Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

О теореме Фубини для интеграла Римана в конструктивной математике

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 9 (1968), No. 4, 677--686

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105210

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
9, 4 (1968)

О ТЕОРЕМЕ ФУБИНИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА В КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКЕ

О. ДЕМУТ, Прага
(O. DEMUTH, Praha)

В классической математике имеет место для интеграла Римана следующий аналог теоремы Фубини из теории интеграла Лебега:

Пусть k и l натуральные числа а f ограниченная действительная функция $k+l$ переменных, которая определена в каждой точке $(k+l)$-мерного единичного куба и интегрируема по Риману на этом кубе. Тогда для почти всех точек $(\alpha_1^0, \dots, \alpha_k^0)$ k-мерного единичного куба функция $f(\alpha_1^0, \dots, \alpha_k^0, y_1, \dots, y_l)$ l переменных, $y_1, \dots, y_l$ интегрируема по Риману на l-мерном единичном кубе.

В настоящей заметке показано, что в конструктивной математике такое утверждение неверно. В этой связи интересно заметить, что для конструктивного интеграла Лебега теорема Фубини верна (см.[3]).

В заметке пользуемся определениями и результатами работ [1] - [2].

Для любых нормального алгорифма ([1]) $\mathfrak{A}$ и слова P через $!\,\mathfrak{A}\llcorner P \lrcorner$ обозначим: алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к P - а через $\widetilde{\mathfrak{A}}_P$ такой нормальный алгорифм, что для любого слова Q выполнено $!\,\mathfrak{A}\llcorner PQ \lrcorner \equiv\, !\,\widetilde{\mathfrak{A}}_P \llcorner Q \lrcorner \;\&\; (!\,\mathfrak{A}\llcorner PQ \lrcorner \supset \mathfrak{A}\llcorner PQ \lrcorner \simeq \widetilde{\mathfrak{A}}_P \llcorner Q \lrcorner)$.

Натуральными числами (НЧ) будем называть положительные целые числа а конструктивными действительными числами (КДЧ) - вещественные дуплексы (см. [2], стр. 77). Буквы j, n, t и τ будут служить переменными для НЧ а буквы x, y, z переменными для КДЧ. Арифметическими алгорифмами будем называть нормальные алгорифмы, которые перерабатывают любое НЧ, к которому применимы, опять в НЧ. Скажем, что арифметические алгорифмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ арифметически эквивалентны, если выполнено $\forall n ((!\mathfrak{A}_\llcorner n_\lrcorner \equiv !\mathfrak{B}_\llcorner n_\lrcorner)\,\&$
$\&\,(!\mathfrak{A}_\llcorner n_\lrcorner \supset \mathfrak{A}_\llcorner n_\lrcorner = \mathfrak{B}_\llcorner n_\lrcorner))$.

Последовательностями НЧ будем называть арифметические алгорифмы применимые к любому НЧ.

Пусть m - натуральное число. m - <u>точками</u> будут слова вида $x_1 \square x_2 \square \ldots \square x_m$ (сокращенное обозначение ${}^{(m)}x$), где все x_j $(1 \le j \le m)$ КДЧ из сегмента $0 \triangle 1$, а m - <u>сегментами</u> слова вида

(0) $\quad x_1^1 \triangle x_1^2 \square x_2^1 \triangle x_2^2 \square \ldots \square x_m^1 \triangle x_m^2$,

где x_j^1, x_j^2 - КДЧ из $0 \triangle 1$ такие, что $x_j^1 < x_j^2$ $(1 \le j \le m)$. Выражение ${}^{(m)}\Theta$ будет использоваться в качестве переменной для m -сегментов вида (0). Построены нормальные алгорифмы ν_m и $|\ \ |_m$ такие, что для любого ${}^{(m)}\Theta$ имеет место $\nu_m({}^{(m)}\Theta) \simeq \max\limits_{1 \le j \le m} (x_j^2 - x_j^1)$,
$|{}^{(m)}\Theta|_m \simeq \prod\limits_{j=1}^{m} (x_j^2 - x_j^1)$. Посредством ${}^{(m)}K$ будем обозначать m -сегмент $0\triangle 1 \square \ldots \square 0 \triangle 1$. m -<u>функциями</u> будем называть конструктивные функции m действительных перемененных, определенные на ${}^{(m)}K$.

<u>Определение</u>: Пусть m НЧ а ${}^{(m)}f$ m -функция. Скажем, что ${}^{(m)}f$ интегрируема по Риману (на ${}^{(m)}K$),

если существует последовательность НЧ $\{p_n\}_n$ такая, что для всяких НЧ n, систем неперекрывающихся m сегментов $\{{}^{(m)}\Theta^{1,j}\}_{j=1}^{s_1}$ $\{{}^{(m)}\Theta^{2,j}\}_{j=1}^{s_2}$ и систем m-точек $\{{}^{(m)}x^{1,j}\}_{j=1}^{s_1}$, $\{{}^{(m)}x^{2,j}\}_{j=1}^{s_2}$, для которых объединением каждой из этих систем m-сегментов является ${}^{(m)}K$ и выполнено $\forall r j\ (1 \le r \le 2 \,\&\, 1 \le j \le s_r \supset {}^{(m)}x^{r,j} \in {}^{(m)}\Theta^{r,j} \,\&\, \nu_m({}^{(m)}\Theta^{r,j}) < \frac{1}{p_n})$,

имеет место

$$\left|\sum_{j=1}^{s_1} {}^{\{m\}}f({}^{(m)}x^{1,j}) \cdot |{}^{(m)}\Theta^{1,j}|_m - \sum_{j=1}^{s_2} {}^{\{m\}}f({}^{(m)}x^{2,j}) \cdot |{}^{(m)}\Theta^{2,j}|_m\right| < \frac{1}{n}.$$

<u>Обозначение</u>: Пусть m НЧ, ${}^{\{m\}}f$ m-функция, K НЧ а $\{k_n\}_n$ возрастающая последовательность НЧ. Тогда посредством $R_m({}^{\{m\}}f, \{k_n\}_n, K)$ обозначим высказывание: Для всякой m-точки ${}^{(m)}x$ выполнено $|{}^{\{m\}}f({}^{(m)}x)| \le K$ и для произвольных НЧ n и системы неперекрывающихся m-сегментов $\{{}^{(m)}\Theta^{j}\}_{j=1}^{s}$ таких,

что для всякого НЧ j, $1 \le j \le s$, $\nu_m({}^{(m)}\Theta^{j}) < \frac{1}{k_n}$ и существуют m-точки ${}^{(m)}x^{1,j}$ и ${}^{(m)}x^{2,j}$ из ${}^{(m)}\Theta^{j}$, для которых $|{}^{\{m\}}f({}^{(m)}x^{1,j}) - {}^{\{m\}}f({}^{(m)}x^{2,j})| > \frac{1}{n}$,

имеет место $\sum_{j=1}^{s} |{}^{(m)}\Theta^{j}|_m < \frac{1}{n}$

Результат, опубликованный в [4], можно перенести на m-мерный случай:

<u>Теорема 1</u>. Пусть m натуральное число. m-функция ${}^{\{m\}}f$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда существуют НЧ K и возрастающая последовательность НЧ $\{k_n\}_n$ такие, что имеет место $R_m({}^{\{m\}}f, \{k_n\}_n, K)$.

При помощи несложных рассуждений можно доказать:

<u>Лемма</u>. Пусть k и l натуральные числа, ${}^{\{k+l\}}f$ интегрируемая по Риману $(k+l)$-функция а ${}^{\{k\}}g$ k-функция такие, что для всякой k-точки ${}^{(k)}x$ l-функция

$\overline{{}^{\{k+l\}}f_{(k)}}_{x\square}$ интегрируема по Лебегу ([3]) и ${}^{\{k\}}g({}^{(k)}x)$ значение интеграла Лебега от этой ℓ -функции на ${}^{(\ell)}K$. Тогда k -функция ${}^{\{k\}}g$ интегрируема по Риману. При этом если для НЧ K и возрастающей последовательности НЧ $\{p_n\}_n$ имеет место $R_{k+\ell}({}^{\{k+\ell\}}f, \{p_n\}_n, K)$, то выполнено $R_k({}^{\{k\}}g, \{p_{4Kn^2}\}_n, K)$.

<u>Теорема 2</u>. Существует интегрируемая по Риману 3-функция ${}^{\{3\}}f$ такая, что для всякого КДЧ x из сегмента $0 \triangle 1$ 2-функция $\overline{{}^{\{3\}}f}_{x\square}$ не является интегрируемой по Риману.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{\ell_n\}_n$ последовательность НЧ такая, что $\forall n(\ell_n = 3(3^n+1))$.

Для всякой четверки НЧ n, k, i, s , где $1 \le k \le 2^{\ell_n} + 1 \,\&\, 1 \le i \le n$, определим 2-функцию ${}^{\{2\}}h_{n,k,i,s}$ так, что для всяких КДЧ x и y выполнено

$$
{}^{\{2\}}h_{n,k,i,s}(x\square y) = \sum_{j=2^{\ell_n-i}(2^i-2)}^{2^{\ell_n-i}(2^i-1)-1} 2^{2\ell_{n+s}-i+1}\Bigl(\Bigl|x-\frac{k-2}{2^{\ell_n}}\Bigr| - \Bigl|x-\frac{k-2}{2^{\ell_n}}-\frac{1}{2^{\ell_{n+s+1}}}\Bigr| -
$$
$$
-\Bigl|x-\frac{k}{2^{\ell_n}}+\frac{1}{2^{\ell_{n+s+1}}}\Bigr| + \Bigl|x-\frac{k}{2^{\ell_n}}\Bigr|\Bigr)\cdot\Bigl(\Bigl|y-\frac{2j+1}{2^{\ell_{n+1}}}\Bigr| +
$$
$$
+\Bigl|y-\frac{2j+1}{2^{\ell_{n+1}}}-\frac{1}{2^{\ell_{n+s}}}\Bigr| - \Bigl|2y-\frac{2j+1}{2^{\ell_n}}-\frac{1}{2^{\ell_{n+s}}}\Bigr|\Bigr) .
$$

Имеем $0 \le {}^{\{2\}}h_{n,k,i,s} \le \frac{1}{2^{i-1}}$ и ${}^{\{2\}}h_{n,k,i,s}$ очевидно равномерно непрерывная 2-функция отличная от нулевой функции только внутри сегментов $\frac{k-2}{2^{\ell_n}} \triangle \frac{k}{2^{\ell_n}} \square \frac{2j+1}{2^{\ell_{n+1}}} \triangle \left(\frac{2j+1}{2^{\ell_{n+1}}} + \frac{1}{2^{\ell_{n+s}}}\right)$, где $2^{\ell_n-i}(2^i-2) \le j < 2^{\ell_n-i}(2^i-1)$. Для всякого такого j и для любого КДЧ x из сегмента $\frac{k-\frac{7}{4}}{2^{\ell_n}} \triangle \frac{k-\frac{1}{4}}{2^{\ell_n}}$ колебание 1-функции $\overline{({}^{\{2\}}h_{n,k,i,s})}_{x\square}$ на сегменте $\frac{j}{2^{\ell_n}} \triangle \frac{j+1}{2^{\ell_n}}$ равно $\frac{1}{2^{i-1}}$. Сумма длин всех таких сегментов равна $\frac{1}{2^t}$

Пусть Ψ точное дизъюнктное сегментное рациональное покрытие 1-сегмента $\frac{62}{128} \triangle 1$ такое, что

$\forall n (\sum_{j=1}^{n} |\Psi_j|_1 < \frac{1}{128})$ (см.[2],стр.469). Построим последовательности 1-функций $\{{}^{\{1\}}g_t\}_t$ и НЧ $\{s_t\}_t$: Пусть t натуральное число и $\{a_j \triangle b_j\}_{j=1}^{k}$ система неперекрывающихся 1-сегментов такая, что

а) для всякого НЧ j, $1 \leq j \leq k$, сегмент $a_j \triangle b_j$ не перекрывается ни с одним из первых $t+1$ сегментов покрытия Ψ — $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{t+1}$ и

б) объединением 1-сегментов $a_1 \triangle b_1$, $a_2 \triangle b_2$, … …, $a_k \triangle b_k$, $\Psi_1, \ldots, \Psi_{t+1}$ является сегмент $\frac{62}{128} \triangle 1$.

Положим $\omega \rightleftharpoons \sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)$. Тогда выполнено $\frac{1}{2} + \frac{1}{128} < \omega <$ $< \frac{1}{2} + \frac{2}{128}$. В качестве s_t возьмем наименьшее НЧ s такое, что $t \leq s \,\&\, \frac{1}{2^s} < (1 - \frac{1}{2\omega}) \cdot \min_{1 \leq j \leq k} (b_j - a_j)$. Определим 1-функцию ${}^{\{1\}}g_t$ так, что для всякого КДЧ x имеет место

$$ {}^{\{1\}}g_t(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(1-\frac{1}{2\omega})(b_j - a_j)} \cdot (|x - a_j| - |x - a_j - (1 - \frac{1}{2\omega}) \cdot (b_j - a_j)| - |x - b_j + (1 - \frac{1}{2\omega}) \cdot (b_j - a_j)| + |x - b_j|). $$

Равномерно непрерывная 1-функция ${}^{\{1\}}g_t$ равна нулевой функции на каждом из 1-сегментов $0 \triangle \frac{62}{128}$, $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{t+1}$. Значение интеграла Римана от ${}^{\{1\}}g_t$ на сегменте $0 \triangle 1$ равно 1.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ нормальные алгорифмы такие, что

1) для всякого НЧ n алгорифм $\widetilde{\mathfrak{A}}_{n\square}$ является арифметическим,

2) для любых арифметического алхорифма $\mathcal{A}$ и НЧ m существует НЧ p такое, что $m < p$ и алгорифмы $\mathcal{A}$ и $\widetilde{\mathfrak{A}}_{p\square}$ арифметически эквивалентны и

3) для всяких НЧ k, l и m алгорифм ϑ применим к $k\square l\square m$ и имеет место $\vartheta_\llcorner k\square l\square 1_\lrcorner \not\doteq \Lambda\,\&$
$\&(\vartheta_\llcorner k\square l\square m_\lrcorner \doteq \Lambda \supset \vartheta_\llcorner k\square l\square m+1_\lrcorner \doteq \Lambda)\,\&$
$\&(\exists n(\vartheta_\llcorner k\square l\square n_\lrcorner \doteq \Lambda) \equiv (!\,\mathfrak{A}_\llcorner l\square l_\lrcorner\,\&$
$\&\,\forall j(1 \leq j \leq l \supset !\,\mathfrak{A}_\llcorner k\square j_\lrcorner)))$.

Нормальные алгорифмы с такими свойствами можно построить способом описанным в [2], стр.305 и 397.

Пусть $\{\lambda_m\}_m$ последовательность НЧ. Тогда, как следует из свойств алгорифма $\mathfrak{A}$, для всяких КДЧ x из 1-сегмента $0 \triangle 1$ и НЧ m существует НЧ p такое, что

$$m < p\,\&\,!\,\mathfrak{A}_\llcorner p\square p_\lrcorner \quad \text{и} \quad \frac{\mathfrak{A}_\llcorner p\square p_\lrcorner - \frac{7}{4}}{2^{\lambda_p}} - 2 < x < \frac{\mathfrak{A}_\llcorner p\square p_\lrcorner - \frac{1}{4}}{2^{\lambda_p}} - 2.$$

Перейдем к постройке 3-функции ${}^{\langle 3\rangle}f$. Пусть l, p и t НЧ. Определим 3-функцию ${}^{\langle 3\rangle}f_{l,p,t}$ так, что

1) если выполнено $(p < l \vee \vartheta_\llcorner l\square p\square t_\lrcorner \not\doteq \Lambda \vee (1 < t \supset$
$\supset \vartheta_\llcorner l\square p\square t-1_\lrcorner \doteq \Lambda))$, то ${}^{\langle 3\rangle}f_{l,p,t}$ является нулевой
и

2) если имеет место $(l \leq p\,\&\,1 < t\,\&\,\vartheta_\llcorner l\square p\square t-1_\lrcorner \not\doteq \Lambda\,\&$
$\&\,\vartheta_\llcorner l\square p\square t_\lrcorner \doteq \Lambda)$, положим $q \rightleftharpoons \sum_{j=1}^{p} \mathfrak{A}_\llcorner l\square j_\lrcorner$ и

а) в случае, что $(\mathfrak{A}_\llcorner p\square p_\lrcorner \leq 2^{q+1} \vee 3.2^{q} \leq (\mathfrak{A}_\llcorner p\square p_\lrcorner - 2) \vee \mathcal{P})$,
где

$$\mathcal{P} \equiv \exists \tau (1 \le \tau \le p \,\&\, \tau \ne l \,\&\, (\vartheta\llcorner \tau \square p \square t-1 \lrcorner \equiv \Lambda \vee \tau < l \,\&$$
$$\&\, \vartheta\llcorner \tau \square p \square t \lrcorner \equiv \Lambda) \,\&\, q = \sum_{j=1}^{p} \mathcal{U}\llcorner \tau \square j \lrcorner) ,$$

то ${}^{\langle 3\rangle}f_{l,p,t}$ нулевая функция и

б) в случае, что $2^{k+1} \le \mathcal{U}\llcorner p \square p \lrcorner - 1 \le 3.2^{k} \,\&\, \neg \mathcal{P}$, определим 3-функцию ${}^{\langle 3\rangle}f_{l,p,t}$ так, чтобы для всяких КДЧ x, y и z имело место

$${}^{\langle 3\rangle}f_{l,p,t}(x \square y \square z) = {}^{\langle 2\rangle}h_{q,\mathcal{U}\llcorner p \square p \lrcorner - 2^{k+1}, p, s_t}(x \square y) \cdot {}^{\langle 1\rangle}g_t(z) .$$

Видим, что ${}^{\langle 3\rangle}f_{l,p,t}$ неотрицательная равномерно непрерывная 3-функция ограниченная сверху числом $\frac{1}{2^{p-2}}$, которая обращается в ноль в 3-точках непринадлежащих 3-сегменту $0 \vartriangle 1 \square (1-\frac{1}{2^{p-1}}) \vartriangle (1-\frac{1}{2^{p}}) \square 0 \vartriangle 1$. Кроме того имеет место

$$\forall j x y z ((1 \le j \le t+1 \,\&\, x \in \Psi_j \vee z \le \frac{62}{128} \vee 1 \le z) \supset {}^{\langle 3\rangle}f_{l,p,t}(x \square y \square z) = 0).$$

Заметим, что для всяких НЧ $l_1, l_2, p, t_1, t_2, t_3$ где $l_1 \ne l_2 \,\&\, t_1 \ne t_2$, в каждой из пар ${}^{\langle 3\rangle}f_{l_1,p,t_1}$, ${}^{\langle 3\rangle}f_{l_1,p,t_2}$ и ${}^{\langle 3\rangle}f_{l_1,p,t_1}$, ${}^{\langle 3\rangle}f_{l_2,p,t_3}$ по крайней мере одна из 3-функций является нулевой.

Из выше сказанного следует, что для всяких НЧ l и p ряд 3-функций $\sum_t {}^{\langle 3\rangle}f_{l,p,t}$ всюду сходится. 3-функцию, которая является суммой этого ряда, обозначим ${}^{\langle 3\rangle}f_{l,p}$. Выполнено $(p < l \supset {}^{\langle 3\rangle}f_{l,p} = 0) \,\&\, (l \le p \supset 0 \le {}^{\langle 3\rangle}f_{l,p} \le \frac{1}{2^{p-2}} \,\&$
$\forall x y z ((y \le 1 - \frac{1}{2^{p-1}} \vee 1 - \frac{1}{2^{p}} \le y) \supset {}^{\langle 3\rangle}f_{l,p}(x \square y \square z) = 0))$.

Отсюда вытекает, что для всякого НЧ l равномерно сходится ряд 3-функций $\sum\limits_{p} {}^{\langle 3\rangle}f_{\ell,p}$. Сумму этого ряда обозначим через ${}^{\langle 3\rangle}f_{\ell}$. Имеет место

$$0 \leq {}^{\langle 3\rangle}f_{\ell} \leq \frac{1}{2^{\ell-2}} \,\&\, \forall xyz\,((y \leq 1-\frac{1}{2^{\ell-1}} \vee 1 \leq y) \supset {}^{\langle 3\rangle}f_{\ell}(x \square y \square z) = 0).$$

Сумму равномерно сходящегося ряда 3-функций $\sum\limits_{\ell} {}^{\langle 3\rangle}f_{\ell}$ обозначим через ${}^{\langle 3\rangle}f$.

Без особых трудностей можно убедиться в том, что выполнено $R_3\,({}^{\langle 3\rangle}f, \{2^{\ell_n}\}_n, 2)$.

Пусть x КДЧ из сегмента $0 \triangle 1$. Докажем, что 2-функция $\widetilde{{}^{\langle 3\rangle}f_{x\square}}$ неинтегрируема по Риману.

Имеем $0 \leq \widetilde{{}^{\langle 3\rangle}f_{x\square}} \leq 2$. Предположим, что 2-функция $\widetilde{{}^{\langle 3\rangle}f_{x\square}}$ интегрируема по Риману. Тогда на основании теоремы 1 знаем, что существует возрастающая последовательность НЧ $\{\tau_n\}_n$ такая, что выполнено

(1) $$R_2\,(\widetilde{{}^{\langle 3\rangle}f_{x\square}}, \{\tau_n\}_n, 2).$$

Пусть $\{\tau_n\}_n$ последовательность обладающая такими свойствами. Для всякого НЧ n положим $\sigma_n \rightleftharpoons \tau_{2\cdot 2n+5}$. Для последовательности $\{\sigma_n\}_n$ существует НЧ ℓ такое, что имеет место $\forall n\,(!\mathfrak{U}\llcorner \ell \square n \lrcorner \,\&\, (n=1 \supset \mathfrak{U}\llcorner \ell \square n \lrcorner = \sigma_1) \,\&\, (1<n \supset$ $\supset \mathfrak{U}\llcorner \ell \square n \lrcorner = \sigma_n - \sigma_{n-1}))$. Как знаем, существует НЧ p такое, что выполнено $\ell < p \,\&\, !\mathfrak{U}\llcorner p \square p \lrcorner \,\&\, \dfrac{\mathfrak{U}\llcorner p \square p \lrcorner - \frac{7}{4}}{2^{\ell_{\sigma_p}}} - 2 < x < \dfrac{\mathfrak{U}\llcorner p \square p \lrcorner - \frac{1}{4}}{2^{\ell_{\sigma_p}}} - 2$.

Из способа определения 3-функции ${}^{\langle 3\rangle}f$ и выше сказанного следует, что существуют НЧ t, τ и t_0, для которых имеет место $1 < t_0 \leq t \,\&\, 1 \leq \tau \leq p \,\&\, (t = t_0 \supset \tau \leq \ell) \,\&\, \vartheta\llcorner \ell \square p \square t-1 \lrcorner \neq \Lambda$ $\&\, \vartheta\llcorner \ell \square p \square t \lrcorner = \Lambda \,\&\, \vartheta\llcorner \tau \square p \square t_0 - 1 \lrcorner \neq \Lambda \,\&\, \vartheta\llcorner \tau \square p \square t_0 \lrcorner = \Lambda \,\&$ $\sigma_p = \sum\limits_{j=1}^{p} \mathfrak{U}\llcorner \tau \square j \lrcorner$ и 2-функция $\widetilde{({}^{\langle 3\rangle}f_{\tau,p,t_0})_{x\square}}$ равна на 2-сегменте

$(1-\frac{1}{2^{n-1}})\,\Delta\,(1-\frac{1}{2^{n}})\,\square\,0\,\Delta\,1$ 2-функции $\overline{{}^{\langle 3\rangle}f_{x\square}}$ и обращается в ноль в других точках.

Ввиду этого и (1) имеем

$$(2) \qquad R_2(\overline{({}^{\langle 3\rangle}f_{\tau,n,t_0})_{x\square}}, \{\tau_n\}_n, 2).$$

Из определения 3-функции ${}^{\langle 3\rangle}f_{\tau,n,t_0}$ следует, что для всяких КДЧ y и x выполнено

$$\overline{({}^{\langle 3\rangle}f_{\tau,n,t_0})_{x\square}}(y\,\square\,x) = \overline{({}^{\langle 2\rangle}h_{\sigma_n,u_{n\square n_j}-2^{\ell_{\tau_n}+1},n,s_{t_0}})_{x\square}}(y)\cdot{}^{\langle 1\rangle}g_{t_0}(x).$$

Напомним, что значение интеграла от ${}^{\langle 1\rangle}g_{t_0}$ на $0\,\Delta\,1$ равно 1. Ввиду этого, (2) и леммы получаем

$$(3) \qquad R_1(\overline{({}^{\langle 2\rangle}h_{\sigma_n,u_{n\square n_j}-2^{\ell_{\tau_n}+1},n,s_{t_0}})_{x\square}}, \{\tau_{8n^2}\}_n, 2).$$

Как знаем для всякого НЧ j, $2^{\ell_{\tau_n}-i}\cdot(2^i-2)\le j<2^{\ell_{\tau_n}-i}\cdot(2^i-1)$, колебание 1-функции $\overline{({}^{\langle 2\rangle}h_{\sigma_n,u_{n\square n_j}-2^{\ell_{\tau_n}+1},n,s_{t_0}})_{x\square}}$ на 1-сегменте $\frac{j}{2^{\ell_{\sigma_n}}}\,\Delta\,\frac{j+1}{2^{\ell_{\sigma_n}}}$ равно $\frac{1}{2^{n-1}}$ и, следовательно, больше $\frac{1}{2^{n+1}}$. Длина каждого из этих сегментов равна $\frac{1}{2^{\ell_{\sigma_n}}}$, что меньше чем $\frac{1}{\tau_{8\cdot 2^{2n+2}}}$. Сумма длин всех этих сегментов равна $\frac{1}{2^n}$, что больше $\frac{1}{2^{n+1}}$. Таким образом, (3) не может иметь места и мы пришли на основании предположения, что 2-функция $\overline{{}^{\langle 3\rangle}f_{x\square}}$ интегрируема по Риману, к противоречию.

Литература

[1] А.А. МАРКОВ: Теория алгорифмов, Труды мат.инст.им. В.А.Стеклова, т. XLII (1954).

[2] - Проблемы конструктивного направления в математике, 2(сборник работ),Труды мат.инст.им.В.А.Стеклова, т. LXVII (1962).

[3] О. ДЕМУТ: Интеграл Лебега в конструктивном анализе, Записки научных семинаров Ленинградского отд. мат.инст.им.В.А.Стеклова,т.4(1967),30-43.

[4] О. ДЕМУТ: Необходимое и достаточное условие интегрируемости конструктивных функций по Риману, ДАН СССР,т.176(1967),№ 4,757-758.

(Received November 21, 1968)