Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
10, 1 (1969)

О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ 1-го, 2-го И 3-го ПОРЯДКОВ ЗАМКНУТЫХ РЕБРИСТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Н.Г. ПЕРЛОВА, Ростов-на-Дону

Бесконечно малые изгибания ребристых поверхностей вращения впервые изучал С.Э. Кон-Фоссен в работе [1] . Позже некоторыми вопросами теории бесконечно малых изгибаний таких поверхностей занимались В.А. Бублик [2] , Г. Н. Чернис [3], В.И. Шимко [4].

В этой работе отыскиваются непрерывные поля бесконечно малых изгибаний 1-го, 2-го и 3-го порядков замкнутых ребристых поверхностей вращения, обладающих нежесткостью различного порядка, и рассматриваются некоторые другие вопросы.

§ 1. Общие положения

В пункте 1 будут приведены некоторые основные положения из [1], необходимые для дальнейшего.

1. Рассмотрим поверхность вращения $\bar{r} = u\bar{e} + r(u)\bar{a}(v)$, отнесенную к подвижному реперу $\bar{e}$, $\bar{a}(v)$, $\bar{a}'(v)$, где $\bar{e}$ есть единичный вектор оси вращения; $\bar{a}(v)$ есть единичный, перпендикулярный оси вектор, с изменением v описывающий окружность с осью $\bar{e}$ и длиной дуги v ; $\bar{a}'(v) = \frac{d\bar{a}}{dv}$.

Поле бесконечно малого изгибания порядка m

$$\bar{z}^{(m)}(u,v)=\alpha^{(m)}(u,v)\,\bar{e}+\beta^{(m)}(u,v)\,\bar{a}(v)+\gamma^{(m)}(u,v)\,\bar{a}'(v)$$

для этой поверхности определяется системой уравнений

$$(1)\begin{cases}\alpha_u^{(m)}+r'(u)\beta_u^{(m)}=-\frac{1}{2}\sum\limits_{\ell=1}^{m-1}(\alpha_u^{(\ell)}\alpha_u^{(m-\ell)}+\beta_u^{(\ell)}\beta_u^{(m-\ell)}+\gamma_u^{(\ell)}\gamma_u^{(m-\ell)}),\\ \alpha_v^{(m)}+r'(u)(\beta_v^{(m)}-\gamma^{(m)})+r(u)\gamma_u^{(m)}=-\sum\limits_{\ell=1}^{m-1}[\alpha_u^{(\ell)}\alpha_v^{(m-\ell)}+\\ \qquad +\beta_u^{(\ell)}(\beta_v^{(m-\ell)}-\gamma^{(m-\ell)})+\gamma_u^{(\ell)}(\gamma_v^{(m-\ell)}+\beta^{(m-\ell)})],\\ r(u)(\gamma_v^{(m)}+\beta^{(m)})=-\frac{1}{2}\sum\limits_{\ell=1}^{m-1}[\alpha_v^{(\ell)}\alpha_v^{(m-\ell)}+(\beta_v^{(\ell)}-\gamma^{(\ell)})(\beta_v^{(m-\ell)}-\\ \qquad -\gamma^{(m-\ell)})+(\gamma_v^{(\ell)}+\beta^{(\ell)})(\gamma_v^{(m-\ell)}+\beta^{(m-\ell)})],\end{cases}$$

где $\bar{z}^{(\ell)}(u,v)=\alpha^{(\ell)}(u,v)\bar{e}+\beta^{(\ell)}(u,v)\bar{a}(v)+\gamma^{(\ell)}(u,v)\bar{a}'(v)$, $\ell=1,2,\ldots,m-1$, суть известные поля бесконечно малых изгибаний $1,2,\ldots,m-1$ порядка; $r=r(u)$ - уравнение меридиана указанной поверхности.

Поле бесконечно малого изгибания 1-го порядка $\bar{z}^{(1)}(u,v)$ определяется однородной системой уравнений (1) при $m=1$.

Функции $\alpha^{(1)}(u,v)$, $\beta^{(1)}(u,v)$, $\gamma^{(1)}(u,v)$ в силу периодичности относительно v имеют вид:

$$\begin{cases}\alpha^{(1)}(u,v)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(1)}(u,v),\\ \beta^{(1)}(u,v)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\beta_k^{(1)}(u,v),\\ \gamma^{(1)}(u,v)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\gamma_k^{(1)}(u,v),\end{cases}$$

где

$$
(2) \quad \begin{cases}
\alpha_k^{(1)}(u,v) = \underset{(1)}{\varphi}_k(u)e^{ikv} + \underset{(1)}{\bar{\varphi}}_k(u)e^{-ikv}, \\
\beta_k^{(1)}(u,v) = \underset{(1)}{\psi}_k(u)e^{ikv} + \underset{(1)}{\bar{\psi}}_k(u)e^{-ikv}, \\
\gamma_k^{(1)}(u,v) = \underset{(1)}{\chi}_k(u)e^{ikv} + \underset{(1)}{\bar{\chi}}_k(u)e^{-ikv}.
\end{cases}
$$

Функции $\underset{(1)}{\varphi}_k$ и $\underset{(1)}{\bar{\varphi}}_k$, $\underset{(1)}{\psi}_k$ и $\underset{(1)}{\bar{\psi}}_k$, $\underset{(1)}{\chi}_k$ и $\underset{(1)}{\bar{\chi}}_k$ являются комплексно сопряженными, что необходимо и достаточно для вещественности функций $\alpha_k^{(1)}$, $\beta_k^{(1)}$, $\gamma_k^{(1)}$.

Подставляя выражения (2) в левые части уравнений (1) при $m = 1$ вместо $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$, получим, в силу линейной независимости функций e^{ikv} и e^{-ikv} систему уравнений для определения $\underset{(1)}{\varphi}_k$, $\underset{(1)}{\psi}_k$, $\underset{(1)}{\chi}_k$:

$$
(3) \quad \begin{cases}
\underset{(1)}{\varphi}_k'(u) + r'(u)\underset{(1)}{\psi}_k'(u) = 0, \\
ik\underset{(1)}{\varphi}_k(u) + r'(u)[ik\underset{(1)}{\psi}_k(u) - \underset{(1)}{\chi}_k(u)] + r(u)\underset{(1)}{\chi}_k'(u) = 0, \\
ik\underset{(1)}{\chi}_k(u) + \underset{(1)}{\psi}_k(u) = 0.
\end{cases}
$$

Для определения $\underset{(1)}{\bar{\varphi}}_k$, $\underset{(1)}{\bar{\psi}}_k$, $\underset{(1)}{\bar{\chi}}_k$ будет получена комплексно сопряженная с (3) система уравнений, рассматривать которую нет необходимости.

Решение системы (3) при $k \geqslant 2$ доставляет поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ нетривиальное бесконечно малое изгибание 1-го порядка

$$\bar{z}_k^{(1)}(u,v) = \alpha_k^{(1)}(u,v)\bar{e} + \beta_k^{(1)}(u,v)\bar{a}(v) + \gamma_k^{(1)}(u,v)\bar{a}'(v),$$

где $\alpha_k^{(1)}$, $\beta_k^{(1)}$, $\gamma_k^{(1)}$ по формулам (2) выражаются через решение системы (3).

Подставляя выражения (2) в правые части уравнений (1) вместо $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$ и полагая $m = 2, 3, \dots, m$, определим последовательно поля бесконечно малых изгибаний $2, 3, \dots, m$ -го порядков, соответствующие полю $\bar{z}_k^{(1)}$:

$$\bar{z}_k^{(m)}(u,v) = \alpha_k^{(m)}(u,v)\bar{e} + \beta_k^{(m)}(u,v)\bar{a}(v) + \gamma_k^{(m)}(u,v)\bar{a}'(v).$$

Вид функций $\alpha_k^{(m)}$, $\beta_k^{(m)}$, $\gamma_k^{(m)}$ устанавливает следующая лемма, доказательство которой только для $m = 2$ и $m = 3$ приведено в [1].

__Лемма 1.__ Функции $\alpha_k^{(m)}(u,v)$, $\beta_k^{(m)}(u,v)$, $\gamma_k^{(m)}(u,v)$, $m \geqslant 2$, имеют вид:

$$(4)\begin{cases} \alpha_k^{(m)}(u,v) = \sum\limits_{h=0}^{p} [\underset{(m)}{\varphi}_{(m-2h)k}(u) e^{(m-2h)ikv} + \bar{\underset{(m)}{\varphi}}_{(m-2h)k}(u) e^{-(m-2h)ikv}], \\ \beta_k^{(m)}(u,v) = \sum\limits_{h=0}^{p} [\underset{(m)}{\psi}_{(m-2h)k}(u) e^{(m-2h)ikv} + \bar{\underset{(m)}{\psi}}_{(m-2h)k}(u) e^{-(m-2h)ikv}], \\ \gamma_k^{(m)}(u,v) = \sum\limits_{h=0}^{p} [\underset{(m)}{\chi}_{(m-2h)k}(u) e^{(m-2h)ikv} + \bar{\underset{(m)}{\chi}}_{(m-2h)k}(u) e^{-(m-2h)ikv}], \end{cases}$$

$$p = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & \text{при } m \text{ четном}, \\ \dfrac{m-1}{2} & \text{при } m \text{ нечетном}. \end{cases}$$

__Доказательство.__ Предположим, что формулы (4) справедливы для $m = 2, 3, \dots, m-1$.

Подставим в правые части уравнений (1) вместо $\alpha^{(\ell)}$, $\beta^{(\ell)}$, $\gamma^{(\ell)}$ выражения $\alpha_k^{(\ell)}$, $\beta_k^{(\ell)}$, $\gamma_k^{(\ell)}$, $\ell = 1, 2, \dots, m-1$. Правые части уравнений (1) представят собой билинейные выражения относительно $e^{\pm(\ell-2h)ikv}$ и $e^{\pm(m-\ell-2q)ikv}$

т.е. линейные комбинации $e^{\pm(m-2h-2g)ikv}$, $e^{\pm(-m+2l-2h+2g)ikv}$ с коэффициентами, зависящими от u. Здесь $l = 1, 2, \ldots, m-1$,

$$h = \begin{cases} 0,1,\ldots,\frac{l}{2} & \text{при } l \text{ четном,} \\ 0,1,\ldots,\frac{l-1}{2} & \text{при } l \text{ нечетном;} \end{cases} \qquad g = \begin{cases} 0,1,\ldots,\frac{m-l}{2} & \text{при } m-l \text{ четном,} \\ 0,1,\ldots,\frac{m-l-1}{2} & \text{при } m-l \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Если m четное, правые части уравнений (1) будут содержать, очевидно, лишь четные степени $e^{\pm ikv}$, в том числе e^{0}. Если m нечетное, они будут содержать лишь нечетные степени $e^{\pm ikv}$.

Уравнения (1) будут иметь вид:

$$(5) \begin{cases} (\alpha_k^{(m)})_u + r'(u)(\beta_k^{(m)})_u = \sum\limits_{h=0}^{p} [\underset{(m)}{\mathcal{P}}_{(m-2h)k}(u)e^{(m-2h)ikv} + \\ + \underset{(m)}{\overline{\mathcal{P}}}_{(m-2h)k}(u)e^{-(m-2h)ikv}], \quad (\alpha_k^{(m)})_v + r'(u)[(\beta_k^{(m)})_v - \gamma_k^{(m)}] + r(u)(\gamma_k^{(m)})_u = \\ = \sum\limits_{h=0}^{p} [\underset{(m)}{Q}_{(m-2h)k}(u)e^{(m-2h)ikv} + \underset{(m)}{\overline{Q}}_{(m-2h)k}(u)e^{-(m-2h)ikv}], \\ r(u)[(\gamma_1^{(m)})_v + \beta_k^{(m)}] = \sum\limits_{h=0}^{p} [\underset{(m)}{R}_{(m-2h)k}(u)e^{(m-2h)ikv} + \\ + \underset{(m)}{R}_{(m-2h)k}(u)e^{-(m-2h)ikv}], \end{cases}$$

$$p = \begin{cases} \frac{m}{2} & \text{при } m \text{ четном,} \\ \frac{m-1}{2} & \text{при } m \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Коэффициенты при $e^{(m-2h)ikv}$ и $e^{-(m-2h)ikv}$ в правых частях уравнений (5) комплексно сопряжены в силу вещественности функций (4) при $m = 1, 2, \ldots, m-1$ и правых частей уравнений (1).

Функции $\alpha_k^{(m)}(u,v)$, $\beta_k^{(m)}(u,v)$, $\gamma_k^{(m)}(u,v)$ в силу периодичности относительно v и вещественности должны иметь вид:

$$
(6)\begin{cases}
\alpha_k^{(m)}(u,v)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\underset{(m)}{\varphi}_n(u)e^{inv}+\underset{(m)}{\bar\varphi}_n(u)e^{-inv}] \quad ,\\
\beta_k^{(m)}(u,v)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\underset{(m)}{\psi}_n(u)e^{inv}+\underset{(m)}{\bar\psi}_n(u)e^{-inv}] \quad ,\\
\gamma_k^{(m)}(u,v)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\underset{(m)}{\chi}_n(u)e^{inv}+\underset{(m)}{\bar\chi}_n(u)e^{-inv}] \quad .
\end{cases}
$$

Подставляя выражения (6) в левые части уравнений (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях e^{ikv}, получим при $n\neq(m-2h)k$ однородную систему (3), решение которой доставляет бесконечно малое изгибание 1-го порядка. При $n=(m-2h)k$,

$$
h=\begin{cases}
0,1,\dots,\frac{m}{2}-1 \text{ при } m \text{ четном,}\\
0,1,\dots,\frac{m-1}{2} \text{ при } m \text{ нечетном}
\end{cases}
$$

получим систему уравнений:

$$
(7)\begin{cases}
\underset{(m)}{\varphi}{}'_{(m-2h)k}(u)+\varkappa'(u)\underset{(m)}{\psi}{}'_{(m-2h)k}(u)=\underset{(m)}{P}_{(m-2h)k}(u) \quad ,\\
(m-2h)ik\underset{(m)}{\varphi}_{(m-2h)k}(u)+\varkappa'(u)[(m-2h)ik\underset{(m)}{\psi}_{(m-2h)k}(u)-\\
\qquad -\underset{(m)}{\chi}_{(m-2h)k}(u)]+\varkappa(u)\underset{(m)}{\chi}{}'_{(m-2h)k}(u)=\underset{(m)}{Q}_{(m-2h)k}(u) \quad ,\\
\varkappa(u)[(m-2h)ik\underset{(m)}{\chi}_{(m-2h)k}(u)+\underset{(m)}{\psi}_{(m-2h)k}(u)=\underset{(m)}{R}_{(m-2h)k}(u)
\end{cases}
$$

и ей комплексно сопряженную, рассматривать которую нет необходимости. При $n=(m-2h)k$ и $h=\frac{m}{2}$ (m -четное; получим систему уравнений

$$
(8)\quad \begin{cases}
\underset{(m)}{\varphi}{}'_0(u)+\kappa'(u)\underset{(m)}{\psi}{}'_0(u)=\underset{(m)}{P}{}_0(u)\,, \\
-\kappa'(u)\underset{(m)}{\chi}{}_0(u)+\kappa(u)\underset{(m)}{\chi}{}'_0(u)=\underset{(m)}{Q}{}_0(u)\,, \\
\kappa(u)\underset{(m)}{\psi}{}_0(u)=\underset{(m)}{R}{}_0(u)\,,
\end{cases}
$$

где через $\underset{(m)}{\varphi}{}_0,\ \underset{(m)}{\psi}{}_0,\ \underset{(m)}{\chi}{}_0,\ \underset{(m)}{P}{}_0,\ \underset{(m)}{Q}{}_0,\ \underset{(m)}{R}{}_0$ обозначенны $\underset{(m)}{\varphi}{}_0+\underset{(m)}{\overline{\varphi}}{}_0,\ \underset{(m)}{\psi}{}_0+\underset{(m)}{\overline{\psi}}{}_0$ и т.д.

Отбрасивая в разложении (6) члены, соответствующие значениям $n\neq(m-2h)k$, получим формулы (4), правые части которых составлены из решений уравнений (7)-(8) при m четном или (7) при m нечетном.
Лемма доказана.

2. Начиная с этого момента, в качестве поверхности $\bar{\kappa}=\bar{\kappa}(u,v)$ будем рассматривать замкнутую ребристую поверхность вращения S_n ,меридиан которой задан уравнениями

$$
(9)\ \kappa=\begin{cases}
\kappa_1(u)=\alpha_1 u, & 0\le u\le a_1\,, \\
\kappa_2(u)=\alpha_2(u-a_1)+a_1\alpha_1\,, & a_1\le u\le a_1+a_2\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\kappa_j(u)=\alpha_j\Big(u-\sum_{i=1}^{j-1}a_i\Big)+\sum_{i=1}^{j-1}a_i\alpha_i\,, & \sum_{i=1}^{j-1}a_i\le u\le\sum_{i=1}^{j}a_i\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\kappa_n(u)=\alpha_n\Big(u-\sum_{i=1}^{n-1}a_i\Big)+\sum_{i=1}^{n-1}a_i\alpha_i\,, & \sum_{i=1}^{n-1}a_i\le u\le\sum_{i=1}^{n}a_i\,,
\end{cases}
$$

$$a_i>0\,,\quad \sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i=0\,.$$

Системы уравнений (7) - (8) для поверхности S_n превращаются в следующую совокупность систем:

$$
(10)\begin{cases}
\overset{(j)}{\underset{(m)}{\varphi}}{}'_{(m-2h)k}(u)+\alpha_j \overset{(j)}{\underset{(m)}{\psi}}{}'_{(m-2h)k}(u)=\overset{(j)}{\underset{(m)}{P}}{}_{(m-2h)k}(u)\ , \\
(m-2h)ik\overset{(j)}{\underset{(m)}{\varphi}}{}_{(m-2h)k}(u)+\alpha_j[(m-2h)ik\overset{(j)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(u)-\overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(u)]+ \\
\qquad\qquad +\varkappa_j(u)\overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}'_{(m-2h)k}(u)=\overset{(j)}{\underset{(m)}{Q}}{}_{(m-2h)k}(u)\ , \\
\varkappa_j(u)[(m-2h)ik\overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(u)+\overset{(j)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(u)]=\overset{(j)}{\underset{(m)}{R}}{}_{(m-2h)k}(u),
\end{cases}
$$

$$
\sum_{i=1}^{j-1}a_i\le u\le\sum_{i=1}^{j}a_i\ ;\quad j=1,2,\dots,n\ ;
$$

$$
h=\begin{cases}0,1,\dots,\frac{m}{2}-1 & \text{при } m \text{ четном,}\\ 0,1,\dots,\frac{m-1}{2} & \text{при } m \text{ нечетном.}\end{cases}
$$

$$
(11)\begin{cases}
\overset{(j)}{\underset{(m)}{\varphi}}{}'_{0}(u)+\alpha_j\overset{(j)}{\underset{(m)}{\psi}}{}'_{0}(u)=\overset{(j)}{\underset{(m)}{P}}{}_{0}(u)\ , \\
-\alpha_j\overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{0}(u)+\varkappa_j(u)\overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}'_{0}(u)=\overset{(j)}{\underset{(m)}{Q}}{}_{0}(u)\ , \\
\varkappa_j(u)\overset{(j)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{0}(u)=\overset{(j)}{\underset{(m)}{R}}{}_{0}(u)\ ,
\end{cases}
$$

$$
\sum_{i=1}^{j-1}a_i\le u\le\sum_{i=1}^{j}a_i\ ;\ j=1,2,\dots,n;\ h=\frac{m}{2}\ ,\ (m\text{ - четное}).
$$

Дифференцируя второе уравнение системы (10) по u и исключая с помощью первого уравнения $\overset{(j)}{\underset{(m)}{\varphi}}{}_{(m-2h)k}$ и $\overset{(j)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}$ получим:

$$
(12)\quad \overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}''_{(m-2h)k}(u)=\frac{1}{\varkappa_j(u)}[\overset{(j)}{\underset{(m)}{Q}}{}_{(m-2h)k}(u)-(m-2h)ik\overset{(j)}{\underset{(m)}{P}}{}_{(m-2h)k}(u)].
$$

Проинтегрировав уравнение (12), из второго и третьего уравнений системы (10) найдем затем $\overset{(j)}{\underset{(m)}{\varphi}}{}_{(m-2h)k}$

и $\underset{(m)}{\overset{(j)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}$ без квадратур. Общее решение системы (10) имеет вид:

$$
(13)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\underset{(m)}{\overset{(j)}{\varphi}}{}_{(m-2h)k}(u) = -\frac{\alpha_j}{\varkappa_j(u)}\underset{(m)}{\overset{(j)}{R}}{}_{(m-2h)k}(u) + \alpha_j\Big[(m-2h)ik + \\
&\qquad + \frac{1}{(m-2h)ik}\Big]\underset{(m)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(u) - \frac{\varkappa_j(u)}{(m-2h)ik}\underset{(m)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(u) + \\
&\qquad + \frac{1}{(m-2h)ik}\underset{(m)}{\overset{(j)}{Q}}{}_{(m-2h)k}(u), \\
&\underset{(m)}{\overset{(j)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(u) = \frac{1}{\varkappa_j(u)}\underset{(m)}{\overset{(j)}{R}}{}_{(m-2h)k}(u) - (m-2h)ik\underset{(m)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(u), \\
&\underset{(m)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(u) = \int du \int \frac{1}{\varkappa_j(u)}\Big[\underset{(m)}{\overset{(j)}{Q'}}{}_{(m-2h)k}(u) - (m-2h)ik\underset{(m)}{\overset{(j)}{P}}{}_{(m-2h)k}(u)\Big]du + \\
&\qquad + \underset{(m)}{\overset{(2j-1)}{C}}{}_{(m-2h)k}\,u + \underset{(m)}{\overset{(2j)}{C}}{}_{(m-2h)k},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\sum_{i=1}^{j-1} a_i \le u \le \sum_{i=1}^{j} a_i, \qquad j = 1, 2, \ldots, m
$$

$$
h = \begin{cases} 0, 1, 2, \ldots, \dfrac{m}{2} - 1 & \text{при } m \text{ четном}, \\[2mm] 0, 1, 2, \ldots, \dfrac{m-1}{2} & \text{при } m \text{ нечетном}. \end{cases}
$$

$\underset{(m)}{\overset{(2j-1)}{C}}{}_{(m-2h)k}$, $\underset{(m)}{\overset{(2j)}{C}}{}_{(m-2h)k}$ – произвольные постоянные.

Общее решение системы (11) имеет вид:

$$
(14)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\underset{(m)}{\overset{(j)}{\varphi}}{}_0(u) = -\frac{\alpha_j}{\varkappa_j(u)}\underset{(m)}{\overset{(j)}{R}}{}_0(u) + \int \underset{(m)}{\overset{(j)}{P}}{}_0(u)\,du + \underset{(m)}{\overset{(2j-1)}{C}}{}_0, \\
&\underset{(m)}{\overset{(j)}{\psi}}{}_0(u) = \frac{1}{\varkappa_j(u)}\underset{(m)}{\overset{(j)}{R}}{}_0(u), \\
&\underset{(m)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_0(u) = \varkappa_j(u)\Big[\int \frac{1}{\varkappa_j^2(u)}\underset{(m)}{\overset{(j)}{Q}}{}_0(u)\,du + \underset{(m)}{\overset{(2j)}{C}}{}_0\Big],
\end{aligned}
\right.
$$

$$\sum_{i=1}^{j-1} a_i \le u \le \sum_{i=1}^{j} a_i\,,\ j=1,2,\dots,n,\ k=\frac{m}{2}$$ (m -четное) ,

$\overset{(2j-1)}{\underset{(m)}{C}}$, $\overset{(2j)}{\underset{(m)}{C}}$ – произвольные постоянные.

Решения систем (10) и (11) найдены формально. Вопросы существования интегралов и непрерывности построенных решений будут исследованы ниже.

§ 2. Бесконечно малые изгибания 1-го порядка поверхностей S_n .

Положим в формулах (13) $m = 1$:

$$(15)\ \begin{cases} \overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}_k(u) = \alpha_j\left(ik+\dfrac{1}{ik}\right)\left(\overset{(2j-1)}{\underset{(1)}{C}}{}_k u + \overset{(2j)}{\underset{(1)}{C}}{}_k\right) - \dfrac{\varkappa_j(u)}{ik}\overset{(2j-1)}{\underset{(1)}{C}}{}_k\,, \\ \overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}{}_k(u) = -ik\left(\overset{(2j-1)}{\underset{(1)}{C}}{}_k u + \overset{(2j)}{\underset{(1)}{C}}{}_k\right), \\ \overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}_k(u) = \overset{(2j-1)}{\underset{(1)}{C}}{}_k u + \overset{(2j)}{\underset{(1)}{C}}{}_k\,, \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{j-1} a_i \le u \le \sum_{i=1}^{j} a_i\,,\quad j=1,2,\dots,n\,.$$

Поле бесконечно малого изгибания 1-го порядка поверхности S_n имеет вид:

$$\overset{(1)}{\underset{k}{Z}}{}^{(1)}(u,v)\,,\qquad 0 \le u \le a_1\,,$$

$$\overset{(2)}{\underset{k}{Z}}{}^{(1)}(u,v)\,,\qquad a_1 \le u \le a_1+a_2\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{(n)}{\underset{k}{Z}}{}^{(1)}(u,v)\,,\qquad \sum_{i=1}^{n-1} a_i \le u \le \sum_{i=1}^{n} a_i\,,$$

где

$$\overset{(j)}{\bar{z}}{}^{(1)}_{k}(u,v)=[\underset{(1)}{\overset{(j)}{\varphi}}_k(u)\,e^{ikv}+\underset{(1)}{\overset{(j)}{\bar{\varphi}}}_k(u)\,e^{-ikv}]\,\bar{e}\;+$$

$$+[\underset{(1)}{\overset{(j)}{\psi}}_k(u)\,e^{ikv}+\underset{(1)}{\overset{(j)}{\bar{\psi}}}_k(u)\,e^{-ikv}]\,\bar{a}(v)+$$

$$+[\underset{(1)}{\overset{j}{\chi}}_k(u)\,e^{ikv}+\underset{(1)}{\overset{(j)}{\bar{\chi}}}_k(u)\,e^{-ikv}]\,\bar{a}'(v),\; j=1,2,\dots,n,$$

а $\underset{(1)}{\overset{(j)}{\varphi}}_k$, $\underset{(1)}{\overset{(j)}{\psi}}_k$, $\underset{(1)}{\overset{(j)}{\chi}}_k$ определяются формулами (15).

<u>Лемма 2</u>. Для того, чтобы поле бесконечно малого изгибания 1-го порядка $\bar{z}^{(1)}_k$ было непрерывно на всей поверхности S_n, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$(16)\begin{cases}\underset{(1)}{\overset{(1)}{\varphi}}_k(0)=0,\\ \underset{(1)}{\overset{(1)}{\psi}}_k(0)=0,\\ \underset{(1)}{\overset{(1)}{\chi}}_k(0)=0,\end{cases}\quad (17)\begin{cases}\underset{(1)}{\overset{(j-1)}{\varphi}}_k(\sum\limits_{i=1}^{j-1}a_i)=\underset{(1)}{\overset{(j)}{\varphi}}_k(\sum\limits_{i=1}^{j-1}a_i),\\ \underset{(1)}{\overset{(j-1)}{\psi}}_k(\sum\limits_{i=1}^{j-1}a_i)=\underset{(1)}{\overset{(j)}{\psi}}_k(\sum\limits_{i=1}^{j-1}a_i),\\ \underset{(1)}{\overset{(j-1)}{\chi}}_k(\sum\limits_{i=1}^{j-1}a_i)=\underset{(1)}{\overset{(j)}{\chi}}_k(\sum\limits_{i=1}^{j-1}a_i),\end{cases}\quad (18)\begin{cases}\underset{(1)}{\overset{(n)}{\varphi}}_k(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)=0,\\ \underset{(1)}{\overset{(n)}{\psi}}_k(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)=0,\\ \underset{(1)}{\overset{(n)}{\chi}}_k(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)=0.\end{cases}$$

$$j=2,3,\dots,n\;.$$

<u>Доказательство</u>. Функции (15) при любом фиксированном $j=1,2,\dots,n$, очевидно, непрерывны в интеграле $\sum\limits_{i=1}^{j-1}a_i\le u\le\sum\limits_{i=1}^{j}a_i$. Поэтому условия (17) необходимы и достаточны для непрерывности поля $\bar{z}^{(1)}_k$ на всей поверхности S_n, кроме ее полюсов.

В полюсе $u=0$ поле $\bar{z}^{(1)}_k$ имеет значение:

$$\bar{z}^{(1)}_k(0,v)=[\underset{(1)}{\overset{(1)}{\varphi}}_k(0)\,e^{ikv}+\underset{(1)}{\overset{(1)}{\bar{\varphi}}}_k(0)\,e^{-ikv}]\,\bar{e}\;+$$

$$+ [\overset{(1)}{\underset{(1)}{\psi}}_k(0)e^{ikv} + \overset{(1)}{\underset{(1)}{\bar{\psi}}}_k(0)e^{-ikv}]\bar{a}(v) +$$
$$+ [\overset{(1)}{\underset{(1)}{\chi}}_k(0)e^{ikv} + \overset{(1)}{\underset{(1)}{\bar{\chi}}}_k(0)e^{-ikv}]\bar{a}'(v) .$$

Для непрерывности поля $\bar{z}_k^{(1)}$ в полюсе $u = 0$ функция $\bar{z}_k^{(1)}(0, v)$ не должна зависеть от v. Для этого необходимо выполнение условий (16). Достаточность условий (16) для непрерывности поля $\bar{z}_k^{(1)}$ в полюсе $u = 0$ очевидна.

Аналогично доказывается необходимость и достаточность условий (18) для непрерывности поля $\bar{z}_k^{(1)}$ в полюсе $u = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$.

<u>Следствие</u>. Если поверхность S_m допускает бесконечно малое изгибание 1-го порядка, то расстояние между полюсами поверхности при этом изгибании не меняется.

<u>Доказательство</u>. Если поверхность S_m допускает нетривиальное бесконечно малое изгибание 1-го порядка, поле $\bar{z}_k^{(1)}(u, v)$, $k \geq 2$, непрерывно на всей поверхности. Тогда, согласно лемме 2, выполняются условия (16) и (18), а следовательно,

$$\bar{z}_k^{(1)}(0, v) = 0 , \quad \bar{z}_k^{(1)}(\sum_{i=1}^{m} a_i , v) = 0 ,$$

что означает неподвижность полюсов поверхности S_m .

Если поверхность S_m одновременно подвергается тривиальному бесконечно малому изгибанию-движению поверхности как твердого тела, полюса поверхности могут при этом изменять свое положение в пространстве, но расстояние между ними также не изменится.

Дальнейшие рассуждения имеют целью выяснить, существуют ли поверхности S_n, допускающие нетривиальные бесконечно малые изгибания 1-го порядка, т.е. могут ли для поверхностей S_n выполняться условия (16) - (18).

Нетрудно проверить, что функции (15) удовлетворяют условиям (16) - (17) тогда и только тогда, когда

$$\overset{(2)}{\underset{(1)}{C}}_k = 0 ,$$

$$\overset{(2j)}{\underset{(1)}{C}}_k = -\overset{(2j-1)}{\underset{(1)}{C}}_k \sum_{i=1}^{j-1} a_i + \sum_{i=1}^{j-1} \overset{(2i-1)}{\underset{(1)}{C}}_k a_i , \qquad j = 2, 3, \dots, n ,$$

$$\overset{(2j-1)}{\underset{(1)}{C}}_k = \frac{\sum_{i=1}^{j-1} \overset{(2i-1)}{\underset{(1)}{C}}_k a_i \left[(k^2-1)(\alpha_i - \alpha_j) + \alpha_i\right]}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} , \quad j = 2, 3, \dots, n .$$

Постоянную $\overset{(1)}{\underset{(1)}{C}}_k$, играющую роль коэффициента пропорциональности для поля $\overset{(1)}{\bar{z}}_k$, положим равной 1 . Обозначим $\overset{(2j-1)}{\underset{(1)}{C}}_k$ через $\overset{(j)}{A}(k)$.

Формулы (15) принимают тогда вид:

$$(19) \begin{cases} \overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}_k(u) = \alpha_j\left(ik + \frac{1}{ik}\right)\left[\overset{(j)}{A}(k)\left(u - \sum_{i=1}^{j-1} a_i\right) + \sum_{i=1}^{j-1} \overset{(i)}{A}(k) a_i\right] - \\ \quad - \frac{1}{ik}\left[\alpha_j\left(u - \sum_{i=1}^{j-1} a_i\right) + \sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i\right] \overset{(j)}{A}(k) = \\ \quad = ik\left[\overset{(j)}{A}(k)\alpha_j\left(u - \sum_{i=1}^{j-1} a_i\right) + \sum_{i=1}^{j-1} \overset{(i)}{A}(k) a_i \alpha_i\right] , \\ \overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}_k(u) = -ik\left[\overset{(j)}{A}(k)\left(u - \sum_{i=1}^{j-1} a_i\right) + \sum_{i=1}^{j-1} \overset{(i)}{A}(k) a_i\right] , \\ \overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k(u) = \overset{(j)}{A}(k)\left(u - \sum_{i=1}^{j-1} a_i\right) + \sum_{i=1}^{j-1} \overset{(i)}{A}(k) a_i , \end{cases}$$

где

$$(20)\begin{cases} \overset{(j)}{A}(k)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{j-1}\overset{(i)}{A}(k)a_i[(k^2-1)(\alpha_i-\alpha_j)+\alpha_i]}{\sum\limits_{i=1}^{j-1}a_i\alpha_i}, \quad j=2,3,\dots,n, \\ \overset{(1)}{A}(k)=1 . \end{cases}$$

Как показывают формулы (19), условия (18) выполняются тогда и только тогда, когда

$$(21) \qquad \sum_{i=1}^{n}\overset{(i)}{A}(k)a_i = 0 .$$

Теорема 1. Поверхность S_n тогда и только тогда допускает бесконечно малое изгибание 1-го порядка, когда уравнение (21) имеет по крайней мере один натуральный корень $k \geqslant 2$.

Доказательство ясно из предыдущего.

Займемся уравнением (21). Преобразуем его левую часть, учитывая выражение $\overset{(n)}{A}(k)$ и условие замкнутости поверхности S_n $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i=0$:

$$\sum_{i=1}^{n}\overset{(i)}{A}(k)a_i=\sum_{i=1}^{n-1}\overset{(i)}{A}(k)a_i+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\overset{(i)}{A}(k)a_i[(k^2-1)(\alpha_i-\alpha_n)+\alpha_i]}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i\alpha_i}a_n =$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{k^2}{\alpha_n}\right)\overset{(i)}{A}(k)a_i(\alpha_i-\alpha_n) .$$

Следовательно, при допустимых значениях k уравнение (21) эквивалентно уравнению

$$(22) \qquad \sum_{i=1}^{n-1}\overset{(i)}{A}(k)a_i(\alpha_i-\alpha_n) = 0 .$$

Формулы (20) показывают, что $\overset{(j)}{A}(k)=\sum\limits_{t=0}^{j-1}(k^2-1)^t\overset{(j)}{A}_t$, где $\overset{(j)}{A}_0=1$ а $\overset{(j)}{A}_t$ при $t=1,2,\dots,j-1$ есть некоторое выражение, составленное из параметров поверхности S_n. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \overset{(i)}{A}(k) a_i (\alpha_i - \alpha_n) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n-1} [\sum\limits_{k=0}^{i-1} (k^2-1)^k \overset{(i)}{A}_k] a_i (\alpha_i - \alpha_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-2} (k^2-1)^k [\sum\limits_{i=k+1}^{n-1} \overset{(i)}{A}_k a_i (\alpha_i - \alpha_n)]$,

и уравнение (22) имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{n-2} (k^2-1)^k [\sum_{i=k+1}^{n-1} \overset{(i)}{A}_k a_i (\alpha_i - \alpha_n)] = 0 .$$

Свободный член уравнения (23) равен $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \overset{(i)}{A}_0 a_i (\alpha_i - \alpha_n) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i (\alpha_i - \alpha_n) = -\alpha_n \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq 0$. Следовательно, уравнение (23) не имеет корня $k^2 - 1 = 0$, т.е. $k \neq \pm 1$. Это позволяет сформулировать теорему:

<u>Теорема 2</u>. Поверхность S_n тогда и только тогда допускает бесконечно малое изгибание 1-го порядка, когда уравнение (23) имеет по крайней мере один ненулевой натуральный корень k.

Имеет место

<u>Теорема 3</u>. При любом $n > 2$ существуют нежесткие поверхности S_n.

<u>Доказательство</u>. Зададим произвольно значение $n > 2$ (при $n = 2$ уравнение (23) корней не имеет) и значения $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, а значения α_i, $i = 1, 2, \dots$ $\dots, n-1$, зададим так, что $\sum\limits_{i=1}^{j} a_i \alpha_i > 0$ для $j = 1, 2, \dots, n-1$ и $\alpha_{n-1} < 0$.

Из уравнения (23) найдем:

$$(24) \qquad \alpha_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2} (k^2-1)^k (\sum\limits_{i=k+1}^{n-1} \overset{(i)}{A}_k a_i \alpha_i)}{\sum\limits_{k=0}^{n-2} (k^2-1)^k (\sum\limits_{i=k+1}^{n-1} \overset{(i)}{A}_k a_i)} .$$

Для достаточно больших $k \geq k_0$ многочлен, стоящий в числителе, имеет знак старшего коэффициента $\mathcal{A}^{(n-1)}_{n-2} a_{n-1} \alpha_{n-1}$, а многочлен, стоящий в знаменателе, знак старшего коэффициента $\mathcal{A}^{(n-1)}_{n-2} a_{n-1}$.
Задавая $k \geq \max\{2, k_0\}$, найдем из (24) значение $\alpha_n < 0$. Далее из условия замкнутости $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = 0$ найдем $a_n = -\frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i \alpha_i}{\alpha_n} > 0$.
Построенная нежесткая поверхность S_n, очевидно, не имеет самопересечений.

Пример 1. Поверхность $S_3 : \{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = -1; a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{5}{3}\}$ является нежесткой, т.к. уравнение (23) для нее имеет корень $k = 2$ (рис.1).

Пример 2. Поверхность $S_3 : \{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = -\frac{3}{2}; a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1\}$ является жесткой, т.к. уравнение (23) для нее не имеет натуральных корней k. Эта поверхность выпуклая (рис.2).

Пример 3. Поверхность $S_3 : \{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = -\frac{4}{3}; a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{3}{2}\}$ является жесткой, т.к. уравнение (23) для нее не имеет натуральных корней k. Эта поверхность невыпуклая (рис.3).

§ 3. Бесконечно малые изгибания 2-го порядка поверхностей S_n.

Для случая $m = 2$, проделывая операции, указанные в § 1, нетрудно найти явные выражения для функций

$\overset{(j)}{\underset{(2)}{\mathcal{P}}}_{(2-2h)k}$, $\overset{(j)}{\underset{(2)}{Q}}_{(2-2h)k}$, $\overset{(j)}{\underset{(2)}{R}}_{(2-2h)k}$, $h = 0, 1$, стоящих в правых частях уравнений (10) - (11), в то время как для $m > 2$ мы будем исследовать только структуру правых частей этих уравнений.

Формулы (13) - (14) примут вид для $m = 2$:

$$
(25)\begin{cases}
\overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}_{2k}(u) = \dfrac{\alpha_j}{2r_j(u)}\left[k^4 \overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}^2_k(u) + (k^2-1)^2 \overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}^2_k(u)\right] + \\
\quad + \alpha_j\left(2ik + \dfrac{1}{2ik}\right)\left(\overset{(2j-1)}{\underset{(2)}{C}}_{2k} u + \overset{(2j)}{\underset{(2)}{C}}_{2k}\right) - \dfrac{1}{2ik} r_j(u) \overset{(2j-1)}{\underset{(2)}{C}}_{2k} + \\
\quad + \dfrac{1}{2}\left[k^2\alpha_j \overset{(j)}{A}(k) \overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}_k(u) + (k^2-1)\overset{(j)}{A}(k)\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k(u)\right], \\
\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}_{2k}(u) = -\dfrac{1}{2r_j(u)}\left[k^4 \overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}^2_k(u) + (k^2-1)^2 \overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}^2_k(u)\right] - \\
\quad - 2ik\left(\overset{(2j-1)}{\underset{(2)}{C}}_{2k} u + \overset{(2j)}{\underset{(2)}{C}}_{2k}\right), \\
\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_{2k}(u) = \overset{(2j-1)}{\underset{(2)}{C}}_{2k} u + \overset{(2j)}{\underset{(2)}{C}}_{2k},
\end{cases}
$$

$$
(26)\begin{cases}
\overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}_{0}(u) = \dfrac{\alpha_j}{r_j(u)}\left[k^4 \overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}^2_k(u) + (k^2-1)^2 \overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}^2_k(u)\right] - \\
\quad - \overset{(j)}{A}{}^2(k^2\alpha_j^2 + k^2 + 1)u + \overset{(2j-1)}{\underset{(2)}{C}}_{0}, \\
\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}_{0}(u) = -\dfrac{1}{r_j(u)}\left[k^4 \overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}^2_k(u) + (k^2-1)^2 \overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}^2_k(u)\right], \\
\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_{0}(u) = r_j(u) \overset{(2j)}{\underset{(2)}{C}}_{0},
\end{cases}
$$

$\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \le u \le \sum\limits_{i=1}^{j} a_i$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k \geq 2$ есть натуральный корень уравнения (21); $\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}_k$, $\overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}_k$, $\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k$ определяются формулами (19), $\overset{(j)}{A}(k)$ формулами (20).

Поле бесконечно малого изгибания 2-го порядка поверхности S_n, соответствующее полю бесконечно малого изгибания 1-го порядка $\bar{z}_k^{(1)}$, имеет вид:

$$\bar{z}_k^{(2)}(u,v) = \begin{cases} \overset{(1)}{\bar{z}}{}_k^{(2)}(u,v), & 0 \le u \le a_1, \\ \overset{(2)}{\bar{z}}{}_k^{(2)}(u,v), & a_1 \le u \le a_1 + a_2, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \overset{(j)}{\bar{z}}{}_k^{(2)}(u,v), & \sum_{i=1}^{j-1} a_i \le u \le \sum_{i=1}^{j} a_i, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \overset{(n)}{\bar{z}}{}_k^{(2)}(u,v), & \sum_{i=1}^{n-1} a_i \le u \le \sum_{i=1}^{n} a_i, \end{cases}$$

где
$$\overset{(j)}{\bar{z}}{}_k^{(2)}(u,v) = [\underset{(2)}{\overset{(j)}{\varphi}}{}_{2k}(u)e^{2ikv} + \underset{(2)}{\overset{(j)}{\varphi}}{}_0(u) + \underset{(2)}{\overset{(j)}{\bar{\varphi}}}{}_{2k}(u)e^{-2ikv}]\bar{e} +$$
$$+ [\underset{(2)}{\overset{(j)}{\psi}}{}_{2k}(u)e^{2ikv} + \underset{(2)}{\overset{(j)}{\psi}}{}_0(u) + \underset{(2)}{\overset{(j)}{\bar{\psi}}}{}_{2k}(u)e^{-2ikv}]\bar{a}(v) +$$
$$+ [\underset{(2)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_{2k}(u)e^{2ikv} + \underset{(2)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_0(u) + \underset{(2)}{\overset{(j)}{\bar{\chi}}}{}_{2k}(u)e^{-2ikv}]\bar{a}'(v),$$

а $\underset{(2)}{\overset{(j)}{\varphi}}{}_{2k}$, $\underset{(2)}{\overset{(j)}{\psi}}{}_{2k}$, $\underset{(2)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_{2k}$, $\underset{(2)}{\overset{(j)}{\varphi}}{}_0$, $\underset{(2)}{\overset{(j)}{\psi}}{}_0$, $\underset{(2)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_0$ определяются формулами (25) - (26).

<u>Лемма 3</u>. Для того, чтобы поле бесконечно малого изгибания 2-го порядка $\bar{z}_k^{(2)}$ было непрерывно на всей поверхности S_n, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$(27)\ \begin{cases} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\varphi}}{}_{2k}(0) = 0, \\ \underset{(2)}{\overset{(1)}{\psi}}{}_{2k}(0) = 0, \\ \underset{(2)}{\overset{(1)}{\chi}}{}_{2k}(0) = 0, \end{cases} \qquad (28)\ \begin{cases} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\psi}}{}_0(0) = 0, \\ \underset{(2)}{\overset{(1)}{\chi}}{}_0(0) = 0, \end{cases}$$

$$(29)\begin{cases} \underset{(2)}{\overset{(j-1)}{\varphi}}{}_{2k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right) = \underset{(2)}{\overset{(j)}{\varphi}}{}_{2k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right), \\ \underset{(2)}{\overset{(j-1)}{\psi}}{}_{2k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right) = \underset{(2)}{\overset{(j)}{\psi}}{}_{2k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right), \\ \underset{(2)}{\overset{(j-1)}{\chi}}{}_{2k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right) = \underset{(2)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_{2k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right), \end{cases}$$

$$j = 2, 3, \ldots, n .$$

$$(30)\begin{cases} \underset{(2)}{\overset{(j-1)}{\varphi}}{}_{0}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right) = \underset{(2)}{\overset{(j)}{\varphi}}{}_{0}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right), \\ \underset{(2)}{\overset{(j-1)}{\psi}}{}_{0}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right) = \underset{(2)}{\overset{(j)}{\psi}}{}_{0}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right), \\ \underset{(2)}{\overset{(j-1)}{\chi}}{}_{0}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right) = \underset{(2)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_{0}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right), \end{cases}$$

$$j = 2, 3, \ldots, n .$$

$$(31)\begin{cases} \underset{(2)}{\overset{(n)}{\varphi}}{}_{2k}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) = 0, \\ \underset{(2)}{\overset{(n)}{\psi}}{}_{2k}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) = 0, \\ \underset{(2)}{\overset{(n)}{\chi}}{}_{2k}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) = 0, \end{cases}$$

$$(32)\begin{cases} \underset{(2)}{\overset{(n)}{\psi}}{}_{0}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) = 0, \\ \underset{(2)}{\overset{(n)}{\chi}}{}_{0}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) = 0 . \end{cases}$$

Доказательство. Функции (25) - (26), очевидно, непрерывны при $\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \leq u \leq \sum\limits_{i=1}^{j} a_i$, $j = 2, 3, \ldots, n-1$; при $0 \leq u \leq a_1$, $j = 1$; при $\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i \leq u < \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $j = n$.

Поэтому условия (29) - (30) необходимы и достаточны для непрерывности поля $\tilde{x}_k^{(2)}$ на всей поверхности S_n, кроме ее полюсов.

В полюсе $u = 0$ функции (25) - (26) при $j = 1$ непрерывны, т.к. функции (19) при $j = 1$ и $r_1(u)$ суть линейные однородные функции u, а потому

$\frac{1}{r_1(u)}[k^4 \underset{(1)}{\overset{(1)}{\varphi}}{}_k(u) + (k^2-1)^2 \underset{(1)}{\overset{(1)}{\chi}}{}_k^2(u)]$ есть линейная однородная функция u.

В полюсе $u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ функции (25) - (26) при $j = n$

непрерывны, т.к. функции (19) при $j = n$, в силу (21), и $\kappa_n(u)$ суть линейные однородные функции от разности $u - \sum_{i=1}^{n} a_i$, а потому $\frac{1}{\kappa_n(u)}[k^4 \overset{(n)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}^2_k(u) + (k^2-1)^2 \overset{(n)}{\underset{(1)}{\chi}}{}^2_k(u)]$ есть линейная однородная функция от разности $u - \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Однако непрерывности функций (25) - (26) в полюсах поверхности S_n не достаточно для непрерывности в полюсах поля $\bar{z}_k^{(2)}$. Действительно, в полюсе $u = 0$ поле $\bar{z}_k^{(2)}$ имеет значение:

$$\bar{z}_k^{(2)}(0,v) = [\overset{(1)}{\underset{(2)}{\varphi}}(0)e^{2ikv} + \overset{(1)}{\underset{(2)}{\varphi}}_0(0) + \overset{(1)}{\underset{(2)}{\bar{\varphi}}}_{2k}(0)e^{-2ikv}]\bar{e} +$$

$$+ [\overset{(1)}{\underset{(2)}{\psi}}_{2k}(0)e^{2ikv} + \overset{(1)}{\underset{(2)}{\psi}}_0(0) + \overset{(1)}{\underset{(2)}{\bar{\psi}}}_{2k}(0)e^{-2ikv}]\bar{a}(v) +$$

$$+ [\overset{(1)}{\underset{(2)}{\chi}}_{2k}(0)e^{2ikv} + \overset{(1)}{\underset{(2)}{\chi}}_0(0) + \overset{(1)}{\underset{(2)}{\bar{\chi}}}_{2k}(0)e^{-2ikv}]\bar{a}'(v).$$

Для того, чтобы поле $\bar{z}_k^{(2)}$ было непрерывно в полюсе $u = 0$, значение $\bar{z}_k^{(2)}(0,v)$ не должно зависеть от v, для чего необходимо выполнение условий (27) - (28). Достаточность условий (27) - (28) для непрерывности поля $\bar{z}_k^{(2)}$ в полюсе $u = 0$ очевидна.

Аналогично устанавливается необходимость и достаточность условий (31) - (32) для непрерывности поля $\bar{z}_k^{(2)}$ в полюсе $u = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Лемма доказана.

Дальнейшие рассуждения имеют целью установить, существуют ли поверхности S_n, допускающие бесконечно малые изгибания 2-го порядка, т.е. могут ли для поверхностей S_n выполняться условия (27) - (32) (при условии нежесткости 1-го порядка!).

Нетрудно проверить, что функции (25) - (26) удовлетворяют условиям (27) - (30) тогда и только тогда, когда

$$
(33)\begin{cases}
\overset{(2)}{\underset{(2)}{C}}{}_{2k} = 0, \\[2mm]
\overset{(2j)}{\underset{(2)}{C}}{}_{2k} = -\overset{(2j-1)}{\underset{(2)}{C}}{}_{2k} \sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i + \sum\limits_{i=1}^{j-1} \overset{(2i-1)}{\underset{(2)}{C}}{}_{2k}\, a_i, \qquad j = 2, 3, \ldots, n, \\[2mm]
\overset{(2j-1)}{\underset{(2)}{C}}{}_{2k} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{j-1} \overset{(2i-1)}{\underset{(2)}{C}}{}_{2k}\, a_i [(4k^2-1)(\alpha_i - \alpha_j) + \alpha_i]}{\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} + \dfrac{2ik}{\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \sum\limits_{s=2}^{j} (\alpha_s - \alpha_{s-1}) \times \\[2mm]
\quad \times \dfrac{1}{2\sum\limits_{i=1}^{s-1} a_i \alpha_i} [k^4 \overset{(s)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}_k^2 (\sum\limits_{i=1}^{s-1} a_i) + (k^2-1)^2 \overset{(s)}{\underset{(1)}{\chi}}{}_k (\sum\limits_{i=1}^{s-1} a_i)] + \\[2mm]
\quad + \dfrac{2ik}{\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \sum\limits_{s=2}^{j} \dfrac{1}{2} \{ k^2 [\overset{(s)}{A}(k)\alpha_s - \overset{(s-1)}{A}(k)\alpha_{s-1}] \overset{(s)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}_k (\sum\limits_{i=1}^{s-1} a_i) + \\[2mm]
\quad + (k^2-1) [\overset{(s)}{A}(k) - \overset{(s-1)}{A}(k)] \overset{(s)}{\underset{(1)}{\chi}}{}_k (\sum\limits_{i=1}^{s-1} a_i), \qquad j = 2, 3, \ldots, n.
\end{cases}
$$

$\overset{(1)}{\underset{(2)}{C}}{}_{2k}$ пока не определена.

$$
(34)\begin{cases}
\overset{(2j-1)}{\underset{(2)}{C}}{}_0 = \sum\limits_{s=2}^{j} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) \cdot \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{s-1} a_i \alpha_i} \cdot [k^4 \overset{(s)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}_k^2 (\sum\limits_{i=1}^{s-1} a_i) + (k^2-1)^2 \overset{(s)}{\underset{(1)}{\chi}}{}_k^2 (\sum\limits_{i=1}^{s-1} a_i)] + \\[2mm]
\quad + \sum\limits_{s=2}^{j} (\sum\limits_{i=1}^{s-1} a_i) [\overset{(s)}{A}{}^2(k)(k^2\alpha_s^2 + k^2 + 1) - \overset{(s-1)}{A}{}^2(k)(k^2\alpha_{s-1}^2 + k^2 + 1)] + \overset{(1)}{\underset{(2)}{C}}{}_0, \\[2mm]
\overset{(2j)}{\underset{(2)}{C}}{}_0 = \overset{(2)}{\underset{(2)}{C}}{}_0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.
\end{cases}
$$

Постоянные $\overset{(1)}{\underset{(2)}{C}}{}_0$ и $\overset{(2)}{\underset{(2)}{C}}{}_0$ можно (но не обязательно) считать равными нулю, т.к. они доставляют поверхности тривиальное бесконечно малое изгибание - сдвиг поверхности как целого вдоль оси вращения и поворот поверхности как целого вокруг оси вращения.

Условия (32), очевидно, выполняются автоматически. Обратимся к условиям (31). Как показывают формулы (25), условия (31,1) и (31,2) выполняются тогда и только тогда, когда выполнено условие (31,3).

В силу (33,1) и (33,2) функция $\underset{(2)}{\overset{(n)}{\chi}}{}_{2k}(u)$ имеет вид:

$$\underset{(2)}{\overset{(n)}{\chi}}{}_{2k}(u) = \underset{(2)}{\overset{(2n-1)}{C}}{}_{2k}\left(u - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \underset{(2)}{\overset{(2i-1)}{C}}{}_{2k}\, a_i \ ,$$

где $\underset{(2)}{\overset{(2i-1)}{C}}{}_{2k}$ определяется формулой (33,3). Следовательно, условие (31,3) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} \underset{(2)}{\overset{(2i-1)}{C}}{}_{2k}\, a_i = 0 \ . \qquad (35)$$

Равенство (35) представляет собой уравнение 1-ой степени относительно $\underset{(2)}{\overset{(1)}{C}}{}_{2k}$, в котором коэффициент при $\underset{(2)}{\overset{(1)}{C}}{}_{2k}$, очевидно, равен $\sum_{i=1}^{n} \overset{(i)}{A}(2k)\, a_i$.

Если рассматриваемое нами значение k не является корнем уравнения (36) $\sum_{i=1}^{n} \overset{(i)}{A}(2k)\, a_i = 0$, тогда $\underset{(2)}{\overset{(1)}{C}}{}_{2k}$ может быть выбрано так, что условие (35), а следовательно, условия (31) будут выполнены.

Теорема 4. Если поверхность S_n допускает бесконечно малое изгибание 1-го порядка, то она допускает также бесконечно малое изгибание 2-го порядка.

Доказательство. Если поверхность S_n допускает бесконечно малое изгибание 1-го порядка, тогда, на основании теоремы 1, уравнение (21) имеет по крайней мере один натуральный корень $k \geq 2$.

Если k - единственный корень уравнения (21), он не является, очевидно, корнем уравнения (36). Поле $\bar{z}_k^{(2)}$, определяемое формулами (25) - (26), где постоянные определяются формулами (33) - (35), доставляет поверхности S_n бесконечно малое изгибание 2-го порядка.

Если уравнение (21) имеет несколько допустимых корней k, из них всегда можно выбрать корень $k > \frac{k_{max}}{2}$. Это значение k не будет корнем уравнения (36), и тогда поле $\bar{z}_k^{(2)}$, соответствующее выбранному значению k, доставляет поверхности S_n бесконечно малое изгибание 2-го порядка.

Теорема 5. Если поверхность S_n допускает бесконечно малое изгибание 2-го порядка, то расстояние между полюсами поверхности при этом изгибании, вообще говоря, меняется.

Доказательство. Из формул (26) при выполнении (34) следует:

$$\overset{(n)}{\underset{(2)}{\varphi_0}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)-\overset{(1)}{\underset{(2)}{\varphi_0}}(0)=\sum_{s=2}^{n}(\alpha_{s-1}-\alpha_s)\cdot\frac{1}{\sum_{i=1}^{s-1}a_i\alpha_i}\Big\{k^4\Big[\sum_{i=1}^{s-1}\overset{(i)}{A}(k)a_i\alpha_i\Big]^2+$$

$$+(k^2-1)^2\Big[\sum_{i=1}^{s-1}\overset{(i)}{A}(k)a_i\Big]^2\Big\}-\sum_{s=1}^{n}a_s\overset{(s)}{A^2}(k)(k^2\alpha_s+k^2+1)\neq 0,$$ вообще говоря.

Следовательно, $\bar{z}_k^{(2)}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i, v\right)-\bar{z}_k^{(2)}(0,v)\neq 0$, вообще говоря, ч.т.д.

Пример 4. Поверхность S_3 примера 1 допускает лишь такое бесконечно малое изгибание 2-го порядка, при котором расстояние между ее полюсами меняется (рис.1).

Пример 5. Поверхность $S_3 \cdot \{\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = -13;\ a_1 = 1,$

$a_2=\frac{7}{15}, a_3=\frac{29}{115}\}$ допускает бесконечно малое изгибание 2-го порядка $\tilde{z}_2^{(2)}$, при котором расстояние между ее полюсами не меняется (рис.4).

§ 4. Бесконечно малые изгибания 3-го порядка поверхностей S_n.

При $m = 3$ уравнения (10) имеют вид:

$$
(37)\begin{cases}
\overset{(j)}{\underset{(3)}{\varphi}}{}_{(3-2h)k}(u)+\alpha_j \overset{(j)}{\underset{(3)}{\psi}}{}_{(3-2h)k}(u)=\overset{(j)}{\underset{(3)}{P}}{}_{(3-2h)k}(u), \\
(3-2h)ik\,\overset{(j)}{\underset{(3)}{\varphi}}{}_{(3-2h)k}(u)+\alpha_j\left[(3-2h)ik\,\overset{(j)}{\underset{(3)}{\psi}}{}_{(3-2h)k}(u)-\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}(u)\right]+ \\
\qquad +\varkappa_j(u)\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}(u)=\overset{(j)}{\underset{(3)}{Q}}{}_{(3-2h)k}(u), \\
\varkappa_j(u)\left[(3-2h)ik\,\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}(u)+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\psi}}{}_{(3-2h)k}(u)\right]=\overset{(j)}{\underset{(3)}{R}}{}_{(3-2h)k}(u),
\end{cases}
$$

$\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \le u \le \sum\limits_{i=1}^{j} a_i,\ j=1,2,\dots,n;\quad h=0,1$, а правые части суть некоторые, вполне определенные выражения, построенные из функций (19) при выполнении (20) - (21) и функций (25) - (26) при выполнении (33) - (35).

Уравнения (11) при $m = 3$ не существуют.

Общее решение системы (37) дают функции (13) при $m = 3$:

$$
(38)\begin{cases}
\overset{(j)}{\underset{(3)}{\varphi}}_{(3-2h)k}(u) = -\dfrac{\alpha_j}{k_j(u)} \overset{(j)}{R}_{(3-2h)k}(u) + \alpha_j[(3-2h)ik + \\
\quad + \dfrac{1}{(3-2h)ik}] \times \overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{(3-2h)k}(u) - \dfrac{k_j(u)}{(3-2h)ik} \overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{(3-2h)k}(u) + \\
\qquad + \dfrac{1}{(3-2h)ik} \overset{(j)}{\underset{(3)}{Q}}_{(3-2h)k}(u), \\
\overset{(j)}{\underset{(3)}{\psi}}_{(3-2h)k}(u) = \dfrac{1}{k_j(u)} \overset{(j)}{\underset{(3)}{R}}_{(3-2h)k}(u) - (3-2h)ik \overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{(3-2h)k}(u), \\
\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{(3-2h)k}(u) = \int du \int [\overset{(j)}{\underset{(3)}{Q}}_{(3-2h)k}(u) - (3-2h)ik \overset{(j)}{\underset{(3)}{P}}_{(3-2h)k}(u)] \dfrac{du}{k_j(u)} + \\
\qquad + \overset{(2j-1)}{\underset{(3)}{C}}_{(3-2h)k} u + \overset{(2j)}{\underset{(3)}{C}}_{(3-2h)k},
\end{cases}
$$

$$
\sum_{i=1}^{j-1} a_i \le u \le \sum_{i=1}^{j} a_i \, ; \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad h = 0, 1 .
$$

Поле бесконечно малого изгибания 3-го порядка поверхности S_n, соответствующее полю бесконечно малого изгибания 1-го порядка $\bar{z}_k^{(1)}$, имеет вид:

$$
\bar{z}_k^{(3)}(u,v) = \begin{cases}
\overset{(1)}{\bar{z}}{}_k^{(3)}(u,v), & 0 \le u \le a_1, \\
\overset{(2)}{\bar{z}}{}_k^{(3)}(u,v), & a_1 \le u \le a_1 + a_2, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\overset{(j)}{\bar{z}}{}_k^{(3)}(u,v), & \sum_{i=1}^{j-1} a_i \le u \le \sum_{i=1}^{j} a_i, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\overset{(n)}{\bar{z}}{}_k^{(3)}(u,v), & \sum_{i=1}^{n-1} a_i \le u \le \sum_{i=1}^{n} a_i,
\end{cases}
$$

где $\overset{(j)}{\bar{z}}{}_k^{(3)}(u,v) = [\overset{(j)}{\underset{(3)}{\varphi}}_{3k}(u) e^{3ikv} + \overset{(j)}{\underset{(3)}{\varphi}}_{k}(u) e^{ikv} + \overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar{\varphi}}}_{k}(u) e^{-ikv} +$

$$
+ \overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar{\varphi}}}_{3k}(u) e^{-3ikv}] \bar{e} +
$$

$$+[\overset{(j)}{\underset{(3)}{\psi}}_{3k}(u)e^{3ikv}+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\psi}}_{k}(u)e^{ikv}+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar\psi}}(u)e^{-ikv}+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar\psi}}_{3k}(u)e^{-3ikv}]\bar a(v)+$$

$$+[\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{3k}(u)e^{3ikv}+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{k}(u)e^{ikv}+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar\chi}}_{k}(u)e^{-ikv}+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar\chi}}_{3k}(u)e^{-3ikv}]\bar a'(v),$$

а $\overset{(j)}{\underset{(3)}{\varphi}}_{(3-2h)k}$, $\overset{(j)}{\underset{(3)}{\psi}}_{(3-2h)k}$, $\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{(3-2h)k}$, $h=0,1$, определяются формулами (38).

<u>Лемма 4</u>. Обе функции $\overset{(1)}{\underset{(3)}{\chi}}_{3k}$ и $\overset{(1)}{\underset{(3)}{\chi}}_{k}$ линейные относительно u.

<u>Доказательство</u>. Выпишем систему уравнений (1) для $\varkappa = \varkappa_1(u)$ и $m=3$, подразумевая все буквы α, β, γ снабженными индексом k, который для краткости письма опускаем.

$$(39)\begin{cases} \overset{(1)}{\alpha}{}^{(3)}_u+\alpha_1\overset{(1)}{\beta}{}^{(3)}_u=-(\overset{(1)}{\alpha}{}^{(1)}_u\overset{(1)}{\alpha}{}^{(2)}_u+\overset{(1)}{\beta}{}^{(1)}_u\overset{(1)}{\beta}{}^{(2)}_u+\overset{(1)}{\gamma}{}^{(1)}_u\overset{(1)}{\gamma}{}^{(2)}_u), \\ \overset{(1)}{\alpha}{}^{(3)}_v+\alpha_1(\overset{(1)}{\beta}{}^{(3)}_v-\overset{(1)}{\gamma}{}^{(3)})+\alpha_1 u\,\overset{(1)}{\gamma}{}^{(3)}_u=-[\overset{(1)}{\alpha}{}^{(1)}_u\overset{(1)}{\alpha}{}^{(2)}_v+\overset{(1)}{\beta}{}^{(1)}_u(\overset{(1)}{\beta}{}^{(2)}_v-\overset{(1)}{\gamma}{}^{(2)})+ \\ \qquad\qquad +\overset{(1)}{\gamma}{}^{(1)}_u(\overset{(1)}{\gamma}{}^{(2)}_v+\overset{(1)}{\beta}{}^{(2)})+\overset{(1)}{\alpha}{}^{(1)}_v\overset{(1)}{\alpha}{}^{(2)}_u+ \\ \qquad\qquad +(\overset{(1)}{\beta}{}^{(1)}_v-\overset{(1)}{\gamma}{}^{(1)})\overset{(1)}{\beta}{}^{(2)}_u], \\ \alpha_1 u(\overset{(1)}{\beta}{}^{(3)}+\overset{(1)}{\gamma}{}^{(3)}_v)=-[\overset{(1)}{\alpha}{}^{(1)}_v\overset{(1)}{\alpha}{}^{(2)}_v+(\overset{(1)}{\beta}{}^{(1)}_v-\overset{(1)}{\gamma}{}^{(1)})(\overset{(1)}{\beta}{}^{(2)}_v-\overset{(1)}{\gamma}{}^{(2)})]. \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение по v, второе – по u и вычитая затем первое из второго, получим, учитывая линейность относительно u функций, $\overset{(1)}{\alpha}{}^{(1)}$, $\overset{(1)}{\beta}{}^{(1)}$, $\overset{(1)}{\gamma}{}^{(1)}$ и $\overset{(1)}{\alpha}{}^{(2)}$, $\overset{(1)}{\beta}{}^{(2)}$, $\overset{(1)}{\gamma}{}^{(2)}$: $(\overset{(1)}{\gamma}{}^{(3)}_k)_{uu}=0$ т.е. $\overset{(1)}{\gamma}{}^{(3)}_k(u,v)$ линейно зависит от u. Но $\overset{(1)}{\gamma}{}^{(3)}_k(u,v)=\overset{(1)}{\underset{(3)}{\chi}}_{3k}(u)e^{3ikv}+$

$+\underset{(3)}{\overset{(1)}{\chi}}_k(u)e^{-ikv}+\underset{(3)}{\overset{(1)}{\chi}}_{3k}(u)e^{-3ikv}$, откуда и следует утверждение леммы.

Следствие. Справедливы тождества:

$$\underset{(3)}{\overset{(1)}{Q'}}_{(3-2h)k}(u)-(3-2h)ik\underset{(3)}{\overset{(1)}{P}}_{(3-2h)k}(u)=0,\ h=0,1,\ 0\le u\le a_1.$$

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из формулы (38,3) при $j=1$ и леммы 4.

Лемма 4-а. Обе функции $\underset{(3)}{\overset{(n)}{\chi}}_{3k}$ и $\underset{(3)}{\overset{(n)}{\chi}}_k$ линейные относительно u.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 4 с использованием линейности функций $\overset{(n)}{\alpha}{}^{(1)}$, $\overset{(n)}{\beta}{}^{(1)}$, $\overset{(n)}{\gamma}{}^{(1)}$, $\overset{(n)}{\alpha}{}^{(2)}$, $\overset{(n)}{\beta}{}^{(2)}$, $\overset{(n)}{\gamma}{}^{(2)}$ относительно разности $u-\sum_{i=1}^{n}a_i$.

Лемма 5. Функции $\underset{(3)}{\overset{(1)}{\varphi}}_{(3-2h)k}$, $\underset{(3)}{\overset{(1)}{\psi}}_{(3-2h)k}$, $h=0,1$, линейные относительно u.

Доказательство. Из рассуждений §§ 2 и 3 следует, что функции $\overset{(1)}{\alpha}{}^{(1)}$, $\overset{(1)}{\beta}{}^{(1)}$, $\overset{(1)}{\gamma}{}^{(1)}$, $\overset{(1)}{\beta}{}^{(2)}$, $\overset{(1)}{\gamma}{}^{(2)}$ и их производные по v линейные и однородные относительно u ; лишь $\overset{(1)}{\alpha}{}^{(2)}$ зависит от u линейно неоднородного, если $\underset{(2)}{\overset{(1)}{c}}$ не полагать равной 0 , но $\overset{(1)}{\alpha}{}^{(2)}_v$ зависит от u линейно однородно.

Обратимся к формулам (37) при $j=1$.

Функция $\underset{(3)}{\overset{(1)}{R}}_{(3-2h)k}(u)$ является коэффициентом при $e^{(3-2h)ikv}$, $h=0,1$, в правой части уравнения (39,3), которая, в силу выше сказанного, линейно однородно зависит от квадрата u . Из формулы (38,2) при $j = 1$, учитывая утверждение леммы 4, заключаем, что $\overset{(1)}{\underset{(3)}{\psi}}{}_{(3-2h)k}$, $h = 0, 1$, линейно зависит от u .

Функция $\overset{(1)}{\underset{(3)}{Q}}{}_{(3-2h)k}(u)$ является коэффициентом при $e^{(3-2h)ikv}$ в правой части уравнения (39,2), которая, в силу выше сказанного, линейно и однородно зависит от u . Из формулы (38,1) при $j = 1$, учитывая утверждение леммы 4, заключаем, что $\overset{(1)}{\underset{(3)}{\varphi}}{}_{(3-2h)k}$, $h = 0, 1$, линейно зависит от u .

<u>Лемма 5-а</u>. Функции $\overset{(n)}{\underset{(3)}{\varphi}}{}_{(3-2h)k}$, $\overset{(n)}{\underset{(3)}{\psi}}{}_{(3-2h)k}$, $h = 0, 1$, линейные относительно u .

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5.

<u>Лемма 6</u>. Для того, чтобы поле бесконечно малого изгибания 3-го порядка $\tilde{z}_k^{(3)}$ было непрерывно на всей поверхности S_n , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$(40)\begin{cases} \overset{(1)}{\underset{(3)}{\varphi}}{}_{(3-2h)k}(0) = 0, \\ \overset{(1)}{\underset{(3)}{\psi}}{}_{(3-2h)k}(0) = 0, \\ \overset{(1)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}(0) = 0, \end{cases} \quad (41)\begin{cases} \overset{(j-1)}{\underset{(3)}{\varphi}}{}_{(3-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right) = \overset{(j)}{\underset{(3)}{\varphi}}{}_{(3-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right), \\ \overset{(j-1)}{\underset{(3)}{\psi}}{}_{(3-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right) = \overset{(j)}{\underset{(3)}{\psi}}{}_{(3-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right), \\ \overset{(j-1)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right) = \overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right), \end{cases}$$

$$j = 2, 3, \ldots, n.$$

$$(42)\begin{cases} \underset{(3)}{\overset{(n)}{\varphi}}_{(3-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) = 0, \\ \underset{(3)}{\overset{(n)}{\psi}}_{(3-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) = 0, \\ \underset{(3)}{\overset{(n)}{\chi}}_{(3-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) = 0, \qquad h = 0, 1. \end{cases}$$

Доказательство. Функции (38), как содержащие интеграл от рациональной дроби со знаменателем, не обращающимся в 0 при $u \neq 0$, $j = 1$, и при $u \neq \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $j = n$, рациональную дробь с тем же свойством и линейную часть, непрерывны при $\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \le u \le \sum\limits_{i=1}^{j} a_i$, $j = 2, 3, \ldots, n-1$; при $0 < u \le a_1$, $j = 1$; при $\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i \le u < \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $j = n$. Поэтому условия (41) необходимы и достаточны для непрерывности поля $\bar{z}_k^{(3)}$ на всей поверхности S_n, кроме ее полюсов.

В полюсе $u = 0$ функции (38) при $j = 1$ непрерывны в силу леммы 4 - 5. В полюсе $u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ функции (38) при $j = n$ непрерывны в силу леммы 4-а - 5-а. Однако непрерывности функций (38) в полюсах поверхности S_n не достаточно для непрерывности в полюсах поля $\bar{z}_k^{(3)}$. Действительно, в полюсе $u = 0$ поле $\bar{z}_k^{(3)}$ имеет значение:

$$\bar{z}_k^{(3)}(0, v) = [\underset{(3)}{\overset{(1)}{\varphi}}_{3k}(0)e^{3ikv} + \underset{(3)}{\overset{(1)}{\varphi}}_k(0)e^{ikv} + \underset{(3)}{\overset{(1)}{\bar{\varphi}}}_k(0)e^{-ikv} + \underset{(3)}{\overset{(1)}{\bar{\varphi}}}_{3k}(0)e^{-3ikv}]\bar{e} +$$
$$+ [\underset{(3)}{\overset{(1)}{\psi}}_{3k}(0)e^{3ikv} + \underset{(3)}{\overset{(1)}{\psi}}_k(0)e^{ikv} + \underset{(3)}{\overset{(1)}{\bar{\psi}}}_k(0)e^{-ikv} + \underset{(3)}{\overset{(1)}{\bar{\psi}}}_{3k}(0)e^{-3ikv}]\bar{a}(v) +$$
$$+ [\underset{(3)}{\overset{(1)}{\chi}}_{3k}(0)e^{3ikv} + \underset{(3)}{\overset{(1)}{\chi}}_k(0)e^{ikv} + \underset{(3)}{\overset{(1)}{\bar{\chi}}}_k(0)e^{-ikv} + \underset{(3)}{\overset{(1)}{\bar{\chi}}}_{3k}(0)e^{-3ikv}]\bar{a}'(v).$$

Для того, чтобы поле $\bar{z}_k^{(3)}$ было непрерывно в полюсе $u = 0$, значение $\bar{z}_k^{(3)}(0,v)$ не должно зависеть от v, для чего необходимо выполнение условий (40). Достаточность условий (40) для непрерывности $\bar{z}_k^{(3)}$ в полюсе $u = 0$ очевидна.

Аналогично устанавливается необходимость и достаточность условий (42) для непрерывности поля $\bar{z}_k^{(3)}$ в полюсе $u = \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Лемма доказана.

<u>Следствие</u>. Если поверхность S_n допускает бесконечно малое изгибание 3-го порядка, то расстояние между полюсами поверхности при этом изгибании не меняется.

<u>Доказательство</u>. Если поверхность S_n допускает бесконечно малое изгибание 3-го порядка, поле $\bar{z}_k^{(3)}(u,v)$ непрерывно на всей поверхности. Тогда, согласно лемме 6, выполняются условия (40) и (42), а следовательно, $\bar{z}_k^{(3)}(0,v) = 0$, $\bar{z}_k^{(3)}(\sum_{i=1}^{m} a_i, v) = 0$, что означает неподвижность полюсов при изгибании 3-го порядка. Отметим, что расстояние между полюсами не меняется не в абсолютном смысле, а по сравнению с тем, каким оно было после совершения бесконечно малого изгибания 2-го порядка.

Дальнейшие рассуждения имеют целью выяснить, существуют ли поверхности S_n, допускающие бесконечно малые изгибания 3-го порядка, т.е. могут ли для поверхностей S_n выполняться условия (40) - (42) (при условии нежесткости 2-го порядка!).

Нетрудно проверить, что функции (38) удовлетворяют условиям (40) - (41) тогда и только тогда, когда

$$
(43)\begin{cases}
\overset{(2)}{\underset{(3)}{C}}{}_{(3-2h)k} = 0, \\[2ex]
\overset{(2j)}{\underset{(3)}{C}}{}_{(3-2h)k} = -\overset{(2j-1)}{\underset{(3)}{C}}{}_{(3-2h)k} \sum_{i=1}^{j-1} a_i + \sum_{i=1}^{j-1} \overset{(2i-1)}{\underset{(3)}{C}}{}_{(3-2h)k}\, a_i + \sum_{i=2}^{j-1} \{ [\overset{(i)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}] \cdot \\
\cdot (\sum_{s=1}^{i} a_s) - [\overset{(i)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}] (\sum_{s=1}^{i-1} a_s) \} - [\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}] (\sum_{s=1}^{j-1} a_s), \text{ где через} \\
[\overset{(i)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}](u) \text{ обозначена нелинейная часть функции} \\
\overset{(i)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}(u). \\[2ex]
\overset{(2j-1)}{\underset{(2)}{C}}{}_{(3-2h)k} = \dfrac{\sum_{i=1}^{j-1} \overset{(2i-1)}{\underset{(3)}{C}}{}_{(3-2h)k}\, a_i \{ [(3-2h)^2 k^2 - 1](\alpha_i - \alpha_j) + \alpha_i \}}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} - \\[2ex]
- \dfrac{(3-2h) i k}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \sum_{i=2}^{j} \dfrac{(\alpha_i - \alpha_{i-1})}{\sum_{s=1}^{i-1} a_s \alpha_s} \overset{(i)}{\underset{(3)}{R}}{}_{(3-2h)k} (\sum_{s=1}^{i-1} a_s) - \dfrac{[(3-2h)^2 k^2 - 1]}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \cdot \\
\cdot \sum_{i=2}^{j} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \times \sum_{s=2}^{i-1} \{ [\overset{(s)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}] (\sum_{i=1}^{s} a_i) - [\overset{(s)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}] \cdot \\
\cdot (\sum_{i=1}^{s-1} a_i) \} + \sum_{i=2}^{j} \dfrac{\sum_{s=1}^{j-1} a_s \alpha_s}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \times \{ [\overset{(i-1)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}]' (\sum_{s=1}^{i-1} a_s) - [\overset{(i)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}]' \cdot \\
\cdot (\sum_{s=1}^{i-1} a_s) \} - \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \sum_{i=2}^{j} \{ \overset{(i-1)}{\underset{(3)}{Q}}{}_{(3-2h)k} (\sum_{s=1}^{i-1} a_s) - \overset{(i)}{\underset{(3)}{Q}}{}_{(3-2h)k} (\sum_{s=1}^{i-1} a_s) \},
\end{cases}
$$

$h = 0, 1;\ j = 2, 3, \ldots, n;\ \overset{(1)}{\underset{(3)}{C}}{}_{(3-2h)k}$ пока не определены.

При проверке необходимо учесть, что функция $\overset{(j)}{\underset{(3)}{R}}{}_{(3-2h)k}$, как построенная из функций (19) и (25) - (26) при условиях (33) - (34), удовлетворяет условию

$$\overset{(j)}{\underset{(3)}{R}}{}_{(3-2h)k} (\sum_{i=1}^{j-1} a_i) = \overset{(j-1)}{\underset{(3)}{R}}{}_{(3-2h)k} (\sum_{i=1}^{j-1} a_i).$$

Перейдем к условиям (42). Как показывают формулы (38) и леммы 4-а - 5-а, условия (42,1) и (42,2) выполняются тогда и только тогда, когда выполнено условие (42,3).

В силу (43,1) и (43,2) функция $\overset{(n)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}(u)$

имеет вид:

$$\overset{(n)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}(u)=\overset{(2n-1)}{\underset{(3)}{C}}{}_{(3-2h)k}\Big(u-\sum_{i=1}^{n-1}a_i\Big)+\sum_{i=1}^{n-1}\overset{(2i-1)}{\underset{(3)}{C}}{}_{(3-2h)k}\,a_i+$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1}\Big\{\Big[\overset{(i)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}\Big]\Big(\sum_{s=1}^{i}a_s\Big)-\Big[\overset{(i)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}\Big]\Big(\sum_{s=1}^{i-1}a_s\Big)\Big\},$$

где $\overset{(2i-1)}{\underset{(3)}{C}}{}_{(3-2h)k}$ определяется формулой (43,3). Следовательно, условие (42,3) выполняется тогда и только тогда, когда

$$(44)\quad \sum_{i=1}^{n}\overset{(2i-1)}{\underset{(3)}{C}}{}_{(3-2h)k}\,a_i+\sum_{i=2}^{n-1}\Big\{\Big[\overset{(i)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}\Big]\Big(\sum_{s=1}^{i}a_s\Big)-\Big[\overset{(i)}{\underset{(3)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}\Big]\Big(\sum_{s=1}^{i-1}a_s\Big)\Big\}=0.$$

Равенство (44) представляет собой уравнение 1-ой степени относительно $\overset{(1)}{\underset{(3)}{C}}{}_{(3-2h)k}$, коэффициент при $\overset{(1)}{\underset{(3)}{C}}{}_{(3-2h)k}$ в котором равен, очевидно, $\sum_{i=1}^{n}\overset{(i)}{A}[(3-2h)k]a_i$, $h=0,1$.

Если рассматриваемое нами значение k не является корнем уравнения (45) $\sum_{i=1}^{n}\overset{(i)}{A}(3k)a_i=0$, условие (44) при $h=0$ может быть выполнено за счет выбора $\overset{(1)}{\underset{(3)}{C}}{}_{3k}$. Однако при $h=1$ условие (44) не может быть выполнено за счет выбора $\overset{(1)}{\underset{(3)}{C}}{}_{k}$, т.к. рассматриваемое нами значение k является корнем уравнения (21).

<u>Теорема 6</u>. Для того, чтобы бесконечно малое изгибание 2-го порядка $\overset{(2)}{Z}_k$ поверхности S_n можно было

продолжить в бесконечно малое изгибание 3-го порядка

$\bar{z}_k^{(3)}$ необходимо и достаточно, чтобы k было корнем уравнения (46) $\sum_{i=1}^{m} \underset{(3)}{\overset{(2i-1)}{C}}{}_k a_i + \sum_{i=2}^{m-1} \{ [\underset{(3)}{\overset{(i)}{\chi}}{}_k] (\sum_{s=1}^{i} a_s) -$

$- [\underset{(3)}{\overset{(i)}{\chi}}{}_k] (\sum_{s=1}^{i-1} a_s) \} = 0$ (фактически не содержащего

$\underset{(3)}{\overset{(1)}{C}}{}_k$) и не было корнем уравнения (45).

Доказательство ясно из предыдущего.

Теорема 7. Для того, чтобы поверхность S_m допускала бесконечно малое изгибание 3-го порядка, достаточно, чтобы натуральный корень $k \geqslant 2$ уравнения (21), удовлетворящий условию $k > \frac{k_{max}}{2}$, являлся корнем уравнения (46).

Доказательство. Если существует натуральный корень $k \geqslant 2$ уравнения (21), тогда, согласно § 2, поверхность S_m допускает бесконечно малое изгибание 1-го порядка $\bar{z}_k^{(1)}$.

Т.к. $k > \frac{k_{max}}{2}$, то, согласно § 3, бесконечно малое изгибание $\bar{z}_k^{(1)}$ может быть продолжено в бесконечно малое изгибание 2-го порядка $\bar{z}_k^{(2)}$.

Т.к. $k > \frac{k_{max}}{2}$, $\frac{k_{max}}{3}$, то оно не является корнем уравнения (45). Условия теоремы 6 таким образом выполнены, и бесконечно малое изгибание 2-го порядка $\bar{z}_k^{(2)}$ продолжимо в бесконечно малое изгибание 3-го порядка $\bar{z}_k^{(3)}$.

Пример 6. Поверхность $S_4 : \{\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \alpha_2,\ \alpha_3 = -\alpha_2,\ \alpha_4 = -1;$ $a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{\alpha_2(4-3\alpha_2)},\ a_3 = a_2,\ a_4 = 1\}$, где α_2 является отрицательным корнем уравнения:

$$63\alpha_2^6 - 210\alpha_2^5 - 125\alpha_2^4 + 108\alpha_2^3 - 344\alpha_2^2 + 288\alpha_2 - 128 = 0 ,$$

допускает бесконечно малое изгибание 3-го порядка, соответствующее значению $k = 2$ (рис.5).

Пример 7. Поверхность S_3 примера 1 не допускает бесконечно малого изгибания 3-го порядка (рис.1).

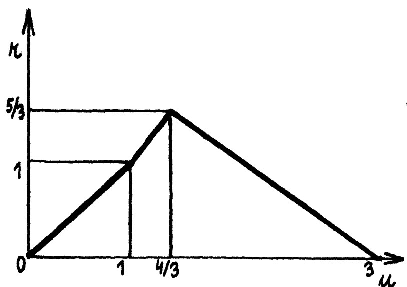

Рис 1

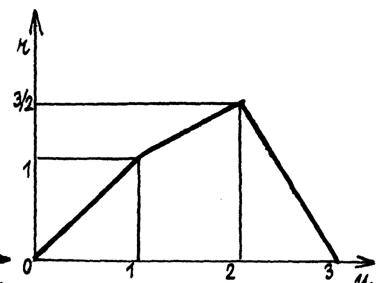

Рис 2

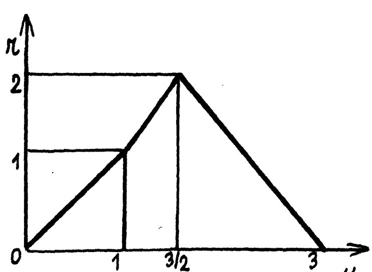

Рис 3

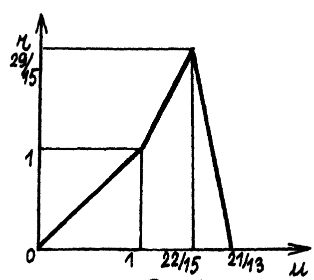

Рис 4

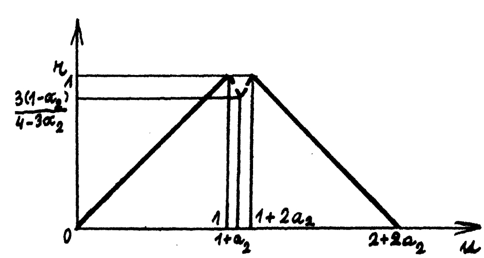

Рис 5

Л и т е р а т у р а

[1] S. COHN - VOSSEN: Unstarre geschlossene Flächen, Math.Ann. 102,1929,стр.10-29,или в сборнике С.Э.Кон-Фоссен,Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом,Москва,Физматгиз, 1959,стр.87-114.

[2] Б.А. БУБЛИК: О числе фундаментальных бесконечно малых изгибаний замкнутых ребристых поверхностей вращения, УМН,т.ХУШ,вып.2(110),1963, стр.121-125.

[3] Г.Н. ЧЕРНИС: Нежесткие ребристые поверхности с краем,Украинский математический журнал № 4,1964, стр.550-558.

[4] В.И. ШИМКО: Бесконечно малые изгибания ребристых поверхностей вращения,Изв.вузов,Матем.,№ 9(64), 1967,стр.93-98.

(Received July 27, 1968)