Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

G. L. Lukankin

Об интегралах типа Темлякова и некоторых их свойствах

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 9 (1968), No. 2, 269--280

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105180

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
9, 2 (1968)

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ТИПА ТЕМЛЯКОВА И НЕКОТОРЫХ ИХ СВОЙСТВАХ

Г.Л. ЛУКАНКИН, Москва

В последние годы сильно возрос интерес к теории функций нескольких комплексных переменных. Не имевшая до настоящего времени больших приложений в естествовании, теория функций нескольких комплексных переменных в работах школы академика Н.Н. Боголюбова получила первые многочисленные и плодотворные приложения в квантовой теории поля, особенно в вопросах обоснования дисперсионных соотношений (см.[9]).

В вышедшей в свет книге (см.[5]) академика Ю.В. Линника сделано новое важнейшее открытие: найдено применение теории голоморфных функций многих комплексных переменных к математической статистике.

Как известно, удобным аппаратом для исследования свойств голоморфных функций многих комплексных переменных являются интегральные представления.

В настоящее время известен (см.[8],[9]) целый ряд интегральных представлений: Коши, Вейля, Мартинелли-Бохнера, Темлякова, Иоста-Леман-Дайсона и др.

В данной работе будет рассмотрен интеграл типа Темлякова с плотностью, заданной на некотором топологическом произведении, изучены некоторые его свойства и дано их приложение к решению краевой задачи (типа задачи линейного сопряжения). Работа носит характер обзора некоторых результатов учеников проф.А.А. Темлякова.

Рассмотрим область D в пространстве C^2 двух комплексных переменных. Будем говорить (см. [8], § 23), что область D принадлежит классу (T), $(D \in (T))$, если D есть полная, ограниченная, выпуклая двоякокруговая область с центром $(0, 0) \in D$, граница которой дважды непрерывно дифференцируема и аналитически выпукла извне.

Советский математик проф. Темляков установил (см. [1-4]; [8], § 23): область $D \in (T)$ допускает следующее параметрическое задание:

$D = \{z_1, z_2 : |z_1| = z_1(\tau), |z_2| = z_2(\tau), 0 \leq \tau \leq 1\}$

и граница области D имеет вид $\partial D = \{z_1, z_2 :$

$z_2 = r_1(\tau)\}, z_2 = r_2(\tau)\xi e^{-it}, 0 \leq \tau \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi, |\xi| = 1\}$,

где $r_1(\tau)$ и $r_2(\tau)$ - неотрицательные непрерывные функции на сегменте $[0, 1]$, дифференцируемые $(0, 1]$, удовлетворяющие условиям:

(1) $r_1(0) = 0, \quad 0 < r_1'(\tau) \leq \tau (r_1(\tau))^{-1}$ для

$0 < \tau \leq 1, \quad r_1(1) < \infty$,

(2) $r_2(\tau) = R_2 \exp[-\int\limits_0^\tau \frac{\tau}{1-\tau} d\ln r_1(\tau)] \, (R_2 > 0)$.

При этом кривая, являющаяся границей образа области D в "абсолютной четвертьплоскости" есть огибающая семейства прямых

$$\frac{\tau}{r_1(\tau)}|z_1| + \frac{1-\tau}{r_2(\tau)}|z_2| = 1 \quad (0 \leq \tau \leq 1) \quad \text{и}$$

расположена под огибаемой в любой точке.

Проф. Темляковым были даны следующие интегральные формулы (см. [1-4]; [8], § 23)

1°. Если $f(z_1, z_2)$ - функция аналитическая в D, непрерывная в $\bar{D}$, то ее значения в $(z_1, z_2) \in D$ выражаются через значения функции на границе по формуле:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} dt \int_{|\xi|=1} \frac{\xi f(r_1(\tau)\xi, r_2(\tau)\xi e^{-it})}{(\xi - u)^2} d\xi \tag{3}$$

$$u = \tau (r_1(\tau))^{-1} z_1 + (1-\tau)(r_2(\tau))^{-1} z_2 e^{it} .$$

2°. Если $f(z_1, z_2)$ - аналитическая в D; $f(z_1, z_2)$, $f'_{z_1}(z_1, z_2)$, $f'_{z_2}(z_1, z_2)$ - непрерывны в $\bar{D}$, то ее значения внутри области выражаются через значения линейного оператора

$$L_1 [f] = F(z_1, z_2) = f(z_1, z_2) + z_1 f'_{z_1}(z_1, z_2) + z_2 f'_{z_2}(z_1, z_2)$$

на границе ∂D по формуле

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} dt \int_{|\xi|=1} \frac{F(r_1(\tau)\xi, r_2(\tau)\xi e^{it})}{\xi - u} d\xi \tag{4}$$

В научной литературе (см. [7]) интеграл (3) - назван интегралом Темлякова II рода, а (4) - интегралом 1 рода.

Позднее, ученик проф. Темлякова, Ваврин (см. [6-7]) получил интегральное представление Темлякова III рода, а также установил общую интегральную формулу, объединяющую указанные представления:

$$f(z_1, z_2) = \alpha f(0,0) + \frac{1}{2-\alpha} \sum_{\nu=1}^{2} \frac{z_\nu^\alpha}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \times \tag{5}$$

$$\times \int_{|\xi|=1} L^{(1-k-\alpha)}_{\alpha+1,1-k} \left[\frac{1}{\xi - u}\right] L^{(k)}_{2-k,1} \left[f_\nu^\alpha (r_1(\tau)\xi, r_2(\tau)\xi e^{-it})\right] d\xi$$

α - число равное 0, или 1 , оператор

$$L^{(n-q+1)}_{q,n}[\varphi] = L_n[L_{n-1}\cdots[L_q[\varphi]]\cdots] ,$$

$$L_q[\varphi] = q\varphi + \sum_{\nu=1}^{2} z_\nu f'_{z_\nu} .$$

Интеграл (5) был назван <u>общим интегралом Темлякова</u>.

Другой ученик проф. Темлякова Айзенберг (см.[11]), рассмотрев в качестве плотностей интегралов (3) и (4), соответственно, произвольные суммируемые по Лебегу на $\partial\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$ функции

$$\xi f(r_1(\tau)\xi , r_2(\tau)\xi e^{-it}) \text{ и } F(r_1(\tau)\xi , r_2(\tau)\xi e^{-it}),$$

введ понятие интегралов типа Темлякова.

Однако, как это следует из интегральных формул Темлякова (3) и (4), при построении интегралов Темлякова используются лишь параметрические характеристики границы, а не сама граница, так как интегрирование в них фактически ведется не по границе, а по параметрическим характеристикам границы, т.е. по $(\tau, t, \xi) \in M = \{\tau, t, \xi : 0 \le \tau \le 1, 0 \le t \le 2\pi, |\xi| = 1\}$.

Это позволило рассмотреть (см.[14-15]) интеграл типа Темлякова с плотностью заданной на топологическом произведении M . А именно: рассмотрим функцию $\Phi(\tau, t, \lambda, \mu)$ (τ и t - действительные параметры, λ и μ - комплексные), которая суммируема по Лебегу в прямоугольнике $R = \{\tau, t : 0 \le \tau \le 1, 0 \le t \le 2\pi\}$ при любых λ и μ $(|\lambda| < +\infty, |\mu| < +\infty)$.

Интегралом типа Темлякова назовем интеграл следующего вида:

$$(6)\quad f(z_1,z_2)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^1 d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\xi|=1}\frac{\Phi(\tau,t,\xi,\xi e^{-it})}{(\xi-u)^k}\,d\xi$$

где $(z_1, z_2) \in C^2$, u - прежнее; $r_1(\tau)$ и $r_2(\tau)$ есть функции, определяемые соотношениями (1) и (2); причем, если $k = 1$, то интеграл (6) назовем интегралом типа Темлякова 1 рода, а если же $k = 2$, то - П рода. Интеграл типа Темлякова можно ввести и другим способом, а именно (см.[15]):

Общим интегралом типа Темлякова назовем следующий интеграл

$$(7)\quad \begin{aligned} f(z_1,z_2) &= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^1 d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\xi|=1} L^{(1-k-\alpha)}_{(\alpha+1,1-k)}\left[\frac{1}{\xi-u}\right]\times \\ &\times \Phi(\tau,t,\xi,\xi e^{-it})\,d\xi \ , \end{aligned}$$

где $\alpha = 0$ или 1, $\mu\ (0 \leq \mu \leq 1-\alpha)$, $k = 0,1,\dots,\mu$

Функции $r_1 = r_i(\tau)$ $(i = 1, 2)$ заданы соотношениями (1) и (2), поэтому можно рассмотреть семейство гиперплоскостей

$$(8)\quad \frac{\tau}{r_1(\tau)}|z_1| + \frac{1-\tau}{r_2(\tau)}|z_2| = 1 \quad (0 \leq \tau \leq 1) \ .$$

Рассмотрев огибающую семейства гиперплоскостей (8), мы получим неаналитическую гиперповерхность $|z_1| = r_1(\tau)$, $|z_2| = r_2(\tau)$ $(0 \leq \tau \leq 1)$, лежащую ниже любой гиперплоскости из семейства (8), которую и примем за границу полной, выпуклой, двоякокруговой области

$$D = \{z_1, z_2 : |z_1| < r_1(\tau),\ |z_2| < r_2(\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1\} .$$

Очевидно, что полученная область $D \in (T)$, так как $r_i = r_i(\tau)$ $(i=1,2)$ у нас остались прежние (см. [15]).

Рассмотрим теперь некоторые классы функций α и β:

Определение 1. Мы скажем, что $\Phi(\tau, t, \xi, \eta) \in \alpha$, $\eta = \xi e^{-it}$, если Φ - суммируемая функция на множестве R при любых ξ и η, $(|\xi| = |\eta| = 1)$, а по переменному ξ удовлетворяет условию $Lip\ \alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ независимому от τ и t.

Определение 2. Будем говорить, что $\Phi(\tau, t, \xi, \xi e^{-it}) \in \beta$ если Φ по ξ удовлетвроет условию $Lip\ \alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, независимому от τ и t, и ограничена по модулю для $(\tau, t, \xi) \in M$.

Поведение интеграла типа Темлякова характеризуется следующими теоремами:

Теорема 1 (см.[14]). Пусть плотность интеграла типа Темлякова есть функция $\Phi(\tau, t, \xi, \xi e^{-it}) \in \alpha$, а

$$a = \lim_{\tau \to \infty} \frac{r_2'(\tau)}{r_1'(\tau)}, \quad b = \lim_{\tau \to 1} \frac{r_2'(\tau)}{r_1'(\tau)} .$$

Тогда, если $a \neq 0$ и $b \neq -\infty$ (или $a \neq 0, b = -\infty$; или $a = 0, b \neq -\infty$; или $a = 0$, $b = -\infty$), то интеграл (6) является функцией аналитической в областях D, E_1, E_2 (или в D и E_1, или в D и E_2, или в D) и, вообще говоря, неаналитической в области $C^2 \setminus \overline{D \cup E_1 \cup E_2}$ (или $C^2 \setminus \overline{D \cup E_1}$; или $C^2 \setminus \overline{D \cup E_2}$; или $C^2 \setminus D$), где

$$E_1 = \{z_1, z_2) : a|z_1| + |z_2| + r_2(0) < 0\}, \quad E_2 = \{z_1, z_2 : b|z_1| + |z_2| + b r_1(1) > 0\}.$$

Введем понятие порядка границы области D (см., например, [14]), пусть кривая $|z_2| = \Psi(|z_1|)$ (или $r_2 = \Psi(r_1(\tau))$) есть изображение образа границы ∂D области D в "абсолютной четвертьплоскости".

Будем обозначать через $[\alpha_j, \beta_j]$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ интегралы изменения параметра τ такие, что функция $\Psi(r_1(\tau))$ линейна на отрезках $[r_1(\alpha_j), r_1(\beta_j)]$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$, где $r_1(\tau) = \tau c_j^{-1}$ $(c_j > 0)$ для

$$\tau \in [\alpha_j, \beta_j] \quad (j = 1, 2, \ldots, h).$$

<u>Порядком границы</u> $|z_2| = \Psi(|z_1|)$ $(r_2 = \Psi(r_1(\tau)))$ области D называется число интегралов линейности $[r_1(\alpha_j), r_1(\beta_j)]$ функции $\Psi(r_1(\tau))$, принадлежащих отрезку $[0, r_1(1)]$.

<u>Теорема 2</u> (см. [14]). Пусть граница области имеет порядок "n" и плотность интеграла (6) функция $\Phi(\tau, t, \xi, \xi e^{-it}) \in \beta$. Тогда интеграл (4) непрерывен во всем пространстве C^2 за исключением, быть может, окружностей $B_{s,j} = \{z_1, z_2 : |z_1| = c_j^{-1}, |z_2| = 0, c_j > 0, s = -1$ или $|z_1| = 0, |z_2| = d_j^{-1}, d_j > 0, s = +1, j = 1, \ldots, n\}$, названных окружностями особенностей.

Например, для случая областей типа A (т.е. областей вида: $c|z_1| + d|z_2| < 1$, $c > 0$, $d > 0$) окружности особенностей имеют вид:

$B_{1,1} = \{|z_1| = c^{-1}, |z_2| = 0, c > 0\}$,

$B_{1,1} = \{|z_1| = 0, |z_2| = d^{-1}, d > 0\}$,

причем для областей тпи A окружности особенностей получили название остова области.

Первые наши работы (см.[12-13]) были посвящены выяснению поведения интеграла типа Темлякова в точках остова областех типа A.

Оказалось, что в точках остова области типа A интеграл типа Темлякова не имеет, вообще говоря, предела. Справедливость такого утверждения следует из того, что при подходе к точкам остова по неаналитическим гиперплоскостям $|z_2| = k(|z_1| - c^{-1})$ (или $|z_2| = k|z_1| + d^{-1}$) предельные значения интеграла типа Темлякова с плотностью определенного класса, зависят от углового коэффициента гиперплоскости "k". Следовательно, придавая "k" различные значения, что соответствует тому, что приближение к точкам остова совершается по путям, принадлежащим различным неаналитическим гиперплоскостям, мы будем получать различные предельные значения.

Однако, если пути принадлежат гиперплоскостям, содержащимся в областях аналитичности интеграла (т.е. в D, E_1, E_2), то предельные значения не зависят от углового коэффициента.

В дальнейшем изучение поведения интеграла типа Темлякова при приближении точки к точке остова из области неаналитичности было продолжено аспирантом Богановым (см.[16]), работой которого мы руководили совместно с проф. Темляковым. Им предельные значения интеграла были рассмотрены по путям принадлежащим двумерным поверхностям:

$$\sigma_{m,\ell} = \{c^2|z_1|^2 + d^2|z_2|^2 + 2cdm|z_1||z_2| - 1 = 0,\ c>0,\ d>0,$$

$$|m| \le 1,\ |\ell| < 2\pi,\ \arg z_1 - \arg z_2 = \ell,\ \arg o = \arg z_1^{(0)} - \ell,$$

если $(x_1^{(0)}, 0) \in B_{-1,1}$, и $\arg o = \arg x_2^{(0)} + l$, если $(0, x_2^{(0)}) \in B_{1,1}\}$.

При этом оказалось, что они также различны для разных поверхностей $\sigma_{m,l}$. Богановым (см.[14]) был также рассмотрен вопрос о предельных значениях интеграла в точках окружностей особенностей, а именно:

Пусть граница области D имеет порядок "n" и плотность интеграла $\Phi \in \beta$ и периодична по t. Тогда предельные значения интеграла в точках окружностей особенностей $B_{s,j}$, определяются формулами:

1° $f_{q^+}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$,

2° $f_{q^-}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) - f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$,

3° $f_{q(m,l)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) - f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$,

где $f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ интеграл типа Темлякова в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in B_{s,j}$ (причем внутренний интеграл в точках, где $|u| = 1$, понимается в смысле главного значения по Коши);

$$f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (4\pi)^{-1}\int_{\alpha_j}^{\beta_j} d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u_0, u_0 e^{-it}),$$

$$f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (2\pi)^{-1}\int_{\alpha_j}^{\beta_j} d\tau \int_{l-\varphi_m}^{l+\varphi_m} \Phi(\tau, t, u_0, u_0 e^{-it})\,dt,$$

$$\varphi_m = \arccos m .$$

Изученные свойства интеграла типа Темлякова позволили (см. [17]) рассмотреть и решить в некотором классе функций, представимых интегралом типа Темлякова 1 рода (класс T), краевые задачи для случая двух комплексных переменных: задача о скачке (предварительная краевая задача), однородная (краевая задача 1) и неоднородная с определенной правой частью (краевая задача П) задачи линейного сопряжения. Укажем на одну из них:

Краевая задача П. Пусть в C^2 задана область $\mathcal{D}$ типа A. Требуется найти функцию $f(x_1, x_2)$ класса (T), обращающуюся в бесконечно удаленных точках в заданное число B_0, поверхностные пределы которой в точках окружности особенностей $B_{-1,1}$ удовлетворяют соотношению:

$$f_{m_1,\ell_1}\left(\frac{\xi}{c}, 0\right) = G(\xi, \ell_1, \varphi_{m_1}, \ell_{m_2}) f_{m_2,\ell_2}\left(\frac{\xi}{c}, 0\right) +$$

$$+ q(\xi, \ell_1, \varphi_{m_1}, \ell_2, \varphi_{m_2}) G(\xi, \ell_1, \varphi_{m_1}, \ell_2, 0) ,$$

где q и G - заданные функции, принадлежащие определенному классу, причем

$$f_{m_i \ell_i}\left(\frac{\xi}{c}, 0\right) = \lim_{\substack{(x_1, x_2) \to \left(\frac{\xi}{c}, 0\right) \in B_{-1,1} \\ (x_1 x_2) \in \sigma_{m_i}, \ell_i}} f(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2) .$$

Решение.

Решением краевой задачи П является функция, представимая интегралом типа Темлякова 1 рода следующего вида:

$$f(x_1, x_2) = \left[B_0 + \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_{|\xi|=1} \frac{\Psi_q(t,\xi)\, d\xi}{X(\xi)(\xi - u)} \right] \times$$

$$\times \exp\left[\frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_{|\xi|=1} \frac{\Psi_G(t,\xi)}{\xi - u}\, d\xi \right] ,$$

где $\Psi_q(t,\xi)$, $\Psi_G(t,\xi)$, $X(\xi)$, $u(t, x_1, x_2)$ есть известные функции.

Литература:

[1] А.А. ТЕМЛЯКОВ: Интегральные представления функций двух комплексных переменных, ДАН СССР, 120, № 5(1958), 976-979.

[2] А.А. ТЕМЛЯКОВ: Интегральное представление функций двух комплексных переменных.Изв.АН СССР,сер.матем., 21(1957),89-92.

[3] А.А. ТЕМЛЯКОВ: Интегральное представление аналитических функций двух комплексных переменных.Уч.зап. Моск.Обл.пединститута,21(1954),7.

[4] А.А. ТЕМЛЯКОВ: Интегральные представления функций двух комплексных переменных.Уч.зап.Моск.Обл.пединститута,77(1959),3.

[5] Ю.В. ЛИННИК: Статистические задачи с мешающими параметрами.М.,из-во "Наука",1966.

[6] И.И. БАВРИН: Интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных,ДАН СССР,169, № 3(1966),495-498.

[7] И.И. БАВРИН: Интегральные представления голоморфных функций,Уч.зап.Моск.Обл.пединститута,166(1966),3-47.

[8] В.А. ФУКС: Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных,М.Физматгиз,1962.

[9] В.С. ВЛАДИМИРОВ: Методы теории функций многих комплексных переменных,М.из-во "Наука",1964.

[10] Л.А. АЙЗЕНБЕРГ: О плюригармонических функциях,Уч.зап. Моск.обл.пединститута,96(1960),39-60.

[11] Л.А. АЙЗЕНБЕРГ: Об интеграле Темлякова и граничных свойствах аналитических функций многих комплексных переменных,Уч.зап.Москов.Обл.пединститута,77 (1959),13-35.

[12] Г.Л. ЛУКАНКИН: О поведении интеграла типа Темлякова

1 рода в точках остова области $\mathcal{D}$ типа A ,
ДАН СССР,161,№ 1(1965),39-42.

[13] Г.Л. ЛУКАНКИН: О некоторых свойствах интеграла типа Темлякова 1 рода в точках остова области $\mathcal{D}$ типа A ,Уч.зап.Моск.обл.пединститута,166(1965),49-60.

[14] В.И. БОГАНОВ, Г.Л. ЛУКАНКИН: Интеграл типа Темлякова и его предельные значения,ДАН СССР,176,№ 1(1967), 16-19.

[15] Г.Л. ЛУКАНКИН: Об интегралах типа Темлякова,Уч.зап. Моск.обл.пединститута,188(1967),81-88.

[16] В.И. БОГАНОВ: О поведении интеграла типа Темлякова 1 рода в точках остова области $\mathcal{D}$ типа A ,Уч.зап. Моск.обл.пединститута 166(1966),81-86.

[17] В.И. БОГАНОВ: Интеграл типа Темлякова и некоторые краевые задачи,Уч.зап.Моск.обл.пединститута 188(1967) 57-79.

(Received May 2, 1968)