L. I. Varklon

Исследование решений возмущенного линейнного операторного уравнения

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 8 (1967), No. 1, 13--26

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105089`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
8,1 (1967)

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Л.И. ВАРКЛОН, Уфа

1. Важной для приложений задачей является исследование существования решений вида:

$$(*) \qquad y = \lambda^{-q/p}(y_0 + \lambda^{1/p} y_1 + \lambda^{2/p} y_2 + \cdots)$$

где $p > 0,\ q \geq 0$ некоторые целые числа, для уравнений

$$(1) \qquad Fy = \sum_{\sigma=1}^{m} \lambda^{\sigma} \sum_{\gamma=1}^{k} F_{\sigma}^{\gamma} y^{\gamma} + \sum_{\sigma=0}^{m} \lambda^{\sigma} F_{\sigma}$$

где λ малый числовой параметр, $m > 0,\ K > 0$ заданные целые числа. Пусть E_1 и E_2 банаховы пространства. Неизвестная вектор-функция y отискивается в E_1 . Заданные функции $F_{\sigma} \in E_2$. F – нормально-разрешимый [2] линейный оператор, область определения которого плотна в E_1, а область значений замкнута в E_2 . F_{σ}^{γ} является γ - линейными операторами и удовлетворяют условиям работы [2].

Пусть нуль-линеалы операторов F и F^* имеют одинаковую конечную размерность $n \geq 1$, φ, ψ – матрицы собственных функций этих операторов.

Если $q \neq 0$, $y_0 \not\equiv 0$, то решение (*) называется особым. В случае $n = 1$ для исследования особых решений можно применить диаграмму Ньютона [2],[9]. Для случая $n \geq 1$ при $k \geq q$ известны некоторые условия существования особых решений для некоторых значений p, q. [1], [3], [4], [5], [7], [8].

Основным результатом настоящей работы является алгоритм определения всех допустимых значений p, q для решений (✱) уравнения (1). Этот алгоритм получен на основе изучения свойств решений последовательности реккурентных уравнений, возникающих при использовании метода неопределенных коэффициентов и, следовательно, применим когда $n \geq 1$.

2. Пусть, для простоты, $m = 1$, $k = 2$. Преобразуем уравнение (1) подстановками $\lambda = \varepsilon^{p}$, $y = u\,\varepsilon^{-q}$ и будем искать решение в виде $u = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i} u_{i,1}$, тогда $u^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i} u_{i,2}$, где $u_{i,1} \equiv u_i$, $u_{i,2} \equiv \sum_{j=0}^{i} u_j u_{i-j}$. Обозначая через τ величины $p + i - (\gamma-1)q$ и $q + ip$ получим

$$(1_1)\quad \sum_{\tau=0}^{\infty} \varepsilon^{\tau} F u_{\tau} = \sum_{\gamma=1}^{2} \sum_{\tau=p-(\gamma-1)q}^{\infty} \varepsilon^{\tau} F_1^{\gamma} u_{\tau-p+(\gamma-1)q,\gamma} + \sum_{\tau=q}^{p+q} \varepsilon^{\tau} F_{\frac{\tau-q}{p}}$$

где $F_{(\tau-q):p} \equiv F_0$ если $\tau = q$; $F_{(\tau-q):p} \equiv F_1$ если $\tau = q + p$; $F_{(\tau-q):p} \equiv 0$ при других значениях τ. Переменим в (1_1) порядок суммирования. Учитывая, что $\tau - p + (\gamma-1)q < 0$ при $\tau \leq p-1$, $\gamma = 1$ и, полагая, по определению, $u_{\nu,\gamma} \equiv 0$ при $\nu < 0$ окончательно получим следующую последовательность реккурентных уравнений:

$$(2)\quad F u_{\tau} = \sum_{\gamma=1}^{2} F_1^{\gamma} u_{\tau-p+(\gamma-1)q,\gamma} + F_{(\tau-q):p} \equiv R_{\tau} \quad (\tau = \overline{0,\infty})$$

или, полагая, $a = p - q$, $\tau = a + \eta$ получим

$$(2_1)\quad F u_{a+\eta} = \sum_{\gamma=1}^{2} F_2^{\gamma} u_{\eta-(2-\gamma)q,\gamma} + F_{(a+\eta-q):p} \equiv R_{a+\eta} \quad (\eta = \overline{-a,\infty}).$$

В общем случае для подробной записи выкладок необходимо воспользоваться полилинейными формами. Однако, для краткости, будем пользоваться обычной записью.

3. Рассмотрим случай, когда $a > 0$.
Найдем вид решений нескольких первых уравнений (2),(2_1) при любом $a \geqslant 1,\ p > q \geqslant 0$. Обозначим через c_i $(i = \ ,\infty)$ произвольные постоянные. Пусть вначале $p = 1,\ q = 0,\ a = p - q = 1$ и выполнено условие разрешимости [2] $\langle \psi^*, F_0 \rangle = 0$ для уравнения (2) при $\tau = 0$. Тогда $u_0 = c_0\varphi + \Gamma F_0$, где Γ - псевдорезольвента оператора F. Если $p > q > 0$ то при любых $a \geqslant 1,\ u_0 = c_0\varphi$. Далее для всех $\eta,\ -a < \eta < 0$ уравнение (2_1) имеет вид $F u_{a+\eta} = F_{(a+\eta-q):p}$ и, если выполнено условие разрешимости $\langle \psi^*, F_{\frac{a+\eta-q}{p}} \rangle = 0$, то
$u_{a+\eta} = c_{a+\eta}\ \varphi + \Gamma F_{\frac{a+\eta-q}{p}}$.

В этом случае $u_{a+\eta}$ не зависит от c_0. При $\eta = 0$, $q > 0,\ F u_q = F_1^2 u_0^2 + F_{\frac{a-q}{p}} \equiv R_a$. При $\eta = 0,\ q = 0,\ a = 1,\ F u_a \equiv F u_1 = F_1^2 u_0^2 + F_1^1 u_0 + F_1 \equiv R_q \equiv \tilde{u}_1$.

Если c_0 найдено из условия разрешимости $\langle \psi^*, R_a \rangle = 0$ этих уравнений, то $u_a = c_a\varphi + \Gamma\tilde{u}_a$. При $\eta = 1$, $F u_{a+1} = 2F_1^2 u_0 u_1 + F_1^1 u_{1-q} + F_{\frac{a+1-q}{p}} \equiv R_{a+1}$. Отсюда следует, что при $q = 0, q = 1, q > 1,\ R_{a+1} \equiv c_1\ \tilde{u}'_a + \tilde{u}_{a+1}$, где $\tilde{u}_a \equiv R_q,\ \tilde{u}'_a \equiv \frac{\partial}{\partial c_0}\tilde{u}_a,\ \tilde{u}_{a+1} \equiv 2F_1^2 u_0\Gamma\tilde{u}_1 + F_1^1\Gamma\tilde{u}_{1-q} + F_{(a+1-q):p}$ если учесть, что $\tilde{u}_{1-q} \equiv 0$ при $q > 1$, т.к. $1 - q < 0$. Найдем c_1 из условия разрешимости $\langle \psi^*, R_{a+1} \rangle = 0$. Тогда $u_{a+1} = c_{a+1}\varphi + c_1\ \Gamma\tilde{u}'_a + \Gamma\tilde{u}_{a+1}$. При $\eta = 2,\ F u_{q+2} = F_1^2(u_1^2 + 2u_0 u_2) + F_1^1 u_{2-q} + F_{(a+2-q):p} = R_{a+2}$. Отсюда следует, что при

$q = 0, 1, 2, q > 2, R_{a+2} \equiv c_2 \tilde{u}'_a + c_1 \tilde{u}'_{a+1} + \frac{1}{2} c_1^2 \tilde{u}'' + \tilde{u}_{a+2}$, где $\tilde{u}''_a \equiv \frac{\partial^2}{\partial c_0^2} u_a$, $\tilde{u}_{a+2} \equiv F_1^2[(\Gamma\tilde{u}_2)^2 + 2u_0 \Gamma\tilde{u}_2] + F\Gamma\tilde{u}_{2-q} + F_{(a+2-q):p}$ если учесть, что при $q \geqslant 2$, $\tilde{u}_{a+1} \equiv F_{(a+1-q):p}$ и поэтому $\tilde{u}'_{a+1} \equiv 0$.

Найдем c_2 из уравнения $\langle \psi^*, R_{a+2} \rangle = 0$, тогда

$$u_{a+2} = c_{a+2}\varphi + c_2 \Gamma\tilde{u}'_a + c_1 \Gamma\tilde{u}'_{a+1} + \frac{1}{2} c_1^2 \Gamma\tilde{u}''_a + \Gamma\tilde{u}_{a+2}.$$

Очевидно u_{a+1}, u_{a+2} являются частными случаями формулы

$$(3) \qquad u_\tau \equiv u_{a+\eta} = c_{a+\eta}\varphi + \sum_{j=1}^{\eta} c_j \Gamma\tilde{u}'_{\tau-j} + \sum_{j=2}^{\eta} \sum_{\omega \leqslant j-1} \Pi c_\omega \Gamma\tilde{u}_{\tau-j} + \Gamma\tilde{u}_\tau$$

где $\tau = a+\eta$, $\tilde{u}' \equiv \frac{\partial}{\partial c_0} \tilde{u}_{\tau-j}$, $\sum \Pi c_\omega$ некоторая конечная сумма произведений постоянных c_ω таких, что индекс ω не больше $j-1$, $\tilde{u}_{\tau-j}$ – некоторое выражение подчиненное $\tilde{u}_{\tau-j}$ а тем более $\tilde{u}_{\tau-j}$ в том смысле, что множество слагаемых, входящих в $\tilde{u}_{\tau-j}$ является подмножеством слагаемых, входящих в $\tilde{u}'_{\tau-j}$ а, следовательно, и в $\tilde{u}_{\tau-j}$ с точностью до степеней множителя c_0 в каждом слагаемом,

$$(3_1) \qquad \tilde{u}_\tau \equiv \tilde{u}_{a+\eta} \equiv F_1^2 \sum_{j=0}^{\eta} \Gamma\tilde{u}_j \, \Gamma\tilde{u}_{\eta-j} + F_1^1 \Gamma\tilde{u}_{\eta-q} + F_{(a+\eta-q):p}$$
$$(\Gamma\tilde{u}_0 \equiv u_0) \quad .$$

Формулы (3), (3_1) верны не только при $\eta > 0$ но и для всех $\eta \geqslant -a$ если положить суммы равными нулю, когда верхние пределы меньше нижних. Так как $\tilde{u}_{a+\eta} \equiv 0$ при $-a < \eta < 0$, то $\tilde{u}'_{\tau-j} \equiv 0$ при $\eta + 1 \leqslant j < \tau$, $\tau = a+\eta$.

Поэтому формулу (2) можно записать в виде:

$$(3_2)\quad u_\tau = \sum_{j=1}^{\tau} c_j \Gamma \tilde{u}_{\tau-j} + \sum_{j=2}^{\tau-1} \sum \prod_{\omega \le j-1} c_\omega \Gamma \tilde{u}_{\tau-j} + \Gamma \tilde{u}_\tau \quad ,$$

где $\Gamma \tilde{u}_o' \equiv u_o' = \varphi$. Имеет место

<u>Теорема 1</u>. Формулы (3),(3_1) дают решение уравнения (2) или (2_1) при любом $a > 0$, $\tau \geq 0$.

Доказательство основано на методе математической индукции. Для $\eta = 1, 2$ справедливость формул (3),(3_1) установлена.

Пусть формулы (3),(3_1) верны для всех $\eta \le \delta - 1$, $\tau \le a+\delta-1$. Так как $R_{a+\delta} \equiv F_1^2 \sum_{i=0}^{\delta} u_i u_{\delta-i} + F_1^1 u_{\delta-q} + F_{(a+\delta-q):p}$ зависит только от таких u_τ для которых $\tau \le \delta \le a+\delta-1$, $a \geq 1$ то, используя формулу (3_2) после преобразований, получим:

$$(3_3)\quad R_{a+\delta} \equiv \sum_{j=1}^{\delta} c_j \tilde{u}'_{a+\delta-j} + \sum_{j=2}^{\delta} \sum \prod_{\omega \le j-1} c_\omega \tilde{u}_{a+\delta-j} + \tilde{u}_{a+\delta}$$

Если c_δ найдено из условия разрешимости $\langle \psi^*, R_{a+\delta} \rangle = 0$ то $u_{a+\delta} = c_{a+\delta} \varphi + \Gamma R_{a+\delta}$ что совпадает с (3),(3_1) при $\eta = \delta$.

4. Перейдем к изучению формулы (3_1).

Пусть $q = 1, p = 2, a = p - q = 1$. Так как $u_o = c_o N_o^1$ где $N_o^1 \equiv \varphi$, то из (3_1) получим: $\tilde{u}_1 = c_o N_1 + N_1^o$, $\tilde{u}_2 = c_o^3 N_2^3 + c_o N_2^1$, где

$$N_1^2 = F_1^2 (N_o^1)^2,\ N_1^o \equiv F_o,\ N_2^3 \equiv 2F_1^2 N_o^1 \Gamma N_1^2,\ N_2^1 \equiv 2F_1^2 N_o^1 \Gamma N_1^o + F_1^1 N_o^1 \ .$$

Очевидно $u_o \equiv \tilde{u}_o, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2'$ являются частными случаями формулы

(4) $$\tilde{u}_\tau = \sum_{j=0}^{[(\tau+1):2]} c_o^{\tau+1-2j} N_\tau^{\tau+1-2j}$$

где $[(\tau+1):2]$ целая часть дроби,

(4_1) $$N_\tau^{\tau+1-2j} \equiv F_1^2 \sum \Gamma N_{\nu_1}^{\mu_1} \Gamma N_{\nu_2}^{\mu_2} + F_1^1 \Gamma N_{\tau-2}^{\tau+1-2j} + F_{\tau j} \quad (\tau = \overline{1,\infty}).$$

Здесь $\Gamma N_o^1 \equiv N_o^1 \equiv \varphi$, $N_{\tau-2}^{\tau+1} \equiv 0$ сумма берется по всем $\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2$ для которых $\nu_1 + \nu_2 = \tau - 1$, $\mu_1 + \mu_2 = \tau + 1 - 2j$ при этом $N_\nu^\mu \equiv 0$, если $\mu \neq \nu + 1 - 2i$ при некотором $i \in [0, [\frac{\nu+1}{2}]]$; $F_{\tau j} \equiv F_{\frac{\tau-1}{2}}$, если $j = \frac{\tau+1}{2}$ и $\frac{\tau+1}{2}$ является целым числом, $F_{\tau j} \equiv 0$ во всех других случаях. Доказательство формул (4),(4_1) дается методом математической индукции с использованием формулы (3_1).

<u>Теорема 2</u>. При любых $p > q \geq 0$ таких, что p и $a = p - q$ взаимно просты

(5) $$\tilde{u}_\omega = \sum_{\nu=0}^{[(\mu+1):p]} c_o^{\mu+1-\nu p} N_{2\gamma+\mu+\nu(a-q)}^{\mu+1-\nu p}$$

где числа μ, γ являются некоторым решением неопределенного уравнения $\omega = a\mu + p\gamma$ выражения $N_{2\gamma+\mu+\nu(a-q)}^{\mu+1-\nu p}$ определяются формулой (4_1) при $\tau = 2\gamma + \mu + \nu(a-q)$, $j = \gamma + \nu a$.

<u>Доказательство</u>. Формула (4) является частным случаем. Действительно уравнение $\omega = 1\mu + 2\gamma$ удовлетворяется при $\gamma = 0$, $\mu = \omega$. Для всех $p \geq 1$, $a > 0$ выражения для $\tilde{u}_1$ найденные по формулам (5) и (3_1) совпадают.

Пусть, например, $a \geq 2$, $p \geq 3$, $q = 1$. В этом случае уравнение $\omega = 1 = \mu a + \gamma p = (\mu+\gamma)a + \gamma q = (\mu+\gamma)a + \gamma \cdot 1$

удовлетворяется при $\mu + \gamma = 0,\ \gamma = 1$. Из (5) и ($3_1$) следует, что $\tilde{u}_1 = N_1^0 = F_0$. Пусть далее $a \geqslant 2$, $p \geqslant 5$, $q \geqslant 2$. Из уравнения $\omega = 1 = \mu a + \gamma p$ следует, что в этом случае $\mu \cdot \gamma < 0$. Так как при этом $p > a$ то $\gamma > 0$, $\mu < 0$. Учитывая, что $p \geqslant 5$ получим, что $\mu \leqslant -2$. Так как при этом $(\mu + 1) : p < 0$, то из (5) следует, что $\tilde{u}_1 \equiv 0$. Из (3_1) так же следует, что

$\tilde{u}_1 \equiv F_{(1-q):p} \equiv 0$ т.к. $1 - q < 0$. Допуская, что формула (5) верна для всех $\omega \leqslant a + \eta - 1$ докажем, что (5) имеет место и при $\omega = \tau = a + \eta$. Пусть $\tau = a + \eta \doteq \alpha a + \beta p$, $j = \alpha_j a + \beta_j p$, тогда $\eta - j = (\alpha - 1 - \alpha_j)a + (\beta - \beta_j)p$, $\eta - q = \alpha a + (\beta - 1)p$.

Подставляя в (3_1) правую часть формулы (5) при $\omega = j$, $\omega = \eta - j$, $\omega = \eta - q$, после преобразований получим

$$\tilde{u}_\tau = \sum_{\nu=0}^{[(\alpha+1):p]} c_0^{\alpha+1-\nu p}\left[F_1^2 \sum \Gamma N_{\nu_1}^{\mu_1} \Gamma N_{\nu_2}^{\mu_2} + F_1^1 \Gamma N_{2(\beta-1)+\alpha+\nu(a-q)}^{\alpha+1-\nu p}\right] + F_{\frac{a+\eta-q}{p}}$$

где сумма берется по всем $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ для которых $\mu_1 + \mu_2 = \alpha + 1 - \nu p$, $\nu_1 + \nu_2 = \alpha + 2\beta - 1 + \nu(a - q)$. Полагая $\xi = \alpha + 2\beta + \nu(a - q)$, $i = \beta + \nu a$, получим $\mu_1 + \mu_2 = \xi + 1 - 2i$, $\nu_1 + \nu_2 = \xi - 1$. Отметим, что если $(\alpha + 1) : p$ - целое число, то и $(a + \eta - q) : p$ целое рисло. Теорема доказана.

<u>Примечание</u>. Если $a = a_1 d$, $p = p_1 d$ где $d > 1$, a_1, p_1 взаимно просты, то решения уравнения (1) равны решениям с показателями p_1, $q_1 = p_1 - a_1$.

<u>Следствие</u>. Формулу (5) можно записать в виде

$$(5_1) \qquad \tilde{u}_\omega = \sum_{(\nu)} c_0^{\mu_\nu + 1} N_{\mu_\nu + 2\sigma_\nu}^{\mu_\nu + 1}$$

где μ_ν, γ_ν являются допустимыми решениями уравнения $\omega = \mu_\nu a + \gamma_\nu p$. Действительно, пусть $\mu - \nu p = \mu_\nu, \gamma + \nu a = \gamma_\nu$ тогда

$$\mu_\nu a + \gamma_\nu p = (\mu - \nu p)a + (\gamma + \nu a)p = \mu a + \gamma p = \omega.$$

В декартовой системе координат XOY построим точки $x = \mu_\nu + 1$, $y = \mu_\nu + 2\gamma_\nu$, каждой из которых сопоставим выражения N_y^x или числа $\bar{N}_y^x = \langle \psi^*, N_y^x \rangle$. Имеем $\omega = \mu_\nu a + \gamma_\nu p = (x-1)a + \frac{1}{2}(y - x + 1)p$. Отсюда получим уравнение "допустимой" прямой

(6) $$y = (x-1)\left(\frac{2q}{p} - 1\right) + \frac{2\omega}{p}.$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 3. Точки (x, y) соответствующие при заданных $\omega, p, q, a > 0$ выражениям N_y^x входящим в (5_1), расположены на "допустимой" прямой (6).

Следствие 1. При любом $\omega \geq 1$ и заданных $p, q, a > 0$ каждой из формул (5_1) соответствует одна и только одна прямая (6) из множества параллельных прямых.

Следствие 2. Угловые коэффициенты пучка "допустимых" прямых не меньше -1 и меньше 1. Действительно, так как $p > q \geq 0$, то $-1 \leq \frac{2q}{p} - 1 < 1$.

5. Рассмотрим алгоритм исследования решений. Пусть $\langle \psi^*, \tilde{u}_{a+\mu} \rangle \equiv 0$ для всех $\mu \leq \bar{\mu} - 1$, где $\bar{\mu} \geq 1$ некоторое целое число. Это значит, что $\tilde{N}_y^x = \langle \psi^*, N_y^x \rangle = 0$ для всех N_y^x входящих в (5_1) при всех $\omega \leq a + \bar{\mu} - 1$. Поэтому $\langle \psi^*, \tilde{u}'_{a+\mu} \rangle = 0$, $\langle \psi^*, \tilde{u}_{a+\mu} \rangle = 0$ при $\mu \leq \bar{\mu} - 1$. Отсюда следует, что условия разрешимости уравнения

(2_1) при $\eta < \bar{\mu} - 1$; в силу формулы (3_3), выполняются тождественно. Условия разрешимости уравнения (2_1) при $\eta = \bar{\mu} + \delta$, $\delta \geq 0$, в силу (3_3), принимает вид

$$(7)\ \langle \psi^*, R_{a+\bar{\mu}+\delta} \rangle \equiv \sum_{j=1}^{\delta} c_j \langle \psi^*, \tilde{u}'_{a+\bar{\mu}+\delta-j} \rangle + \sum_{j=2}^{\delta} \sum_{\omega} \prod_{\leq j-1} c_\omega \langle \psi^*, \tilde{u}_{a+\bar{\mu}+\delta-j} \rangle + \langle \psi^*, \tilde{u}_{a+\bar{\mu}+\delta} \rangle = 0$$

Отсюда следует, что c_0 находится из (7)при $\delta = 0$

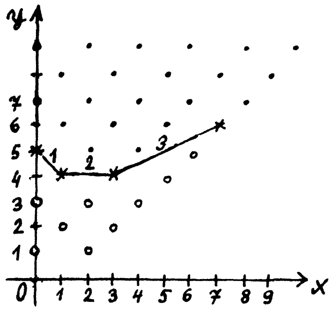
$$(7_1) \qquad \langle \psi^*, R_{a+\bar{\mu}} \rangle \equiv \langle \psi^*, \tilde{u}_{a+\bar{\mu}} \rangle = 0 \ .$$

Затем $c_1, c_2, \ldots$ последовательно определяются из (7) при $\delta = 1, 2, \ldots$ При этом получаются линейные, относительно искомых c_δ $(\delta = \overline{1, \infty})$ уравнения, в каждом из которых коэффициент при c_δ равен $\langle \psi^*, \tilde{u}'_{a+\bar{\mu}} \rangle$ т.е. не зависит от δ. Тем самым доказана "стабилизация" уравнений, в предположении существования которой доказана сходимость в работе [6].Из теоремы 3 следует, что для составления уравнения (7_1) необходимо соединить допустимой прямой по крайней мере две такие точки, в которых $\bar{N}^x_y \neq 0$. При этом $\bar{N}^x_y = 0$ во всех точках расположенных ниже этой прямой. Пусть $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $x_2 > x_1$ координаты двух "соседних" точек, взятых на построенной прямой. Из (6) следует, что $\omega = a + \bar{\mu} = \frac{1}{2}[y_1 p - (x_1 - 1)(2q - p)]$, $q = \frac{1}{2}(y_2 - y_1 + p)$ так как $x_2 - x_1 = \mu_{y_2} - \mu_{y_1} = p$.

Если p, q, c_0 вычислены, то $c_1, c_2, \ldots$ находятся применением метода неопределенных коэффициентов.

Из алгоритма следует, что имеется конечное множество условий обеспечивающих существование решений $(*)$ соответствующих наперед заданному конечному множеству пар показателей p, q таких, что $p > q \geq 0$. Множество этих множеств условий является счетным. Среди этих множеств условий существует минимальное, которое нетрудно найти.

<u>Пример 1</u>. Пусть $\overline{N}_y^x = 0$ в точках $(0;1),(0;3),(1;2),(2;1),(2;3),(3;2),(4;3),(5;4),(6;5)$. $\overline{N}_y^x \neq 0$ в точках $(0;5),(1;4),(3;4),(7;6)$.



Из чертежа следует, что для 1-ой, 2-ой, 3-ей прямой уравнение (7_1) имеет соответственно вид:

$$c_0 \widetilde{N}_4^1 + \widetilde{N}_5^0 = 0; \quad c_0 \widetilde{N}_4^1 + c_0^3 \widetilde{N}_4^3 = 0;$$

$$c_0^3 \widetilde{N}_4^3 + c_0^7 \widetilde{N}_6^7 = 0.$$

При $r > 1$ каждому из этих уравнений соответствует система. Далее $p_1 = 1-0 = 1$, $q_1 = \frac{1}{2}(4-5+1) = 0$; $p_2 = 3-1 = 2$, $q_2 = \frac{1}{2}(4-4+2) = 1$; $p_3 = 7-3 = 4$, $q_3 = \frac{1}{2}(6-4+4) = 3$. Из чертежа следует, что для этих показателей условия примера являются минимальными.

6. Для случая $a = 0$ ($p = q$) перечислим результаты, которые доказываются аналогично случаю $a > 0$.

Из (2_1) получим

$$(2_2) \qquad F u_0 = F_1^2 u_0^2$$

$$(2_3) \qquad F u_\eta = \sum_{\gamma=1}^{2} F_1^\gamma u_{\eta-(2-\gamma)q,\gamma} + F_{\frac{\eta-q}{p}} \quad (\eta \geq 1).$$

Пусть уравнение (2_2) имеет, по крайней мере, одно решение u_0 Преобразуем уравнение (2_3) к виду

$$(2_4) \qquad \Phi u_\eta \equiv (F - 2F_1^2 u_0) u_\eta = F_1^2 \sum_{i=1}^{\eta-1} u_i u_{\eta-i} + F_1^1 u_{\eta-p} + F_{(\eta-p):p}$$

Теорема 4. Если единица не является характеристическим числом оператора Φ то для каждого u_0 существует единственное особое решение, когда $p = q = 1$.

Теорема 5. Если единица является характеристическим числом оператора Φ то при любом $p \geq 1$ решение уравнения (2_4) выражается формулой:

$$(8) \qquad u_\eta = \sum_{j=2}^{\eta} c_j \Gamma \tilde{u}'_{\eta-j+1} + \sum_{j=3}^{\eta-1} \Sigma_\omega \prod_{\omega \le j-1} c_\omega \Gamma \tilde{u}_{\eta-j+1} + \Gamma \tilde{u}_\eta . \ (\eta \geq 1)$$

где

$$(8_1) \qquad \tilde{u}_\eta \equiv F_1^2 \sum_{i=1}^{\eta-1} \Gamma \tilde{u}_i \Gamma \tilde{u}_{\eta-j} + F_1^1 \Gamma \tilde{u}_{\eta-p} + F_{(\eta-p):p} \ .$$

$\tilde{u}'_{\eta-j+1} \equiv \dfrac{\partial}{\partial c_1} \tilde{u}_{\eta-j+1}$, Γ – псевдорезольвента оператора Φ, $\Sigma \Pi c_\omega$, $\check{u}_{\eta-j+1}$ имеют тот же смысл, что и в формуле (3), но подчиненность определяется с точностью до степеней множителя c_1. В формулах (8),(8_1) положено $\Gamma \tilde{u}_0 \equiv u_0$, $\Gamma \tilde{u}_1 \equiv u_1$, $\Gamma \tilde{u}'_1 \equiv u'_1 \equiv \varphi$, где φ - матрица собственных функций оператора Φ ; $\tilde{u}_j \equiv \tilde{u}'_j \equiv 0$ если $j < 0$.

Теорема 6. При любых $p = q \geq 1$

$$(9) \qquad \tilde{u}_\eta = \sum_{i=0}^{[\eta:p]} c_1^{\eta-ip} \mathcal{M}_\xi^{\xi-2i}$$

где $\xi = \eta - i(p-2)$

$$\mathcal{M}_\xi^{\xi-2i} \equiv F_1^2 \sum \Gamma \mathcal{M}_{\nu_1}^{\mu_1} \Gamma \mathcal{M}_{\nu_2}^{\mu_2} + F_1^1 \Gamma \mathcal{M}_{\xi-2}^{\xi-2i} + F_{\xi i} \ .$$

Здесь $\Gamma \mathcal{M}_0^0 \equiv u_0$, $\Gamma \mathcal{M}_1^1 \equiv \mathcal{M}_1^1 \equiv \varphi$, сумма берется по всем $\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2$ для которых $\nu_1 + \nu_2 = \xi$, $\mu_1 + \mu_2 = \xi - 2i$; $\mathcal{M}_\nu^\mu \equiv 0$, если $\mu \neq \nu - 2j$ при некотором $j + [0, [\frac{\nu}{2}]]$,

$F_{\xi i} \equiv F_{(\eta-p):p}$ если $i = \eta : p$ и $\eta : p$ является целым числом. $F_{\xi i} \equiv 0$ во всех других случаях.

В декартовой системе координат XOY построим точки $x = \xi - 2i = \eta - ip$, $y = \xi = \eta - i(p-2)$.

<u>Теорема 7</u>. Точки (x, y) соответствующие при заданных η, $p \geq 1$ выражениям M_y^x, входящих в (9), расположены на "допустимой" прямой

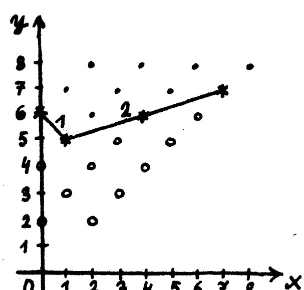
$$y = x\left(1 - \frac{2}{p}\right) + \frac{2\eta}{p}.$$

<u>Следствие</u>. При $p = 1$ угловой коэффициент равен -1, при

$$p \geq 2, \quad 0 \leq 1 - \frac{2}{p} < 1.$$

Для случая $a = 0$ справедливы все выводы пункта 5. Отметим, что при исследовании подолжений решения используется тот же алгоритм, что и для случая $a = 0$.

<u>Пример 2</u>. Пусть $M_y^x = \langle \psi^*, M_y^x \rangle = 0$ в точках $(0;2), (0;4), (1;3), (2;2), (2;4), (3;3), (3;5), (4;4), (5;5), (6;6)$. $M_y^x \neq 0$ в точках $(0;6)$, $(1;5)$, $(4;6)$, $(7;7)$.



Из чертежа следует, что c_1, определяется из уравнений $c_1 M_1^1 + M_6^0 = 0$, $c_1 M_5^1 + c_1^4 M_6^4 + c_1^7 M_7^7 = 0$ соответствующим 1-ой и 2-ой прямым. При этом $p_1 = 1 - 0 = 1$, $p_2 = 4 - 1 = 3$. Для этих показателей условия примера не являются минимальными. Минимальные условия: $M_y^x = 0$ в точках $(0;2)$, $(2;2)$, $(3;3)$.

Л и т е р а т у р а

[1] H. BLOCK: Sur la solution de certaines equations fonctionneles. Archiv for Matem., Astr., och Fysik, B.3, H.3-4, (1907), No 22.

[2] М.М. ВАЙНБЕРГ, В.А. ТРЕНОГИН: Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Успехи матем. наук, 17, № 2, (1962), 13-75.

[3] В.Ф. ВИТОВ: О возмущенном линейном интегральном уравнении. Уч. зап. Азерб. гос. у., серия физ. мат. наук, № 5, (1965).

[4] М.М. МАРКМАН: Об особых решениях возмущенного линейного интегрального уравнения. Изв. ВУЗов, матем., № 4, (1959), 104-110.

[5] П.П. РЫБИН: Особые решения возмущенного линейного интегрального уравнения. Вест. Ленингр. гос. у., № 19, (1957), 30-34.

[6] П.П. РЫБИН: О сходимости рядов, получаемых при решении нелинейных интегральных уравнений. ДАН СССР, 115, № 3, (1957), 458-461.

[7] М.М. СМИРНОВ: Об особых решениях нелинейных интегральных уравнений. Вест. Ленингр. гос. у., № 11, (1954), 3-17.

[8] А.А. ТЕМЛЯКОВ: Существование особых решений нелинейных интегральных уравнений. Из. НИИ матем. и мех. при Томск. гос. у., 1, № 1, (1935), 39-44.

[9] В.А. ТРЕНОГИН: Возмущение линейного уравнения малым

нелинейным слагаемым.ДАН СССР,140,(1961), 311-
313.

(Received June 13,1966)