Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Václav Havel

Zur Normalprojektion von Geradenbüscheln

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 2, 145--147

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105004

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
6, 2 (1965)

ZUR NORMALPROJEKTION VON GERADENBUESCHELN

V. HAVEL, Brno

Unter einem Büschel verstehen wir in diesem Artikel das n-Tupel von Geraden des E_n, die sämtlich durch denselben Punkt gehen. Das Büschel heisst orthogonal, wenn seine Gerade paarweise orthogonal sind; es heisst normal, wenn es sich als Bild eines orthogonalen Büschels bei bestimmter Normalprojektion im E_n ergibt.

Wir interessieren uns im weiteren um die Frage nach geeigneten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Normalität des gegebenen Büschels $\mathcal{L}$ des E_n.

Für den Fall der Normalprojektion in die Hyperebene hat eine solche Frage Herr N. Tschetweruchin mit klassischen Hilfsmitteln (im Stil des bekannten Buches von P.H. Schoute über mehrdimensionale Geometrie) im Jahre 1936 in [1] behandelt; in seinen Bedingungen tritt die Halborthogonalität der zweidimensionalen Ränder von $\mathcal{L}$ ein und die Existenz der spitzen Winkel zwischen $(n-2)$-dimensionalen Rändern von $\mathcal{L}$ spielt auch eine gewisse Rolle.

Für unsere Zwecke formen wir die gestellte Frage folgenderweise äquivalent um: Es ist die geeigneten notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu finden, damit zum gegebenen n-Tupel $(e_1, \dots, e_n)$ von Einheitsvektoren geeignete reelle Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ so existieren, dass sich das n-Tupel $(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$ als Bild eines n-Tupels von paarweise orthogonalen Einheitsvektoren bei gewisser Normalprojektion im E_n ergibt.

Man kann zeigen, dass es sich da um einen Sonderfall eines Problems des Verfassers handelt (Čas.pěst.mat.83(1958), Problem 6 auf S.355).

Es sei nun das n - Tupel von Einheitsvektoren

(1) $$e_i = (e_{i1}, \ldots, e_{in}) \qquad i = 1, \ldots, n$$

gegeben. Nach einem Satz von Herrn H. Naumann ([4], S.72) hat das n - Tupel der Vektoren

(2) $$\lambda_i e_i = (\lambda_i e_{i1}, \ldots, \lambda_i e_{in}) \qquad i = 1, \ldots, n$$

für geeignete reelle Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ eine in zweiter Formulation unseres Problems erwähnte Lage dann und nur dann, wenn

(3) $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 e_{ik} e_{il} = \delta_{kl} \qquad k, l = 1, \ldots, n .$$

Setzen wir also für geeignete $x_{n+1} > 0$ neue Unbekannten $x_i = x_{n+1} \lambda_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $e_{ik} e_{il} = a_{ikl}$ $(i, k, l = 1, \ldots, n)$, so handelt es sich um die Existenz der strikt positiven Lösung des Gleichungssystems

(4) $$a_{1kl} x_1 + \cdots + a_{nkl} x_n - \delta_{kl} x_{n+1} = 0$$

für $k, l = 1, \ldots, n$,

wo wir also mit n^2 homogenen Gleichungen für $n+1$ Unbekannten zu tun haben und können damit das Kriterium aus [5], Satz 2 auf S.24, für die Existenz einer strikt positiver Lösung von (4) benutzen:

<u>Satz</u>. Haben die Geraden des gegebenen Büschels $\mathcal{B}$ im E_n die Richtungseinheitsvektoren (1), so ist $\mathcal{B}$ dann und nur dann normal, wenn die den Vektoren $(e_{1k} e_{1l}, \ldots, e_{nk} e_{nl}, -\delta_{kl})$ proportionalen Einheitsvektoren v_{kl} $(k, l = 1, \ldots, n)$ des E_{n+1} eine solche Lage haben, dass ihre Endpunkte in

keiner geschlossenen Hemisphäre der Einheitssphäre des E_{n+1} gleichzeitig liegen. (Dabei denken wir die Anfangspunkte der Vektoren im Nullpunkt unterbracht und unter der Einheitssphäre verstehen wir die Hypersphäre des E_{n+1} mit Mittelpunkt im Nullpunkte und mit Einheitshalbmesser.)

Wir bemerken, dass die sog. <u>P -Büschel</u> vom Herrn H. Hadwiger ([2], S.99) einen wichtigen Sonderfall von normalen Büscheln darstellen und somit auch die Bedingung des Satzes erfüllen müssen. Die Bedingung des Satzes kann man aber auch geometrisch mit Hilfe gewisser Eigenschaften der Ränder von $\mathfrak{L}$ beschreiben, was schon nicht mehr den Gegenstand dieses kleinen Aufsatzes bildet.

L i t e r a t u r :

[1] N.F. TSCHETWERUCHIN, Über ein axonometrisches Problem im mehrdimensionalen Raume, Mat. Sbornik 1(43),1936,S.229-242.

[2] H. HADWIGER, Über ausgezeichnete Vektorsterne und reguläre Polytope,Comm.Math.Helv.13(1940), S.90-107.

[3] H.M.S. COXETER, Regular Polytopes, London 1948.

[4] H. NAUMANN, Über Vektorsterne und Parallelprojektionen regulärer Polytope, Math.Z.67(1957), S.75-82.

[5] V. HAVEL, Sur la solution strictement positive d'un système d'équations linéaires homogènes, Čas.pěst.mat. 87(1962),S.22-30.