Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Norbert M. Flaisher

Новый тип задач для уравнения теплопроводности

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 9 (1968), No. 1, 71--77

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105156

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
8,1 (1968)

НОВЫЙ ТИП ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Н.М. ФЛАЙШЕР, Москва

Ниже для уравнений параболического типа изучены задачи, в которых при $t = 0$ задано значение производной по t искомой функции.

1. Пусть $\mathcal{D}$ - полуплоскость $t > 0$ а M_f - множество всех точек непрерывности $f(x)$, заданной в $(-\infty, \infty)$.

Задача А. Найти ограниченную при $t \to \infty$ и при $x \to \pm\infty$ функцию $u(x,t)$ с непрерывной в $\mathcal{D} \cup M_f$ производной u_t, удовлетворяющую в $\mathcal{D}$ уравнению

(1) $$u_{xx} - u_t = 0 ,$$

а для всех $x \in M_f$ начальному условию

(2) $$u_t(x, 0) = f(x) .$$

Теорема 1. Если $f \in L(-\infty, \infty)$, причем

(3'),(3'') $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)|\,dx < \infty ,$$

то задача А имеет единственное, с точностью до постоянного слагаемого u_0, решение ($\Phi(x)$ - интеграл ошибок)

(4) $$u(x,t) = u_0 + \int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} + \frac{1}{2}(\xi - x)\,\Phi(\frac{\xi - x}{2\sqrt{t}})] f(\xi)\,d\xi .$$

Доказательство. Вследствие (3') и нечетности $\Phi(x)$

$$u(x,t) = u_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \{-\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,[1 - e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}] +$$

$$+\frac{1}{2}x[1-\Phi(\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}})]+\frac{1}{2}\xi\Phi(\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}})\}f(\xi)d\xi=$$

$$=u_0-\int_{-\infty}^{\infty}\{\sqrt{\frac{t}{\pi}}[1-e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}]+$$

$$+\frac{1}{2}x[1-\Phi(\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}})]+\frac{1}{2}\xi\Phi(\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}})\}f(\xi)d\xi\ ,$$

значит, ввиду (3''), $u(x,t)$ ограничена при $t\to\infty$ и при $x\to\pm\infty$. В $\mathcal{D}$ $u(x,t)$ аналитична по x, входит в C^∞ по t 1) и удовлетворяет уравнению (1), а u_t непрерывна в $\mathcal{D}\cup M_f$, удовлетворяя условию (2) [1]. Для $M_f=(-\infty,\infty)$ единственность решения (4) следует из принципа максимума для u_t и ограниченности u в $\mathcal{D}$. При $M_f\subset(-\infty,\infty)$ введем $f(x;t_0)=u_t(x,t_0)$, $t_0>0$; $f(x;t_0)$ непрерывна по x в $(-\infty,\infty)$, удовлетворяя условиям (3). Поэтому задача $u_{xx}-u_t=0,\ t>t_0;\ u_t(x,t_0)=f(x;t_0)$ имеет единственное решение (с точностью до u_0)

$$u(x,t;t_0)=u_0+\int_{-\infty}^{\infty}[\sqrt{\frac{t-t_0}{\pi}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-t_0)}}+\tag{5}$$

$$+\frac{1}{2}(\xi-x)\Phi(\frac{\xi-x}{2\sqrt{t-t_0}})]f(\xi;t_0)d\xi=u(x,t-t_0)\ .$$

Но [1] почти всюду (для всех $x\in M_f$) $\lim\limits_{t_0\to 0}f(x;t_0)=f(x)\in L(-\infty,\infty)$, значит в (5) возможен подынтегральный переход к пределу при $t_0\to 0$, откуда следует единственность решения (4).

----

1) Не будучи аналитической по t. Повторное дифференцирование по x и t в (4) дает равномерно сходящиеся при $|x|\leq M$, $0<t_0\leq t\leq T$ интегралы.

Следствие: $u(x,0)\in C^1(-\infty,\infty)$, $u(x,0)\in C^2(M_f)$, причем для всех $x\in M_f$ $[u(x,0)]''=f(x)$.

Теорема 1: Если $f(x)+h(x,0)\in L(-\infty,\infty)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)+h(x,0)]dx=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|x[f(x)+h(x,0)]|dx<\infty$$

а $h(x_0,t)\in L(0,T)$ для всех $T>0$ (при любом фиксированном x_0), то задача А для уравнения $u_{xx}-u_t=h(x,t)$ имеет единственное, с точностью до u_0, решение

$$u(x,t)=u_0-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}h(\xi,\tau)d\xi+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}+\frac{1}{2}(\xi-x)\Phi\Big(\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}\Big)\Big][f(\xi)+h(\xi,0)]d\xi .$$

Как в [2 - 3] доказывается

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то при $t\to\infty$ решение $u(x,t)$ задачи А для уравнения (1) стабилизуруются к u_0, а $u_t(x,t)$ - к 0, равномерно по x на любом отрезке $a\le x\le b$.

2. Пусть $M_f\subseteq(-\infty,0]$, $M_g\subseteq[0,\infty)$ - множества всех точек непрерывности $f(x)$ $(x\le 0)$ соответственно $g(x)$ $(x\ge 0)$.

Смешанная задача. Найти ограниченную при $t\to\infty$ и при $x\to\pm\infty$, непрерывную в $\mathcal{D}\cup M_f$ функцию $u(x,t)$ с непрерывной в $\mathcal{D}\cup M_g$ производной u_t, удовлетворяющую уравнению (1) в $\mathcal{D}$ и условию

$$u(x,0)=f(x)\ \text{ для } x\in M_f;\quad u_t(x,0)=g(x)\ \text{ для } x\in M_g .$$

Теорема 3. Если $f \in L(-\infty, 0)$, $g \in L(0,\infty)$, $f'(-0)$ существует и

$$\int_0^\infty |xg(x)|dx < \infty, \quad f'(-0)+\int_0^\infty g(x)dx = 0$$

то смешанная задача имеет единственное решение

$$u(x,t)=\frac{1}{2}f(-0)[1+\Phi(\frac{x}{2\sqrt{t}})]+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}f(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^\infty\{\sqrt{\frac{t}{\pi}}[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}-e^{-\frac{x^2}{4t}}]-\frac{1}{2}x[\Phi(\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}})]-$$

$$-\frac{1}{2}\xi[1-\Phi(\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}})]\}g(\xi)d\xi .$$

3. Пусть $\mathcal{D}$ - четверть $x > 0$, $t > 0$, а $f(x)$ и $\varphi(t)$ задачи в $[0,\infty)$.

Задача В. Найти непрерывную в $\mathcal{D} \cup M_\varphi$ [1], ограниченную при $t \longrightarrow \infty$ и при $x \longrightarrow \infty$ функцию $u(x,t)$ с непрерывной в $\mathcal{D} \cup M_f$ производной u_t, удовлетворяющую уравнению (1) в $\mathcal{D}$ и условиям (2) для $x \in M_f$ и $u(0,t) = \varphi(t)$ для всех $t \in M_\varphi$.

Теорема 3. Если $0 \in M_\varphi$, $f, \varphi \in L(0,\infty)$, то задача В [2] имеет единственное решение

$$u(x,t)=\varphi(0)\Phi(\frac{x}{2\sqrt{t}})+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty\varphi(t-\frac{x^2}{4\tau^2})e^{-\tau^2}d\tau+$$

$$+\int_0^\infty\{\sqrt{\frac{t}{\pi}}[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4t}}]-$$

$$-\frac{1}{2}[(\xi+x)\Phi(\frac{\xi+x}{2\sqrt{t}})-(\xi-x)\Phi(\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}})]\}f(\xi)d\xi .$$

----

1) M_f лежит на оси x $(x > 0)$, M_φ - на оси t $(t > 0)$.

2) Задача В не связана с условием вида (3') или (3'').

Теорема 3а. Если $a \neq -2$, $x^{\frac{3a}{4}} f(x) \in L(0,\infty)$, $0 \in M_\varphi$, $\varphi(t) \in L(0,\infty)$, то задача B для уравнения $u_{xx} - x^a u_t = 0$ имеет единственное решение ($\gamma(a, x)$ - неполная гамма-функция)

$$u(x,t) = \frac{\varphi(0)}{\Gamma(\frac{1}{a+2})} \gamma\left(\frac{1}{a+2}, \frac{x^{a+2}}{(a+2)^2 t}\right) + \frac{a+2}{\Gamma(\frac{1}{a+2})} \int\limits_{\frac{x}{\sqrt[a+2]{(a+2)^2 t}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{x^{a+2}}{(a+2)^2 \tau^{a+2}}\right) e^{-\tau^{a+2}} d\tau +$$

$$+ \frac{(a+2)^{\frac{a}{a+2}}}{\Gamma(\frac{1}{a+2})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,[(a+2)m+1]} \cdot$$

$$\cdot \frac{x^{(a+2)m+1}}{(a+2)^{2m} t^{m+\frac{1}{a+2}}} \int_0^\infty \xi^{a+1} F\left(-m, -m+\frac{1}{a+2}, \frac{a+3}{a+2}, \frac{\xi^{a+2}}{x^{a+2}}\right) f(\xi)\, d\xi \, .$$

Задача С. Найти ограниченную при $t \to \infty$ и при $x \to \infty$ функцию $u(x,t)$ с непрерывными в $\mathcal{D} \cup M_f$, соответственно $\mathcal{D} \cup M_\varphi$ производными u_t, u_x, удовлетворяющую уравнению (1) в $\mathcal{D}$ и условиям (2) для $x \in M_f$ и $u_x(0,t) = \varphi(t)$ для $t \in M_\varphi$.

Теорема 4. Если $\varphi(0) = 0$, $\varphi \in L(0,T)$ для всех $T > 0$, $f \in L(0,\infty)$ и

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = 0, \quad \int_0^\infty |x f(x)|\, dx < \infty ,$$

то задача С имеет единственное, с точностью до u_0, решение

$$u(x,t) = u_0 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty \left\{ \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} - 2e^{-\frac{x^2}{4t}} + e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4t}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[(\xi+x)\Phi\left(\frac{\xi+x}{2\sqrt{t}}\right) - 2x\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + (\xi-x)\Phi\left(\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}\right) \right] \right\} f(\xi)\, d\xi \, .$$

Если $\varphi(0) \neq 0$, то у задачи С ограниченных при $t \to \infty$ и при $x \to \infty$ решений нет, но $u(x,t) - 2\varphi(0)\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ ограничено при $t \to \infty$ для фиксированного x, а $u(x,t) - \varphi(0)x$ - при $x \to \infty$ для фиксированных t.

4. Пусть $x = (x_1, \dots x_n)$, $\mathcal{D}$ - полупространство $t > 0$ в $E^{n+1}(x,t)$, $|\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + \dots + (\xi_n - x_n)^2} = r$, M_f [1] - множество всех точек непрерывности $f(x)$, заданной на $E^n(x)$, $d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n$.

Задача A_n. Найти ограниченную при $t \to \infty$ и при $|x| \to \infty$ функцию $u(x;t)$ с непрерывной в $\mathcal{D} \cup M_f$ производной u_t, удовлетворяющую в $\mathcal{D}$ уравнению $\Delta u - u_t = 0$, а для всех $x \in M_f$ - начальному условию $u_t(x;0) = f(x)$.

Теорема 1_n. Если $f \in L(G)$ для любой конечной области $G \subset E^n(x)$ и $f(x) = o(|x|^{-\alpha})$, $\alpha > 2$, при $|x| \to \infty$, то задача A_n имеет единственное, с точностью до u_0 решение, такое, что $u(x;t) \neq u_0$ для $t = 0$, причем [2]

$$u(x;t) = u_0 + \frac{(2m-1)!}{2^{2m}(m-1)!\pi^m} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2^k}{(2k-1)!!} \Big(\frac{r}{2\sqrt{t}}\Big)^{2k-1} - \Phi\Big(\frac{r}{2\sqrt{t}}\Big)\Big] \frac{f(\xi)}{r^{2m-1}}\, d\xi$$

при $n = 2m+1$ а для $n = 2(m+1)$ $(m > 0)$

$$u(x;t) = u_0 - \frac{(m-1)!}{4\pi^{m+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[1 - e^{-\frac{r^2}{4t}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \Big(\frac{r^2}{4t}\Big)^k\Big] \frac{f(\xi)}{r^{2m}}\, d\xi .$$

Теоремы 1', 1_n и 3-4 доказываются аналогично теореме 1.

Л и т е р а т у р а

[1] С.Ф. ЛИДЯЕВ: О представимости решения уравнения теплопроводности в виде интеграла Пуассона. Изв. АН СССР, серия матем., 1941, 5, 1, 263-268.

----

1) M_f лежит в гиперплоскости $t = 0$.

2) В последних двух формулах интегралы n - кратные.

----

[2] С.Д. ЭЙДЕЛЬМАН, Ф.О. ПОРПЕР: О стабилизации решения задачи Коши для параболических систем. Изв. высш.учебн.завед.Математика,1960,4(17), 210-217.

[3] В.Д. РЕПНИКОВ, С.Д. ЭЙДЕЛЬМАН: Необходимые и достаточные условия установления решения задачи Коши. Докл.АН СССР,1966,167,2,298-301.

(Received August 25, 1967)