Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Jurij Ivanovich Gribanov

Замечание к одной теореме М. А. Красносельского о неподвижной точке

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 7 (1966), No. 2, 139--141

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105051`

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1966

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
7, 2 (1966)

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ М.А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

Ю.И. ГРИВАНОВ, Казань

М.А. Красносельским [1] была получена теорема о неподвижной точке, представляющая собой комбинацию принципа сжатых отображений и принципа Шаудера. Эта теорема М.А. Красносельского перекрывается со следующим дополняющим ее результатом.

Теорема. Если A является линейным оператором в банаховом пространстве E, n-ая итерация которого является сжатым оператором, оператор B заданный на ограниченном замкнутом выпуклом множестве $S \subset E$, вполне непрерывен и $Ax + By \in S$ при любых элементах $x, y \in S$, то уравнение $x = Ax + Bx$ имеет по крайней мере одно решение $x \in S$.

Доказательство. Пусть x -любая фиксированная точка из S. Так как по предположению $\|A^n\| < 1$, то на основании одного известного результата (см. [2], стр. 159) уравнение

$$y = Ay + Bx \tag{1}$$

имеет и притом единственное решение y, причем, согласно последнего предположения теоремы, $y \in S$. Это решение является однозначной функцией от $x : y = Cx$. Подставляя $y = Cx$ в (1), получим справедливое при любом

$x \in S$ тождество

$$Cx = ACx + Bx . \tag{2}$$

Оператор C отображает S в себя. Предположим, что оператор C вполне непрерывен. Тогда, в силу принципа Шаудера, оператор C имеет по меньшей мере одну неподвижную точку $u \in S : u = Cu$. В этом случае, согласно тождеству (2), оказывается $u = Au + Bu$, т.е. имеет место утверждение доказываемой теоремы. Итак, для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что оператор C вполне непрерывен. Последнее осуществляется следующим способом.

Применяя к обеим частям тождества (2) линейный оператор A , получим тождество

$$ACx = A^2Cx + ABx .$$

Если воспользоваться (2), то это тождество можно записать в виде

$$Cx = A^2Cx + ABx + Bx .$$

Применяя теперь к обеим частям предыдущего тождества оператор A и используя (2), получим новое тождество

$$Cx = A^3Cx + A^2Bx + ABx + Bx .$$

Продолжая этот процесс образования новых тождеств, мы, наконец, получим справедливое при любом $x \in S$ тождество

$$Cx = A^nCx + A^{n-1}Bx + \ldots + ABx + Bx . \tag{3}$$

Заменяя в (3) x на v и вычитая полученное новое тождество из (3), будем иметь

$$Cx - Cv = A^n(Cx - Cv) + \sum_{m=0}^{n-1} A^m(Bx - Bv) .$$

Отсюда, поскольку $\| A^n \| < 1$, заключаем, что для любой пары элементов $x , v \in S$ справедлива оценка

$$\| Cx - Cv \| \leq \frac{1}{1 - \| A^n \|} \| Bx - Bv \| \sum_{m=0}^{n-1} \| A \|^m .$$

Используя эту оценку и полную непрерывность оператора B, легко убеждаемся в том, что оператор C вполне непрерывен, что и требовалось доказать.

Литература

[1] М.А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ: Два замечания о методе последовательных приближений, УМН X (1955), в.1(63), 123-127.

[2] Л.В. КАНТОРОВИЧ и Г.П. АКИЛОВ: Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

(Received November 30, 1965)