2}{3}\cdot(1-b_2) < 1 \& \forall i (0\le i \le 1 \supset B(m_1, \xi_i^1) \& \exists u v (P_1(\xi_i^1,$ $u) \& P_2(\xi_i^1, v) \& \eta_i^1 = u+v))$ и, следовательно, ввиду (2) $\eta_0^1 * \eta_1^1$.

β) Пусть n НЧ и пусть уже построены НЧ m_n и системы КДЧ $\{\xi_i^n\}_{i=0}^{2^{n-1}}$ и $\{\eta_i^n\}_{i=0}^{2^{n-1}}$ и выполнено (3). Можно построить НЧ m_{n+1} такое, что

$$m_n < m_{n+1} \& \forall j (1\le j \le 2^{n-1} \supset \frac{1}{2^{m_{n+1}-1}} < \frac{1}{3}\cdot(\xi_j^n - \xi_{j-1}^n)) .$$

Мы определим $\forall i (0\le i \le 2^{n-1} \supset \xi_{2i}^{n+1} \rightleftharpoons \xi_i^n \& \eta_{2i}^{n+1} \rightleftharpoons \eta_i^n)$. Тогда ввиду (3) выполнено $\forall i\ (0 \le i \le 2^{n-1} \supset$ $\supset B(m_{n+1}, \xi_{2i}^{n+1}) \& P_0(\xi_{2i}^{n+1}, \eta_{2i}^{n+1}))$. Согласно б) существуют для всякого НЧ j , $1\le j \le 2^{n-1}$, КДЧ ξ_{2j-1}^{n+1} и η_{2j-1}^{n+1} такие, что $\xi_{2j-2}^{n+1} = \xi_{j-1}^n < \xi_{j-1}^n +$ $+\frac{1}{3}\cdot(\xi_j^n - \xi_{j-1}^n) \le \xi_{2j-1}^{n+1} \le \xi_{j-1}^n + \frac{2}{3}\cdot(\xi_j^n - \xi_{j-1}^n) < \xi_j^n = \xi_{2j}^{n+1} \&$ $\& B(m_{n+1}, \xi_{2j-1}^{n+1}) \& \exists u v (P_1(\xi_{2j-1}^{n+1}, u) \& P_2(\xi_{2j-1}^{n+1}, v) \&$ $\& \eta_{2j-1}^{n+1} = u+v) \& P_0(\xi_{2j-1}^{n+1}, \eta_{2j-1}^{n+1})$.
Из (2) следует $\eta_{2j-2}^{n+1} * \eta_{2j-1}^{n+1} * \eta_{2j}^{n+1}$.

2) На основании теоремы 1.3 из [2], стр.399, и ее доказательства получаем $\forall x y z (x<y \supset (x<z \vee z<y))$.

Следовательно, для любого НЧ p существует нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_p$ ([1]), применимый к всякому слову типа $n \square x$, где n НЧ а x КДЧ, и выдающий по нему целое число i такое, что $i - \frac{1}{2.3^{n-1}} < x \cdot 2^p < i + (1 - \frac{1}{3^n})$.

Легко убедиться в том, что выполнено

$$\forall x y n ((0 \leq x \supset 0 \leq \mathfrak{A}_p(n \square x)) \& (\mathfrak{A}_p(n \square x) =$$
$$(6) \quad = 0 \supset x < \frac{1}{2^p}) \& \mathfrak{A}_p(n \square (x+y)) - 2 \leq$$
$$\leq \mathfrak{A}_p(n+1 \square x) + \mathfrak{A}_p(n+1 \square y) \leq \mathfrak{A}_p(n \square (x+y))).$$

а) Мы определим $t_p \rightleftharpoons max(1, \mathfrak{A}_p(1 \square |\eta_1^1 - \eta_0^1|))$ и построим последовательность неубывающих систем НЧ $\{\{{}^p q_j^n\}_{j=1}^{t_p}\}_n$ такую, что для всякого НЧ n

α) верно $\forall j (1 \leq j \leq t_p \supset 1 \leq {}^p q_j^n \leq 2^{n-1} \& $
$\& ({}^p q_j^{n+1} = 2 \cdot {}^p q_j^n \vee {}^p q_j^{n+1} = 2 \cdot {}^p q_j^n - 1))$,

β) для любого НЧ i, $1 \leq i \leq 2^{n-1}$, число тех НЧ j, для которых выполнено $1 \leq j \leq t_p \& {}^p q_j^n = i$, больше или равно $\mathfrak{A}_p(n \square |\eta_i^n - \eta_{i-1}^n|)$ и, следовательно,

γ) если i НЧ такое, что $1 \leq i \leq 2^{n-1} \& \neg \exists j (1 \leq$ $\leq j \leq t_p \& {}^p q_j^n = i)$, то $\mathfrak{A}_p(n \square |\eta_i^n - \eta_{i-1}^n|) = 0$ и ввиду (6) $|\eta_i^n - \eta_{i-1}^n| < \frac{1}{2^p}$.

Мы определим $\forall j (1 \leq j \leq t_p \rightleftharpoons {}^p q_j^1 \rightleftharpoons 1)$.

Пусть n НЧ, пусть уже построена неубывающая система НЧ $\{{}^p q_j^n\}_{j=1}^{t_p}$ и выполнено $\forall j (1 \leq j \leq t_p \supset$ $\supset 1 \leq {}^p q_j^n \leq 2^{n-1})$ и β).

Ввиду (6) имеет место

$$\forall i (1 \leq i \leq 2^{n-1} \& \mathfrak{A}_p(n \square |\eta_i^n - \eta_{i-1}^n|) = 0 \supset$$

$$\supset \mathcal{U}_p(n+1\,\square\,|\eta^{n+1}_{2i-1}-\eta^{n+1}_{2i-2}|) = \mathcal{U}_p(n+1\,\square\,|\eta^{n+1}_{2i}-\eta^{n+1}_{2i-1}|)=0).$$

Пусть i НЧ такое, что $1\leq i\leq 2^{n-1}$ & $\& \exists j(1\leq j\leq t_p \,\&\, {}^p q^n_j = i)$. Тогда существуют НЧ ℓ и m, для которых верно $1\leq \ell\leq m\leq t_p \,\&\, {}^p q^n_\ell = {}^p q^n_m = $ $= i \,\&\, \forall j((1\leq j<\ell \vee m<j\leq t_p)\supset \neg({}^p q^n_j = i))$. На основании индукционного предположения, (4) и (6) получаем

$$0\leq \mathcal{U}_p(n+1\,\square\,|\eta^{n+1}_{2i-1}-\eta^{n+1}_{2i-2}|)+\mathcal{U}_p(n+1\,\square\,|\eta^{n+1}_{2i}-\eta^{n+1}_{2i-1}|)\leq$$
$$\leq \mathcal{U}_p(n\,\square\,|\eta^n_i-\eta^n_{i-1}|)\leq m-\ell+1\,.$$

Мы определим $\forall k((\ell\leq k\leq \ell-1+\mathcal{U}_p(n+1\,\square\,|\eta^{n+1}_{2i-1}-\eta^{n+1}_{2i-2}|)\supset$ $\supset {}^p q^{n+1}_k \rightleftharpoons 2i-1)\,\&\,(\ell+\mathcal{U}_p(n+1\,\square\,|\eta^{n+1}_{2i-1}-\eta^{n+1}_{2i-2}|)\leq k\leq m\supset {}^p q^{n+1}_k \rightleftharpoons 2i))$.

б) Ввиду 1) и 2) а) для всякого НЧ j, $1\leq j\leq$ $\leq t_p$, $\{\xi^n_{{}^p q^n_{j-1}}\,\Delta\,\xi^n_{{}^p q^n_j}\}_n$ последовательность сегментов такая, что

$$\forall n(\xi^n_{{}^p q^n_j-1}\leq \xi^{n+1}_{{}^p q^{n+1}_j-1}<\xi^{n+1}_{{}^p q^{n+1}_j}\leq \xi^n_{{}^p q^n_j}\,\&\,0<\xi^{n+1}_{{}^p q^{n+1}_j}-$$
$$-\xi^{n+1}_{{}^p q^{n+1}_j-1}\leq \frac{2}{3}\cdot(\xi^n_{{}^p q^n_j}-\xi^n_{{}^p q^n_j-1}))\,.$$

Следовательно, можно построить КДЧ ${}^p x_j$, для которого выполнено

$$\forall n\,(0<\xi^1_0\leq \xi^n_{{}^p q^n_j-1}\leq {}^p x_j\leq \xi^n_{{}^p q^n_j}\leq \xi^1_1<1)\,.$$

3) Пусть u КДЧ такое, что $b_1\leq u\leq b_2$ & $\& \forall p j(1\leq j\leq t_p\supset\neg(u={}^p x_j))$. Тогда существуют ввиду 1) возрастающие последовательности НЧ $\{\ell_p\}_p$ и $\{m_p\}_p$, для которых выполнено

$$\forall p i j(1\leq i\leq 2^{m_p-1}\,\&\,1\leq j\leq t_p\supset 0<\xi^{m_p}_i-\xi^{m_p}_{i-1}<\frac{1}{2\ell_p}\,\&\,\frac{1}{\ell_p}<|u-{}^p x_j|)$$

и, следовательно,

(7) $\forall p j(1\leq j\leq t_p\supset(u<\xi^{m_p}_{{}^p q^{m_p}_j-2}\vee \xi^{m_p}_{{}^p q^{m_p}_j+1}<u))\,.$

На основании 1) можно построить последовательность НЧ $\{i_p\}_p$ такую, что для всякого НЧ p выполнено

$$1\le i_p < 2^{n_p-1} \& \xi^{n_p}_{i_p-1} \le \xi^{n_{p+1}}_{i_{p+1}-1} < u < \xi^{n_{p+1}}_{i_{p+1}+1} \le \xi^{n_p}_{i_p+1} \&$$

$$\& \neg \exists j (1\le j\le t_p \& i_p \le {}^p\varkappa^{n_p}_j \le i_p+1)$$

и, следовательно, ввиду 2) и (2) получаем

$$|\eta^{n_p}_{i_p+1}-\eta^{n_p}_{i_p-1}| = |\eta^{n_p}_{i_p+1}-\eta^{n_p}_{i_p}|+|\eta^{n_p}_{i_p}-\eta^{n_p}_{i_p-1}| < \frac{2}{2^p} .$$

Согласно (3) существуют для всякого НЧ p КДЧ ${}^1v_p$, ${}^2v_p$, ${}^1w_p$ и ${}^2w_p$ такие, что $\forall j(1\le j\le 2 \supset P_j(\xi^{n_p}_{i_p-1}, {}^jv_p) \& P_j(\xi^{n_p}_{i_p+1}, {}^jw_p))$. Ввиду (2) для всякого НЧ p выполнено ${}^1v_p$, ${}^1v_{p+1} * {}^1w_{p+1} * {}^1w_p \& {}^2v_p * {}^2w_p$ и мы на основании того, что $\eta^{n_p}_{i_p-1} = {}^1v_p + {}^2v_p \& \eta^{n_p}_{i_p+1} = {}^1w_p + {}^2w_p$, получаем $|{}^1w_p - {}^1v_p| + |{}^2w_p - {}^2v_p| = |\eta^{n_p}_{i_p+1} - \eta^{n_p}_{i_p-1}| < \frac{1}{2^{p-1}}$.

Таким образом, последовательности КДЧ $\{{}^1v_p\}_p$ и $\{{}^1w_p\}_p$ сходятся к общему пределу. Если КДЧ v является этим пределом, то ввиду выше сказанного и (2) верно $C_{\varkappa}(\{G^1_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathscr{G}^1\}_m, u, v)$.

<u>Доказательство теоремы 1</u>. Пусть Φ точное дизъюнктное сегментное покрытие сегмента $0 \Delta 1$, $\{\lambda_k\}_k$ - возрастающая последовательность рациональных чисел и g равномерно непрерывная функция слабо ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ из доказательств теорем 3.3 и 3.4 из [2],483-90. Тогда последовательность $\{\lambda_{k+1} - \lambda_k\}_k$ не стремится конструктивно к нулю и для всякого НЧ k функция g полигональна на сегменте Φ_k и ее вариация на Φ_k равна $2\cdot(\lambda_{k+1}-\lambda_k)$.

Заметим, что существуют НЧ k^1 и k^2 такие, что

(8) $$\text{Э}_l(\Phi_{k^1}) = 0 \& \text{Э}_m(\Phi_{k^2}) = 1$$

и выполнено

$$\forall x\,(0 < x < 1 \supset \exists k\, \ell\,(\mathcal{Э}_m(\Phi_k) = \mathcal{Э}_\lambda(\Phi_\ell)\ \& \tag{9}$$
$$\& \ \mathcal{Э}_\lambda(\Phi_k) < x < \mathcal{Э}_m(\Phi_\ell)))$$

(см. свойства покрытий [2],461-2).

Допустим, что $\{G_\ell^1\}_\ell$ и $\{G_\ell^2\}_\ell$ последовательности ступенчатых остовов а $\{{}^m\mathcal{G}^1\}_m$ и $\{{}^m\mathcal{G}^2\}_m$ последовательности ${}^{(1)}S_\sigma$ -множеств, для которых верно (1).

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями, введенными перед доказательством леммы 1, и результатами части 1 б) названного доказательства.

1) Пусть m_0 НЧ, $\{a_i\}_{i=0}^{s}$ возрастающая система рациональных чисел а x и y КДЧ такие, что $0 < x < < a_0 < a_s < y < 1\ \&\ B(m_0, x)\ \&\ B(m_0, y)$. Тогда, как мы знаем, существуют КДЧ v_1, v_2, w_1 и w_2, для которых выполнено $\forall j\,(1 \leq j \leq 2 \supset P_j(x, v_j)\ \&\ P_j(y, w_j))\ \&\ P_0(x, v_1 + v_2)\ \&\ P_0(y, w_1 + w_2)$.

Мы покажем, что выполнено

$$\sum_{j=1}^{s} |g(a_j) - g(a_{j-1})| \leq w_1 + w_2 - (v_1 + v_2) \quad . \tag{10}$$

Пусть k НЧ. Ввиду непрерывности функции g существует НЧ p такое, что $(\frac{2}{p} < \min_{1 \leq j \leq s}(a_j - a_{j-1}))\ \&$ $\&\ (\frac{1}{p} < \min(a_0 - x, y - a_s))$ и

$$\forall i\, z\,(0 \leq i \leq s\ \&\ |z - a_i| \leq \frac{1}{p} \supset |g(z) - g(a_i)| < \frac{1}{2s \cdot 2^k}) \ .$$

Мы определим $m_1 \rightleftharpoons \max(m_0, p) + 1$.

Согласно (1) и части 1 б) доказательства леммы 1 существуют системы КДЧ $\{z_i\}_{i=0}^{s}$, $\{u_i^1\}_{i=0}^{s}$ и $\{u_i^2\}_{i=0}^{s}$ такие, что $\forall i\, j\,(0 \leq i \leq s\ \&\ 1 \leq j \leq 2 \supset |z_i - a_i| \leq \frac{1}{p}\ \&$ $\&\ B(m_1, z_i)\ \&\ P_j(z_i, u_i^j)\ \&\ g(z_i) = u_i^1 - u_i^2)$

и, следовательно, $x < x_0 < x_1 < \ldots < x_s < y$ и

$$\forall_i \, (0 \le i \le s \supset |g(x_i) - g(a_i)| < \frac{1}{2s \cdot 2^k}) .$$

Но тогда - ввиду (1) - $v_j \le u_0^j \le u_1^j \le \ldots \le u_s^j \le w_j$ $(j = 1, 2)$. Таким образом, выполнено

$$\sum_{j=1}^{s} |g(a_j) - g(a_{j-1})| \le \sum_{j=1}^{s} |g(x_j) - g(x_{j-1})| + \frac{1}{2^k} =$$
$$= \sum_{j=1}^{s} |(u_j^1 - u_j^2) - (u_{j-1}^1 - u_{j-1}^2)| + \frac{1}{2^k} \le \sum_{j=1}^{s} ((u_j^1 + u_j^2) -$$
$$- (u_{j-1}^1 + u_{j-1}^2)) + \frac{1}{2^k} \le w_1 + w_2 - (v_1 + v_2) + \frac{1}{2^k} .$$

Итак, мы для всякого НЧ k доказали,

$$\sum_{j=1}^{s} |g(a_j) - g(a_{j-1})| < w_1 + w_2 - (v_1 + v_2) + \frac{1}{2^k}$$

и, следовательно, верно (10).

2) Пусть m НЧ а x и y КДЧ, для которых выполнено $B(m, x) \,\&\, B(m, y)$. Тогда по 1) существуют КДЧ v и w такие, что $P_0(x, v) \,\&\, P_0(y, w)$ и для любого НЧ k из $x < \mathrm{Э}_\lambda(\Phi_k) < \mathrm{Э}_m(\Phi_k) < y$ следует, что КДЧ $(w - v)$ больше или равно вариации функции g на сегменте Φ_k, т.е. выполнено $0 < 2 \cdot (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \le w - v_0$.

3) Пусть k^1 и k^2 НЧ такие, что (8). Мы определим $b_1 \rightleftharpoons \mathrm{Э}_m(\Phi_{k^1}) \,\&\, b_2 \rightleftharpoons \mathrm{Э}_\lambda(\Phi_{k^2})$.

Пусть p НЧ. Согласно лемме 1 существуют последовательности $\{\{\xi_i^n\}_{i=0}^{2^n-1}\}_n$, $\{\{\eta_i^n\}_{i=0}^{2^n-1}\}_n$ и $\{\{{}^p\varkappa_j^n\}_{j=1}^{t_p}\}_n$ и система КДЧ $\{{}^p x_j\}_{j=1}^{t_p}$, для которых для всякого НЧ n выполнено $0 < \xi_0^n < b_1 < b_2 < \xi_{2^n-1}^n < 1$ и (3) - (5).

Для любого НЧ j, $1 \le j \le t_p$, существуют ввиду (9) НЧ s_j^1 и s_j^2 такие, что $\mathrm{Э}m(\Phi_{s_j^1}) = \mathrm{Э}\lambda(\Phi_{s_j^2}) \,\&$ $\&\, \mathrm{Э}\lambda(\Phi_{s_j^1}) < {}^p x_j < \mathrm{Э}m(\Phi_{s_j^2})$. Но тогда можно построить

НЧ n_j, для которого верно

(11) $\forall n\,(n_j \leqslant n \supset \text{Эл}(\Phi_{S^1_j}) < \xi^{n}_{{}^p q^n_j - 1} \leqslant {}^p x_j \leqslant \xi^{n}_{{}^p q^n_j} < \text{Эп}(\Phi_{S^2_j}))$.

Пусть $n_0 \rightleftharpoons \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant t_p} n_j$. Согласно (9) существует НЧ q такое, что

$k^1 + k^2 + \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant t_p}(S^1_j + S^2_j) \leqslant q \;\&\; \forall i\,(1 \leqslant i < 2^{n_0 - 1} \supset \exists k l\,(1 \leqslant k \leqslant q \;\&\; 1 \leqslant l \leqslant q \;\&$
$\& \;\text{Эп}(\Phi_k) = \text{Эл}(\Phi_l) \;\&\; \text{Эл}(\Phi_k) < \xi^{n_0}_i < \text{Эп}(\Phi_l)))$.

Тогда, очевидно, для всякого НЧ k, $q < k$, существует НЧ i, для которого выполнено $1 \leqslant i \leqslant 2^{n_0 - 1} \;\&\; \xi^{n_0}_{i-1} <$

$< \text{Эл}(\Phi_k) < \text{Эп}(\Phi_k) < \xi^{n_0}_i$ и, следовательно, по 2)

$$0 < 2 \cdot (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \leqslant \eta^{n_0}_i - \eta^{n_0}_{i-1} .$$

Для всякого НЧ j, $1 \leqslant j \leqslant t_p$, имеет место (11). Таким образом, верно $\neg\, \exists j\,(1 \leqslant j \leqslant t_p \;\&\; {}^p q^{n_0}_j = i)$ и ввиду того, что выполнено (5), мы получаем

$$0 < 2 \cdot (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \leqslant \eta^{n_0}_i - \eta^{n_0}_{i-1} < \frac{1}{2^p} .$$

Итак, мы на основании предположения, что для последовательностей $\{G^1_l\}_l$, $\{G^2_l\}_l$, $\{{}^m\mathcal{G}^1\}_m$ и $\{{}^m\mathcal{G}^2\}_m$ выполнено (1), доказали

$$\forall p\, \exists q\, \forall k\,(q < k \supset 0 < \lambda_{k+1} - \lambda_k < \frac{1}{2^p}) ,$$

что противоречит свойствам последовательности $\{\lambda_k\}_k$.

Лемма 2. Пусть $\{G_l\}_l$ последовательность ступенчатых остовов, $\{{}^m\mathcal{G}\}_m$ последовательность ${}^{(1)}S_\sigma$-множеств а $*$ один из знаков $\leqslant$ и $\geqslant$ такие, что $A_*(\{G_l\}_l, \{{}^m\mathcal{G}\}_m)$. Тогда можно построить последовательность ступенчатых остовов $\{H_l\}_l$ и последовательность ${}^{(1)}S_\sigma$-множеств $\{{}^m\mathcal{E}\}_m$, для которых

1) $A_*(\{H_l\}_l, \{{}^m\mathcal{E}\}_m) \;\&\; \{H_l\}_l = \{G_l\}_l$,

2) для $i = 1, 2$ и всяких КДЧ u^i и v^i таких, что

(12) $0 < u^i < 1 \& \neg \exists j k (u^i = \frac{j}{2^k}) \& C_*(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{g}\}_m, u^i, v^i)$,

выполнено $\forall i (1 \le i \le 2 \supset P(\{H_\ell\}_\ell, u^i, v^i)) \& (u^1 \le u^2 \supset v^1 * v^2)$ и

3) если m НЧ и u КДЧ такие, что $0 \le u \le 1 \&$ $\& \neg (u \in {}^m\mathcal{G})$, то $0 < u < 1 \& \neg \exists j k (u = \frac{j}{2^k})$ и существует КДЧ v, для которого верно

$C_*(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{g}\}_m, u, v)$.

Доказательство. Мы используем теорему 2 из [4] и ее доказательство. Там построены последовательности $\{H_\ell\}_\ell$ и $\{{}^m\mathcal{G}\}_m$, возрастающая последовательность НЧ $\{k_n\}_n$ и последовательности систем КДЧ $\{\{\xi_j^n\}_{j=1}^{2^{k_n}}\}_n$ и $\{\{\eta_j^n\}_{j=1}^{2^{k_n}}\}_n$ такие, что 1) и для всякого НЧ n выполнено

$$\forall j (1 \le j \le 2^{k_n} \supset \frac{j-1}{2^{k_n}} < \xi_j^n < \frac{j}{2^{k_n}} \& \neg (\xi_j^n \in {}^{k_n+2}\mathcal{g}) \&$$

(13) $$\& P(\{G_\ell\}_\ell, \xi_j^n, \eta_j^n)) \& \eta_1^n * \eta_2^n * \ldots * \eta_{2^{k_n}}^n \&$$

$$\& H_n \equiv 0 \gamma \frac{1}{2^{k_n}} \gamma \frac{2}{2^{k_n}} \gamma \ldots 1 \delta \eta_1^n \gamma \eta_2^n \gamma \ldots \eta_{2^{k_n}}^n .$$

Пусть $i = 1, 2$ и u^i и v^i КДЧ, для которых имеет место (12). Ясно, что для $i = 1, 2$ существует последовательность НЧ $\{p_n^i\}_n$ такая, что для любого НЧ n верно $1 \le p_n^i \le 2^{k_n} \& \frac{p_n^i - 1}{2^{k_n}} < u^i < \frac{p_n^i}{2^{k_n}}$ и, следовательно, $\vartheta(H_n u^i) \simeq \eta_{p_n^i}^n$, где $\frac{p_n^i - 1}{2^{k_n}} < \xi_{p_n^i}^n < \frac{p_n^i}{2^{k_n}} \&$ $\& P(\{G_\ell\}_\ell, \xi_{p_n^i}^n, \eta_{p_n^i}^n) \& \neg (\xi_{p_n^i}^n \in {}^{k_n+2}\mathcal{g})$.

Из этого, (12) и $A_*(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{g}\}_m)$ непосредственно следует $\eta_{p_n^i}^n \xrightarrow[n \to \infty]{} v^i$, т.е.

$P(\{H_\ell\}_\ell, u^i, v^i)$.

Пусть $u^1 \leq u^2$. Тогда для всякого НЧ n – $p^1_n \leq p^2_n$ и, следовательно, $\vartheta(H_n u^1) = \eta^n_{p^1_n} * \eta^n_{p^2_n} = \vartheta(H_n u^2)$. Отсюда сразу получаем требуемое $v^1 * v^2$.

Часть 3) утверждения нашей леммы непосредственно следует из 1), части 4) теоремы 2 из [4] и выше приведенных свойств последовательности $\{H_\ell\}_\ell$.

На основании лемм 1 и 2 сразу получаем следующее утверждение.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\{G_\ell\}_\ell$ последовательность ступенчатых остовов, $\{{}^m\mathcal{J}\}_m$ последовательность ${}^{(1)}S_\sigma$-множеств а $*$ один из знаков $\leq$ и $\geq$ и пусть верно $A_*(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{J}\}_m)$. Тогда существуют последовательность ступенчатых остовов $\{H_\ell\}_\ell$ и последовательность КДЧ $\{z_k\}_k$ такие, что $\{G_\ell\}_\ell = \{H_\ell\}_\ell$ и для всяких КДЧ u^1 и u^2 , для которых выполнено $0 < u^1 \leq u^2 < 1\ \&$ $\&\ \forall j\, k\, (1 \leq j \leq 2 \supset \neg(u^j = z_k))$, существуют КДЧ v^1 и v^2 такие, что $v^1 * v^2$ и для j, $1 \leq j \leq 2$, имеет место $C_*(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{J}\}_m, u^j, v^j)$ и $P(\{H_\ell\}_\ell, u^j, v^j)$, т.е. последовательность КДЧ $\{\vartheta(H_\ell u^j)\}_\ell$ определена и сходится к v^j . Следовательно, верно $\forall x\, (0 < x < 1\ \&$

$$\&\ \forall k \neg(x = z_k) \supset \forall p\, \exists q\, \forall y\, (0 < y < 1\ \&\ \forall k \neg(y = z_k)\ \&$$
$$\&\ |y - x| < \frac{1}{q} \supset \exists v\, w\, (P(\{H_\ell\}_\ell, x, v)\ \&\ P(\{H_\ell\}_\ell, y, w)\ \&$$
$$\&\ |v - w| < \frac{1}{p}))) \ .$$

Литература

[1] А.А. МАРКОВ: Теория алгорифмов, Труды Мат.инст.им.

В.А.Стеклова, XLII (1954).

[2] - Проблемы конструктивного направления в математике 2 (сборник работ), Труды Мат. инст.им.В.А.Стеклова, LXVII (1962).

[3] О. ДЕМУТ: Пространства L_{κ} и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolin. 10 (1969),261-284.

[4] О. ДЕМУТ: Теоремы о среднем значении для конструктивного интеграла Лебега, Comment.Math. Univ.Carolinae 11(1970),249-269.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83, Praha 8
Československo

(Oblatum 30.1.1970)