Petr Vopěnka

Независимость континуум - гипотезы

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 5 (1964), No. Supplement, 1--48

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104984

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
5, Supp.(1964)

НЕЗАВИСИМОСТЬ КОНТИНУУМ - ГИПОТЕЗЫ

Петр ВОПЕНКА (Petr VOPĚNKA) П р а г а

Введение

В работе доказано, что континуум-гипотеза не выводима из аксиом теории множеств Σ Бернейс-Геделя. Работа примыкает к результату Кохена (P. J. Cohen - см. [Coh 1], [Coh 2]). Этот результат можно понимать двумя способами (см. дискуссию в конце [Coh 2]):

1) или как построение метаматической модели, т.е. системы объектов (например формул понимаемых как конечные последовательности знаков), в которой определено отношение $\in$ таким образом, что в этой системе справедливы аксиомы теории множеств, включая отрицание континуум-гипотезы; при этом необходимо предполагать, что для систем метаматических (актуальных) объектов выполняются аксиомы теории множеств ;

2) или как доказательство совместности отрицания континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, построенное подобно тому, как в [G] доказана совместность континуум-гипотезы; доказательство Кохена требует, однако, добавления к аксиомам теории множеств предположения о существовании стандартной, сильно регулярной (см.[V 1]) внутренней *) (см. [Sh], [R]) модели,

----

*) Теорема Левенгейм - Сколема о существовании такой модели не говорит ничего; предположение о несуществовании такой модели совместимо с аксиомами теории множеств .

для чего достаточно предполагать, например, что существует эксорбитантное кардинальное число.

В моей работе независимость континуум-гипотезы доказана без предположения существования сильно регулярной модели, с такой-же степенью общности, с какой в [G] доказана ее совместимость. В конце концов, в работе найден эффективный метод построения по данному доказательству противоречия из аксиом теории множеств и отрицания континуум-гипотезы доказательства противоречия из одницх аксиом теории множеств.

В частности, доказана совместимость следующих гипотез:

1) $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (соотв. $\aleph_3, \aleph_4, \ldots, \aleph_{\omega_0+1}, \ldots, \aleph_{\omega_1+1}$ итп.),

2) (При допущении существования эксорбитантного кардинального числа): $\aleph_\alpha$ — эксорбитантно, $2^{\aleph_0} > \aleph_\alpha$, т.е. существует эксорбитантное кардинальное число, которое не является сильно эксорбитантным.

В работе используются без ссылок обозначения и некоторые основные утверждения работы Геделя [G]. (В конце приведен список изменений в обозначениях.)

Готовится работа о независимости аксиомы выбора.

Формализация понятия вынуждения из I главы принадлежит, в сущности, моему сотруднику Петру Гайеку (P. Hájek), которому я очень обязан за большую помощь и за ряд замечаний.

Работа была доложена в семинаре по теории множеств на Математическо-физическом факультете Карлова университета в марте-апреле 1964 г.

Глава I.

Понятие вынуждения

Целью настоящей главы является формализовать понятие вынуждения (forcing), введенное Коxеном (Cohen). Мы определим четыре отношения $Forc_{\in}$, $Forc_{\notin}$, $Forc_{\neq}$, $Forc_{=}$ и докажем, что они обладают определенными свойствами.

Пусть ω_μ — фиксированное, бесконечное, начальное ординальное число, пусть $\nu > 1$ — любое ординальное число; обозначим $\bar{\nu} = \nu - \{0\}$ и выберем еще конечное число отношений $r_0, \dots, r_k$; здесь $r_i \neq 0 \;\&\; r_i \subseteq \bar{\nu} \times \bar{\nu}$ $(i = 0, \dots, k)$. Введем сначала несколько вспомогательных определений. Легко можно доказать, что существуют функции

$$P_{11}\,\mathcal{F}n\,On,\; Y\mathcal{F}n\,On,\; I\,\mathcal{F}n\,(On - Y'0),\quad J_\beta\,((9-\{0\})\times(Y'\beta)^2),$$
$$J\,\mathcal{F}n\,On,\; K_0, K_1, K_2\,\mathcal{F}n\,(On - Y'0),\; \bar{J}\,\mathcal{F}n\,((9-\{0\})\times On^2),$$
$$H\,\mathcal{F}n\,(6\times On),\; H_1, H_2\,\mathcal{F}n\,(On - 6)$$

удовлетворяющие следующим определяющим требованиям:

1) $\langle \beta\alpha \rangle \in P_{11} \equiv (\exists f)[f\ Isom_{S,E}\ (8\times\alpha^2, \beta)]$,

2) $Y'0 = \omega_\mu + \nu$, $Y'(\alpha+1) = Y'\alpha + P'_{11}\ Y'\alpha$,

для предельного α $Y'\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} Y'\beta$

3) $\alpha = I'\beta \equiv Y'\alpha \leq \beta < Y'(\alpha+1)$,

4) $J_\beta\ Isom_{S,E}((9-\{0\})\times(Y'\beta)^2, (Y'\beta+1-((Y'\beta)+1)))$,

5) $\langle \gamma\, i\, \alpha\, \beta\, \delta \rangle \in J \equiv \gamma = J'_\delta \langle i\alpha\beta \rangle$,

6) $\gamma \in On - (Y''On \cup (\omega_\mu + \nu)) \longrightarrow \gamma = J'\langle K'_0\gamma, K'_1\gamma, K'_2\gamma, I'\gamma \rangle$

$\gamma \in Y''On \rightarrow K'_0\gamma = K'_1\gamma = K'_2\gamma = 0$,

7) $\bar{J}'\langle i\alpha\beta \rangle = J'\langle i, \alpha, \beta, max(I'\alpha, I'\beta)+1 \rangle$,

8) $H\ Isom_{Le,E}(6\times On, On - 6)$

$\alpha = H'\langle H'_1\alpha, H'_2\alpha \rangle$.

Далее еще определим

9) $\alpha \ll \beta \equiv I'\alpha < I'\beta . \vee . \alpha < Y'0 \,\&\, \beta \geq Y'0 . \vee .$

$. \vee . \alpha \leqq \omega_\mu \,\&\, \alpha < \beta < Y'0$,

10) $\gamma = \alpha \dot{-} \beta \equiv \alpha = \beta + \gamma$,

11) $N_\in = H''(\{0,4\} \times On)$,

$N_\notin = H''(\{1,5\} \times On)$,

$N_\neq = H''(\{2\} \times On)$,

$N_= = H''(\{3\} \times On)$.

Определение 1 (p является условием)

$$C(p) \equiv (\exists s)[s \subseteq \bar{\nu} \,\&\, Fin\, s \,\&\, p\, \mathfrak{Fn}\, s \,\&$$

$$\& (y)(\exists \gamma, a)(y \in \mathcal{W}(p). \rightarrow . \gamma \in \omega_\mu \,\&$$

$$\& a \subseteq \gamma \,\&\, y = \langle \gamma a \rangle)]$$

$p, \bar{p}, \bar{\bar{p}}, \ldots$ будут переменными для условий)

Определение 2 ($\bar{p}$ сильнее p).

$$\bar{p} \succ p \equiv \mathfrak{D}(\bar{p}) \supseteq \mathfrak{D}(p) \,\&\, (\alpha)(\alpha \in \mathfrak{D})(p) \rightarrow$$

$$\rightarrow P_1'\bar{p}'\alpha \geq P_1'p'\alpha \,\&\, P_2'\bar{p}'\alpha \cap P_1'p'\alpha = P_2'p'\alpha) .$$

Посредством трансфинитной индукции определим функцию $F\sigma$. С целью сокращения записи при определении значения $F\sigma'\lambda$ с помощью значений $F\sigma'\delta$, $\delta < \lambda$ мы введем следующие обозначения (знак $\square$ будет обозначать любой из символов $\in$, $\notin$, $\neq$, $=$):

12) $p\, F\sigma[\lambda \,\square] \alpha \beta \equiv \langle p \alpha \beta \rangle \in U F\sigma''(\lambda \cap N_\square)$

$p\, F\sigma[\lambda \{\,\}] \gamma \alpha \beta \equiv (\exists \delta_1 \delta_2)(p\, F\sigma[\lambda =] \delta_1 \alpha \,\&$

$\& p\, F\sigma[\lambda =] \delta_2 \beta \,\&\, p\, F\sigma[\lambda =] \gamma \bar{J}'\langle 1 \delta_1 \delta_2 \rangle)$

$p\, F\sigma[\lambda \langle\,\rangle] \gamma \alpha \beta \equiv (\exists \delta_1 \delta_2)(p\, F\sigma[\lambda \{\,\}] \delta_1 \alpha \alpha \,\&$

$\& p\, F\sigma[\lambda \{\,\}] \delta_2 \alpha \beta \,\&\, p\, F\sigma[\lambda \{\,\}] \gamma \delta_1 \delta_2)$.

Определение 3 (Функция $F\sigma$)

$\langle p \alpha \beta \rangle \in F\sigma' 0 \equiv$

1) $\alpha, \beta \leqq \omega_\mu \,\&\, \alpha \in \beta$

$.V.\ 2)\quad \omega_\mu < \beta < Y'0 \ \&\ \alpha \in P'_2\, p'(\beta \dot{-} \omega_\mu)$

$\qquad \langle p\, \alpha\, \beta \rangle \in Fo'1 \equiv$

$\quad 1)\quad \alpha < \omega_\mu < \beta < Y'0 \ \&\ \alpha \in (P'_1\, p'(\beta \dot{-} \omega_\mu) - P'_2\, p'(\beta \dot{-} \omega_\mu))$

$.V.\ 2)\quad \neg(\alpha < \omega_\mu < \beta) \ \&\ \alpha, \beta < Y'0 \ \&\ \langle p\, \alpha\, \beta \rangle \notin Fo'0$

$\quad \langle p\, \alpha\, \beta \rangle \in Fo'2 \equiv (\exists \gamma)(\langle p\, \gamma\, \alpha \rangle \in Fo'0 \ \&\ \langle p\, \gamma\, \beta \rangle \in Fo'1$

$\qquad\qquad .V.\ \langle p\, \gamma\, \alpha \rangle \in Fo'1 \ \&\ \langle p\, \gamma\, \beta \rangle \in Fo'0)$

$\quad \langle p\, \alpha\, \beta \rangle \in Fo'3 \equiv \alpha = \beta \ \ \&\ \ \alpha, \beta < Y'0$

$\quad Fo'4 = Fo'0, \quad Fo'5 = Fo'1\ .$

Для $\lambda \geq 6$ **мы определим (обозначим** $K'_i \beta = \beta_i$ **,** $i = 0, 1, 2$ **)**

$\langle p\, \alpha\, \beta \rangle \in F'\lambda \equiv Y' H'_2 \lambda \leq max(\alpha, \beta) < Y'((H'_2 \lambda) + 1) \ \&$

$0)\quad H'_1 \lambda = 0 \ \&\ \alpha << \beta \ \&$

$\quad 00)\quad \beta_0 = 0 \ \&\ (2 \leqq H'_2 \lambda \leqq k+2 \ \&\ (\exists \delta_1 \delta_2)(p\, Fo[\lambda \langle\ \rangle] \alpha\, \delta_1\, \delta_2 \ \&$

$\qquad\qquad \&\ \langle \delta_1 \dot{-} \omega_\mu,\ \delta_2 \dot{-} \omega_\mu \rangle \in r_{H'_2 \lambda \dot{-} 2}\ .V.$

$\qquad\qquad .V.\ \neg(2 \leqq H'_2 \lambda \leqq k+2) \ \&\ \alpha << \beta$

$.V.\ 01)\quad \beta_0 = 1 \ \&\ p\, Fo[\lambda =] \alpha\, \beta_1 \vee p\, Fo[\lambda =] \alpha\, \beta_2$

$.V.\ 02)\quad \beta_0 = 2 \ \&\ (\exists \delta_1 \delta_2)(p\, Fo[\lambda \langle\ \rangle] \alpha\, \delta_1\, \delta_2 \ \&$

$\qquad\qquad \&\ p\, Fo[\lambda \in] \delta_1\, \delta_2 \ \&\ p\, Fo[\lambda \in] \alpha\, \beta_1$

$.V.\ 03)\quad \beta_0 = 3 \ \&\ p\, Fo[\lambda \in] \alpha\, \beta_1 \ \&\ p\, Fo[\lambda \notin] \alpha\, \beta_2$

$.V.\ 04)\quad \beta_0 = 4 \ \&\ (\exists \delta_1 \delta_2)[p\, Fo[\lambda \langle\ \rangle] \delta_2\, \delta_1\, \alpha \ \&$

$\qquad\qquad \&\ p\, Fo[\lambda \in] \delta_2\, \beta_1\,]$

$.V.\ 05)\quad \beta_0 = 5 \ \&\ (\exists \delta_1 \delta_2)[p\, Fo[\lambda \in] \delta_1\, \beta_1 \ \&$

$\qquad\qquad \&\ p\, Fo[\lambda \in] \delta_2\, \beta_2 \ \&\ p\, Fo[\lambda \langle\ \rangle] \alpha\, \delta_1\, \delta_2$

$.V.\ 06)\quad \beta_0 = 6 \ \&\ (\exists \delta_1 \delta_2 \delta_3)[p\, Fo[\lambda \langle\ \rangle] \delta_3\, \delta_1\, \delta_2 \ \&$

$\qquad\qquad \&\ p\, Fo[\lambda \in] \delta_3\, \beta_1 \ \&\ p\, Fo[\lambda \langle\ \rangle] \alpha\, \delta_2\, \delta_1$

$.V.\ 07)\quad .V.\quad 08)$ **аналогично.**

$:V:\ 1)\quad H'_1 \lambda = 1 \ \&\ \alpha << \beta \ \&\ (\bar{p})(\bar{p} \vdash p \to \neg\, \bar{p}\, Fo[\lambda \in] \alpha\, \beta)$

$:V:\ 2)\quad H'_1 \lambda = 2 \ \&\ (\exists \gamma)(p\, Fo[\lambda \in] \gamma\, \alpha \ \&\ p\, Fo[\lambda \notin] \gamma\, \beta\ .V.$

$\qquad\qquad p\, Fo[\lambda \in] \gamma\, \beta \ \&\ p\, Fo[\lambda \notin] \gamma\, \alpha)$

$:V:\ 3)\quad H'_1 \lambda = 3 \ \&\ (\bar{p})(\bar{p} \vdash p \to \neg\, \bar{p}\, Fo[\lambda \neq] \alpha\, \beta$

$:\vee:$ 4) $H_1'\lambda = 4 \,\&\, \alpha \nless \beta \,\&\, (\exists\delta)[\delta << \beta \,\&\, p\, Fo[\lambda =]\alpha\delta \,\&$
$p\, Fo[\lambda\in]\delta\beta]$

$:\vee:$ 5) $H_1'\lambda = 5 \,\&\, \alpha \nless \beta \,\&\, (\bar{p})(\bar{p} \vdash p \to \neg\, \bar{p}\, Fo[\lambda\in]\alpha\beta)$.

Определение 4. $Forc_\square = \cup Fo''N_\square$,

$p\, Forc_\square \alpha\beta \equiv \langle p\alpha\beta\rangle \in Forc_\square$.

Замечание. Если $C(p), \alpha \in \mathfrak{D}(p)$, $p'\alpha = \langle \gamma a\rangle$, где $\gamma < \omega_\mu$ и $a \subseteq \gamma$, то мы понимаем $\beta \in a$ как условие " $\beta \in F_*'(\omega_\mu + \alpha)$" , $\beta \in \gamma - a$ как условие " $\beta \notin F_*'(\omega_\mu + \alpha)$" .

При этом можно представить себе F_* как модифицированную функцию Геделя, которая для $\alpha \leq \omega_\mu$ принимает значения $F_*'\alpha = \alpha$, для $\omega_\mu < \alpha < Y'0$ значениями ее являются какие-то присоединенные (неконструктивные) множества (отметим, что условие не определяет эти множества точно; оно лишь говорит, что некоторые элементы множества ω_μ принадлежат $F_*'\alpha$ и какие-то другие нет), $F_*'Y'2, \dots, F_*'Y'(2+k)$ - это некоторые отношения между присоединенными множествами, для $\alpha \neq 2$ $F_*'Y'\alpha$ является множеством, содержащим все $F_*'\beta$ для $\beta < Y'_\alpha$, в остальных случаях, для $\alpha > Y'0$ имеет место $F_*'\alpha = \mathcal{F}_{K_0'\alpha}(F_*'K_1'\alpha, F_*'K_2'\alpha)$. (Относительно операций $\mathcal{F}_i$ см. [V 1]).

Условие наложенное на множества $F_*'\alpha$, $\omega_\mu < \alpha < Y'0$ <u>вынуждает</u> какие-то свойства множеств $F_*'\beta$, $\beta \geq Y'0$; если например каким-то условием вынуждается "$3 \in F_*'(\omega_\mu + 1)$" и " $7 \in F_*'(\omega_\mu + 2)$", то это-же условие вынуждает и "$\langle 3 7\rangle \in F_*'(\omega_\mu + 1) \times F_*'(\omega_\mu + 2)$" . Функция Fo описывает соотношения вынужденные условиями; $p\, Forc_\square \alpha\beta$ мы читаем следующим образом: " p вынуждает пару $\langle\alpha\beta\rangle$ ", или " p вынуждает высказывание >> $F_*'\alpha \square F_*'\beta$ << ".

Если вынуждение определено уже для $max(\alpha,\beta) < Y'\gamma$, вынуждает данное условие высказывание " $F'_* \alpha \in F'_* \beta$ " для $\alpha < Y'\gamma \leq \beta < Y'(\gamma+1)$ в соответствии с тем, какая операция используется для получения $F'_* \beta$ из $F'_* K'_1 \beta$, $F'_* K'_2 \beta$ (см. пункт 0) определения 3). Далее наше условие вынуждает высказывание об отношениях $\notin$, $\neq$, $=$, следуя определению 3, пунктам 1,2,3, и по этому вынуждает высказывания " $F'_* \alpha \in$ $\in F'_* \beta$ " и " $F'_* \alpha \notin F'_* \beta$ " для $\alpha, \beta < Y'(\gamma+1)$, $\alpha \not\ll \beta$ — см. пункты 4,5 определения 3.

Это замечание служит, конечно, только для наглядного представления, в дальнейшем символ F_* вообще использоваться не будет. Особо отметим, что определение 3 не является метаматическим определением; функция $F\sigma$ — нормальный (в смысле $[G]$)класс.

<u>Лемма 1</u>. $Forc_\in \cap Forc_\notin = 0$,

$Forc_= \cap Forc_\neq = 0$.

<u>Доказательство</u>: Утверждение тривиально для $\langle p \alpha \beta \rangle$, если $\alpha, \beta < Y'0$.

Пусть $\lambda_0 = max(\alpha,\beta) \geq Y'0$, $p\ Forc_\in\ \alpha\beta \ \&\ \alpha \ll \beta$, соотв. $p\ Forc_\in\ \alpha\beta \ \&\ \alpha \not\ll \beta$, соотв. $p\ Forc_\neq\ \alpha\beta$. Тогда $\langle p \alpha \beta \rangle \in F'_0 H' \langle i, I'\lambda_0 \rangle$, где $i = 0$, соотв. $i = 2$, соотв. $i = 4$. Следовательно $\langle p \alpha \beta \rangle \notin$ $\notin F\sigma' H' \langle i+1, I'\lambda_0 \rangle$, значит, $\neg p\ Forc_\notin\ \alpha\beta$, соотв. $\neg p\ Forc_=\ \alpha\beta$.

<u>Лемма 2</u>. $\langle p \alpha \beta \rangle \in Forc_\square \ \&\ \bar{p} > p \rightarrow \langle \bar{p} \alpha \beta \rangle \in Forc_\square$.

<u>Доказательство</u>: Для $max(\alpha,\beta) < Y'0$ утверждение очевидно; пусть λ — наименьшее число такое, что $(\exists p \alpha \beta \bar{p})(\bar{p} \vdash p \ \&\ \langle p \alpha \beta \rangle \in F\sigma' \lambda \ \&\ \langle \bar{p} \alpha \beta \rangle \notin F\sigma' \lambda)$.
Очевидно $H'_1 \lambda \neq 1, 3, 5$. Если $H'_1 \lambda = 0 \ \&\ K'_0 \beta = 0 \ \&$ $\&\ \neg(2 \leq H'_2 \lambda \leq k+2)$ то $\langle \bar{p} \alpha \beta \rangle \in F\sigma' \lambda$ для любого $\bar{p}$, как только $\alpha \ll \beta$. В оставшихся случаях имеет место $\langle p \alpha \beta \rangle \in F\sigma' \lambda \equiv (\exists \delta_1 \ldots \exists \delta_n)(p\ F\sigma[\lambda \square_1]\pi_1 \ \&\ldots\&\ p\ F\sigma[\lambda \square_k]\pi_k, \dagger$ где π_i — это пары или тройки образованные из чисел α, β_1, β_2, $\delta_1, \ldots, \delta_n$, $\square_i$ — это некоторый из знаков $\in, \notin, =$ и P — некоторый предикат независящий от функции $F\sigma$. По индукционному предложению имеет место

$$\bar{p}\ F\sigma[\lambda \square_1]\pi_1 \ \&\ \ldots\ \&\ \bar{p}\ F\sigma[\lambda \square_k]\pi_k,$$

т.е. $\langle \bar{p} \alpha \beta \rangle \in F\sigma' \lambda$. Во всех случаях мы получили $\dagger \ \&\ P(\delta_1, \ldots, \delta_k)$

противоречие; лемма доказана.

Лемма 3. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ & $\max(\alpha_1, \alpha_2) < Y'0 \rightarrow$
$\rightarrow (p)(\exists \bar{p})[\bar{p} \vdash p$ & $\bar{p}\ Forc_{\neq}\ \alpha_1 \alpha_2]$.

Доказательство: Пусть $\omega_\mu < \alpha_1, \alpha_2 < Y'0$, обозначим $\alpha_i^\circ = \alpha_i - \omega_\mu$, $P_1'\,p'\alpha_i^\circ = \gamma_i$, $P_2'\,p'\alpha_i^\circ = a_i$ $(i = 1, 2)$. Положим $\gamma_0 = \max(\gamma_1, \gamma_2)$, $\mathcal{D}(\bar{p}) = \mathcal{D}(p) \cup \{\alpha_1^\circ \alpha_2^\circ\}$, $\bar{p}'\alpha_1^\circ = \langle \gamma_0 + 1, a_1 \rangle$, $\bar{p}'\alpha_2^\circ = \langle \gamma_0 + 1, a_2 \cup \{\gamma_0\}$, $\bar{p}'\alpha = p'\alpha$ в остальных случаях.

Пусть $\alpha < \omega_\mu < \alpha_2$; α_2°, γ_2, a_2 пусть имеют выше указанное значение. Обозначим $\gamma_0 = \max(\alpha_1, \gamma_2)$ и определим $\mathcal{D}(\bar{p}) = \mathcal{D}(p) \cup \{\alpha_2^\circ\}$, $\bar{p}'\alpha_2^\circ = \langle \gamma_0 + 1, a_2 \cup \{\gamma_0\} \rangle$, $\bar{p}'\alpha = p'\alpha$ в остальных случаях. В обоих случаях имеет место $\bar{p}\ Forc_{\in}\ \gamma_0 \alpha_2$, $\bar{p}\ Forc_{\notin}\ \gamma_0 \alpha_1$, т.е. $\bar{p}\ Forc_{\neq}\ \alpha_1 \alpha_2$.

Для $\alpha_1, \alpha_2 \leq \omega_\mu \vee \overline{\omega_\mu = \alpha_1 < \alpha_2}$ утверждение очевидно.

Лемма 4. $(\alpha, \beta)(p)(\exists \bar{p})[\bar{p} \vdash p . \& . \bar{p}\ Forc_{\in}\ \alpha\beta \vee \bar{p}\ Forc_{\notin}\ \alpha\beta]$

То же самое для $=$, $\neq$.

Доказательство: Для $\max(\alpha, \beta) < Y'0$ утверждение очевидно (ср. доказательство леммы 3). Из определения функции Fo мы получим, если $\max(\alpha, \beta) \geq Y'0$:
$(\bar{p})(\bar{p} \vdash p \rightarrow \neg\, \bar{p}\ Forc_{\in}\ \alpha\beta) \rightarrow p\ Forc_{\notin}\ \alpha\beta$;

То же самое для $\neq$, $=$ вместо $\in$, $\notin$.

Замечание. Легко видеть, что
$p\ Forc_{=}\ \alpha\alpha$, $p\ Forc_{=}\ \alpha\beta \rightarrow p\ Forc_{=}\ \beta\alpha$.

Будем писать вместо $(\exists \bar{p})(\bar{p} \vdash p$ & $\bar{p}\ Forc_{\square}\ \alpha\beta)$ коротко $p\ Forc_{\square}^{\circ}\ \alpha\beta$.

Лемма 5. а) $p\ Forc_{\in}\ \alpha\beta \rightarrow$
$\rightarrow (\exists \alpha_0)(\alpha_0 \ll \beta$ & $p\ Forc_{=}\ \alpha_0 \alpha$ & $p\ Forc_{\in}\ \alpha_0 \beta)$

б) $p\ Forc_{\neq}\ \alpha\beta \rightarrow (\exists \delta)(\delta \ll \max(\alpha, \beta) : \& : p\ Forc_{\in}\ \delta\alpha$ &
& $p\ Forc_{\notin}\ \delta\beta . \vee . p\ Forc_{\in}\ \delta\beta$ & $p\ Forc_{\notin}\ \delta\alpha)$

(Получается тривиально из определения функции Fo.)

Лемма 6.

а) $p\ Forc_= \alpha\beta \ \&\ p\ Forc_= \beta\gamma . \to . p\ Forc_= \alpha\gamma$,

б) $\neg(p\ Forc_= \alpha\beta \ \&\ p\ Forc_\in \alpha\gamma \ \&\ p\ Forc_\notin \beta\gamma)$,

в) $\neg(p\ Forc_= \alpha\beta \ \&\ p\ Forc_\in \gamma\alpha \ \&\ p\ Forc_\notin \gamma\beta)$.

Следствие:

г) $p\ Forc_= \alpha\beta \ \&\ p\ Forc_\in \alpha\gamma . \to . p\ Forc^{\circ}_\in \beta\gamma$,

д) $p\ Forc_= \alpha\beta \ \&\ p\ Forc_\in \gamma\alpha . \to . p\ Forc^{\circ}_\in \gamma\beta$,

е) $p\ Forc_= \alpha\beta \ \&\ p\ Forc_\notin \alpha\gamma . \to . p\ Forc_\notin \beta\gamma$,

ж) $p\ Forc_= \alpha\beta \ \&\ p\ Forc_\notin \gamma\alpha . \to . p\ Forc_\notin \gamma\beta$.

Доказательство: Докажем сначала, что из леммы 6 вытекают утверждения следствия. По определению функции Fo мы имеем $p\ Forc_\notin \beta\gamma \equiv \neg\, p\ Forc^{\circ}_\in \beta\gamma$. Из этого с помощью леммы 2 и пунктов б), в) леммы 6 мы получаем утверждения г) – ж).

Для доказательства леммы 6 мы можем предполагать, что $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$. Если это не так, утверждение очевидно. Легко проверяется, что утверждение верно тоже в случае $max(\alpha, \beta, \gamma) < Y'0$. Определим $ind(\alpha\beta\gamma)$ (индекс) как упорядоченную тройку из чисел α, β, γ, с наименьшего по найбольшее, например $ind(7, \omega_0, 0) = \langle 0\ 7\ \omega_0 \rangle$. Лемму 6 мы будем доказывать индукцией по индексу. Пусть для α, β, γ некоторое из утверждений леммы 6 не верно, пусть для всех троек, индекс которых по отношению к лексикографическому упорядочению меньше $ind(\alpha, \beta, \gamma)$, лемма верна.

а) Допустим, что $p\ Forc_= \alpha\beta$, $p\ Forc_= \beta\gamma$, $\alpha < \gamma$ (если это не так, поменяем α, γ ролями). Если $\neg\, p\ Forc_= \alpha\gamma$, то $p\ Forc^{\circ}_{\neq} \alpha\gamma$, т.е.
$(\exists \bar{p})(\exists \eta)(\bar{p} \vdash p \ \&\ \eta \ll \gamma \ \&\ \bar{p}\ Forc_\square \eta\gamma \ \&\ \bar{p}\ Forc_\phi \eta\alpha)$
(здесь $\square$ означает один из символов $\in, \notin$; ϕ означа-

ет оставшийся из них). Имеет место $\bar{p}\ Forc^{\circ}_{\Box}\ \eta\beta \vee \bar{p}\ Forc^{\circ}_{\Phi}\ \eta\beta$; если $\bar{p}\ Forc^{\circ}_{\Phi}\ \eta\beta$, то $\bar{p}\ Forc^{\circ}_{\neq}\ \beta\gamma$, что однако противоречит предположению $p\ Forc_{=}\ \beta\gamma$ (см. лемма 2). Предположим теперь $\bar{p}\ Forc^{\circ}_{\Box}\ \eta\beta$. Если $\eta << max(\alpha,\beta)$, то сразу получается противоречие с $p\ Forc_{=}\ \alpha\beta$, если $\eta \not<< max(\alpha,\beta)$, то $max(\alpha,\beta) < \gamma$; пусть например $\Box$ означает $\in$. Тогда

$(\exists\delta)(\exists\bar{\bar{p}})(\delta<<\beta \,\&\, \bar{\bar{p}} \vdash \bar{p} \,\&\, \bar{\bar{p}}\ Forc_{=}\ \delta\eta \,\&\, \bar{\bar{p}}\ Forc_{\in}\ \delta\beta)$;

по индукционному предположению мы имеем $\bar{\bar{p}}\ Forc_{=}\ \delta\eta\ \&$ $\&\ \bar{p}\ Forc_{\notin}\ \eta\alpha. \rightarrow . \bar{\bar{p}}\ Forc_{\notin}\ \delta\alpha$, так как $ind(\delta\eta\alpha) < ind(\alpha\beta\gamma)$; следовательно $p\ Forc^{\circ}_{\neq}\ \alpha\beta$, что однако противоречит $p\ Forc_{=}\ \alpha\beta$ (см. леммы 1,2). Аналогично, если $\Box$ означает символ $\notin$, поменяем в последнем рассуждении α и β ролями; $ind(\delta\eta\beta) < ind(\alpha\beta\gamma)$.

б) Докажем б) для $\alpha << \gamma \,\&\, \beta << \gamma$. В случае $K'_0\gamma = 0$ $\&\ I'\gamma \neq 2,\ldots,k+2$ утверждение очевидно. В оставшихся случаях имеет место

$(\exists\delta_1,\ldots,\delta_n)(p\ F\sigma[\lambda\Box_1]\ \pi_{1\alpha},\ldots \&\ldots\&\ p\ F\sigma[\lambda\Box_k]\pi_{k\alpha},\ldots \&\ P(\delta_1\ldots\delta_n))$

при этом выражения $\pi_{i\alpha},\ldots$ содержат $\alpha, K'_1\gamma, K'_2\gamma, \delta_1\ldots\delta_n$, но эти все числа $<< \gamma$ ($\Box_i$ — некоторый из символов $\in$, $\notin$, $=$; предикат P не зависит от функции $F\sigma$); так как $\beta << \gamma$, мы по индукционному предположению и по лемме 2 заключаем, что

$(\exists\bar{p})(\bar{p} \vdash p \,\&\, \bar{p}\ F\sigma[\lambda\Box_1]\pi_{1\beta},\ldots\&\ldots\&\ \bar{p}\ F\sigma[\lambda\Box_k]\pi_{k\beta},\ldots)$,

следовательно, $p\ Forc^{\circ}_{\in}\ \beta\gamma$, что противоречит $p\ Forc_{\notin}\ \beta\gamma$.

Если $\alpha << \gamma \,\&\, \beta \not<< \gamma$, то $p\ Forc_{=}\ \alpha\beta\ \&$ $\&\ p\ Forc_{\in}\ \alpha\beta. \rightarrow . p\ Forc_{\in}\beta\gamma$ непосредственно по определению функции $F\sigma$. Если $\alpha \not<< \gamma$, мы рассуждаем следующим образом: $(\exists\alpha_0)[\alpha_0 << \gamma \,\&\, p\ Forc_{=}\ \alpha_0\alpha \,\&\, p\ Forc_{\in}\ \alpha_0\gamma]$.

По индукционному предположению

$$p \; Forc_= \alpha_0 \alpha \;\&\; p \; Forc_= \alpha\beta . \rightarrow . \; p \; Forc_= \alpha_0 \beta \; (ind(\alpha_0 \alpha \beta) < ind(\alpha\beta\gamma)), \; p \; Forc_= \alpha_0 \beta \;\&\; p \; Forc_\in \alpha_0 \gamma . \rightarrow . \; p \; Forc^\circ_\in \beta\gamma \; (ind(\alpha_0 \beta\gamma) < ind(\alpha\beta\gamma)) \;,$$

что является противоречием.

в) Предположим сначала $\gamma << \alpha$, но тогда $p \; Forc_\in \gamma \alpha \;\&\; p \; Forc_\notin \gamma\beta \rightarrow p \; Forc_\neq \alpha\beta$, что приводит к противоречию. Если $\gamma \not<< \alpha$, то $(\exists \gamma_0)[\gamma_0 << \alpha \;\&\; p \; Forc_= \gamma_0 \gamma \;\&\; p \; Forc_\in \gamma_0 \alpha]$. По индукционному предположению

$$p \; Forc_\in \gamma_0 \alpha \;\&\; p \; Forc_= \alpha\beta \rightarrow (\exists \bar{p})(\bar{p} \geq p \;\&\; \bar{p} \; Forc_\in \gamma_0 \beta) \; (ind(\alpha\beta\gamma_0) < ind(\alpha\beta\gamma)), \; \bar{p} \; Forc_\in \gamma_0 \beta \;\&\; \bar{p} \; Forc_= \gamma_0 \gamma \rightarrow \bar{p} \; Forc^\circ_\in \gamma\beta \; (ind(\gamma_0 \gamma\beta) < ind(\alpha\beta\gamma)),$$

следовательно, $p \; Forc^\circ_\in \gamma\beta$, что однако противоречит $p \; Forc_\notin \gamma\beta$ (см. лемму 2).

Глава II .

Построение ультрафильтра $\dot{\mathcal{J}}$.

§ 1. Топологические пространства.

В дальнейшем множество c предполагается бесконечным.

Определение 1. Множество $t \subseteq \mathcal{P}(c)$ называется топологией на бесконечном множестве c , если выполнены следующие условия:

(1) $(u)[u \subseteq t \rightarrow \bigcup u \in t]$

(2) $(u)(v)[u, v \in t \rightarrow u \cap v \in t]$

(3) $(x)(y)(\exists u)(\exists v)[x, y \in c \;\&\; x \neq y \rightarrow u, v \in t \;\&\; u \cap v = 0 \;\&\; x \in u \;\&\; y \in v]$.

Упорядоченная пара $\langle c, t \rangle$ называется топологическим пространством, элементы c точками пространства и элементы множества t открытыми множествами. Если u — открытое множество, то множество $c - u$ называется замкнутым.

Лемма 1. Пусть имеется топология t на множестве c. Тогда пустое множество и множество c открыты и замкнуты одновременно.

Множество $\{x\}$, где $x \in c$ является замкнутым.

Определение 2. Пусть имеется топология t на c. Будем говорить, что множество c' $(c' \subseteq c)$ плотно в $\langle c, t \rangle$, если

$$(u)[u \in t \;\&\; u \neq 0 \rightarrow u \cap c' \neq 0].$$

Лемма 2. Пересечение двух открытых плотных в $\langle c, t \rangle$ множеств открыто и плотно в $\langle c, t \rangle$.

Определение 3. Пусть имеется топология t на c. Будем говорить, что b вписано в t, если

(1) $b \subseteq t$,

(2) $(u)(\exists v)[u \in t \;\&\; u \neq 0 \rightarrow v \in b \;\&\; v \neq 0 \;\&\; v \subseteq u]$.

Лемма 3. Пусть имеется топология t на c и пусть b вписано в t. Тогда $\cup b$ является открытым и плотным в $\langle c, t \rangle$ множеством.

Лемма 4. Пусть имеется топология t на c и пусть b вписано в t. Множество $c' \subseteq c$ плотно в $\langle c, t \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$(u)(\exists x)[u \neq 0 \;\&\; u \in b \rightarrow x \in c' \;\&\; x \in u].$$

Лемма 5. Пусть имеется топология t на c, $a \subseteq t$, где $\cup a$ плотное в $\langle c, t \rangle$ множество и пусть b вписано в t.

Тогда существует b' удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $b' \subseteq b$

(2) $\cup b'$ плотно в $\langle c, t \rangle$,

(3) $(u)(v)[u, v \in b' \;\&\; u \neq v \rightarrow u \cap v = 0]$,

(4) $(u)(\exists v)[u \in b' \rightarrow v \in a \;\&\; u \subseteq v]$.

<u>Доказательство</u>: С помощью трансфинитной индукции построим множества u_α. Считаем, что множество b вполне упорядочено. В качестве u_0 мы выбираем первый отличный от 0 элемент множества b такой, что существует $v \in a$, для которого $u_0 \subseteq v$. Поскольку b вписано в t и $a \neq 0$, такое u_0 всегда найдется.

Допустим, что для всех $\alpha < \gamma$ уже построены множества u_α такие, что $u_\alpha \in b$, $u_\alpha \cap u_\beta = 0$ для $\alpha \neq \beta$ и для всякого u_α существует $v \in a$ такое, что $u_\alpha \subseteq v$.

В качестве u_γ мы возьмем первое непустое множество из b такое, что $u_\gamma \cap \bigcup_{\alpha \in \gamma} u_\alpha = 0$, для которого существует $v \in a$ так, что $u_\gamma \subseteq v$. Если такое непустое множество не найдется, мы положим $u_\gamma = 0$. Так как любое $u_\alpha \in b$, существует γ такое, что для всех $\delta \geq \gamma$ $u_\delta = 0$.
Обозначим символом b' множество всех u_α для $\alpha < \gamma$. Очевидно $b' \subseteq b$ и если $u_\alpha, u_\beta \in b'$, $u_\alpha \neq u_\beta$, то $u_\alpha \cap u_\beta = 0$. Пусть $\alpha < \gamma$. Тогда существует $v \in a$, для которого $u_\alpha \subseteq v$.

Остается доказать, что $\bigcup b'$ плотное в $\langle c, t \rangle$ множество. Допустим противное. Тогда существует $v \in t$ такое, что $\bigcup b' \cap v = 0$, $v \neq 0$. Так как $\bigcup a$ плотно в $\langle c, t \rangle$, существует $v_1 \in a$ такое, что $v \cap v_1 \neq 0$. Очевидно $v \cap v_1 \in t$. Значит, существует $u \in b$ такое, что $u \neq 0$ и $u \subseteq v \cap v_1$.
Следовательно, $u \cap \bigcup_{\alpha \in \gamma} u_\alpha = 0$, $u \subseteq v_1$, но это означает, что $u_\gamma \neq 0$ и мы получаем противоречие.

__Определение 4__. Пусть имеется топология t на c. Будем говорить, что множество $c' \subseteq c$ нигде не плотно в $\langle c, t \rangle$, если существует открытое плотное в $\langle c, t \rangle$ множество v такое, что

$$c' \cap v = 0 .$$

__Лемма 6__. Пусть t — топология на c, $a \subseteq t$, $\bigcup a$ плотно в $\langle c, t \rangle$ и пусть элементами множества a являются попарно непересекающиеся открытые множества. Если $c' \subseteq c$ такое, что для любого $u \in a$ множество $u \cap c'$ нигде не плотно, то c' тоже нигде не плотно.

__Доказательство__: Полагая $u \in a' \equiv u \in t \;\&\; u \cap c' = 0$, мы можем утверждать, что $\bigcup a'$ является открытым множеством и $c' \cap \bigcup a' = 0$. Сейчас достаточно доказать, что $\bigcup a'$ является плотным.

Пусть $u \in t$ такое, что $u \cap \bigcup a' = a, u \neq 0$. Так как $\bigcup a$ плотно в $\langle c, t \rangle$ существует $v \in a$ такое, что $v \neq 0$ и $v \cap u \neq 0$. Поскольку множество $v \cap c'$ нигде не плотно, существует открытое множество плотное v_1 такое, что $v \cap c' \cap v_1 = 0$. Из того, что v_1 плотно в $\langle c, t \rangle$ вытекает, что $v \cap u \cap v_1 \neq 0$. Это означает, что $u \cap v \cap v_1$ открыто и $c' \cap (v \cap u \cap v_1) = 0$. Значит $v \cap u \cap v_1 \in a'$. Однако $v \cap u \cap v_1 \subseteq u$, следовательно $v \cap u \cap v_1 \cap \bigcup a' = 0$, что дает противоречие.

__Лемма 7__. Пусть t — топология на c, $u \in t$, u бесконечно. Тогда

1) $\langle u, t \cap P(u) \rangle$ является топологическим пространством,
2) если b вписано в t, то $b \cap P(u)$ вписано в $t \cap P(u)$,
3) если u' нигде не плотно в $\langle u, t \cap P(u) \rangle$, то также u'

нигде не плотно в $\langle c, t \rangle$.

<u>Определение 5</u>. Пусть s — произвольное непустое множество. Символом c^{s} мы будем обозначать множество всех функций определенных на s, значения которых находятся в c.

Формально

$$f \in c^{s} \equiv f\, Fn\, s \,\&\, W(f) \subseteq c .$$

<u>Определение 6</u>. Пусть t — топология на c, b вписано в t, s — произвольное непустое множество; для любого конечного подмножества $s' \subseteq s$ и для любой функции $h\ Fn\ s'$ принимающей значения в b мы полагаем

$$f \in B(s', h) \equiv f \in c^{s} \& (x)(x \in s' \rightarrow f'x \in h'x).$$

Далее определим множество $\bar{b}$ посредством соотношения

$$v \in \bar{b} \equiv (\exists s', h)(s' \subseteq s \,\&\, Fin\, s' \,\&\, h\, Fn\, s' \,\&$$
$$\& W(h) \subseteq b \,\&\, v = B(s', h)).$$

<u>Определение 7</u>. Пусть t — топология на c, s — произвольное непустое множество.

Полагаем

$$u \in t^{s} \equiv (\exists y)(y \subseteq \bar{t} \,\&\, u = \cup y).$$

<u>Лемма 8</u>. $\langle c^{s}, t^{s} \rangle$ является топологическим пространством.

<u>Замечание</u>. Пространство $\langle c^{s}, t^{s} \rangle$ называется топологическим произведением пространства $\langle c, t \rangle$.

<u>Лемма 9</u>. Пусть t — топология на c, s — любое непустое множество, пусть b вписано в t. Тогда $\bar{b}$ вписано в t^{s}.

<u>Определение 8</u>. Отношение $\leq$ на множестве c называется отношением упорядочения, если имеет место

(1) $\quad (x)(x \leq x)$,

(2) $(x)(y)[x \le y \;\&\; y \le x \to y = x]$,

(3) $(x)(y)(z)[x \le y \;\&\; y \le z \to x \le z]$,

(4) $(x)(y)[x \le y \vee y \le x]$.

Сокращенно будем писать

$$x < y \quad \text{вместо} \quad x \le y \;\&\; x \ne y .$$

<u>Определение 9</u>. Пусть $\le$ является отношением упорядочения множества c , пусть $x_1, x_2 \in c$.

Определяем

$$x \in (x_1\, x_2) \equiv x_1 < x < x_2 \;,$$

$$x \in (x_1 -) \equiv x_1 < x \;,$$

$$x \in (- x_2) \equiv x < x_2 \;.$$

Любое из множеств $(x_1\, x_2)$, $(x_1 -)$, $(- x_1)$ мы будем называть интервалом на множестве c .

Символом $I(c)$ обозначим множество всех интервалов на c .

<u>Лемма 10</u>. Пусть $\le$ — отношение упорядочения множества c . Полагая

$$x \in t \equiv (\exists y)[y \subseteq I(c) \;\&\; x = \bigcup y] ,$$

мы получаем топологию на множестве c .

Обозначение. Топология t из предыдущей леммы называется топологией порожденной отношением упорядочения $\le$.

Очевидно всякий интервал является в этой топологии открытым множеством.

2. <u>Пространство</u> $c_\mu^{\bar{\nu}}$.

<u>Определение 1</u>. Пусть ω_μ — бесконечное кардинальное число. Обозначим символом c_μ множество $P(\omega_\mu)$. Для любых $x, y \in c_\mu$ положим $x < y \equiv \min((x-y) \cup (y-x)) \in y - x$ (при этом $\min 0 = 0$); далее $x \le y \equiv x = y \vee x < y$.

<u>Лемма 1</u>. Отношение $\le$ является отношением упорядочения множества c_μ .

<u>Лемма 2</u>. Если $x \subseteq y$, то $x \leq y$.

<u>Замечание</u>. Символ t_μ в дальнейшем будет использоваться исключительно в качестве обозначения для топологии на множестве c_μ порожденной отношением упорядочения $\leq$ из определения 1 .

<u>Определение 2</u>. Точки $x, y \in c_\mu$ мы будем называть сопряженными, если

$$(\exists \alpha > 0)(\alpha < \omega_\mu \,\&\, x \subseteq \alpha \,\&\, y = x \cup (\omega_\mu - \alpha)).$$

<u>Лемма 3</u>. Если x, y сопряжены, то $x < y$ и $(x\ y) \neq 0$.

<u>Доказательство</u>: Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго отметим, что можно найти $\alpha \in \omega_\mu$ такое, что $y - x = \omega_\mu - \alpha$. Выберем $\beta \in \omega_\mu - \alpha$ и положим $x_1 = x \cup \{\beta\}$. В этом случае

$$x \subset x_1 \subset y \ , \quad \text{следовательно } x_1 \in (x\ y).$$

<u>Лемма 4</u>. Если x, y сопряжены, то $z \in (x\ y) \equiv x \subset z \subset y$.

<u>Доказательство</u>: Из $x \subset z \subset y$ следует $z \in (x\ y)$. Пусть наоборот $z \in (x\ y)$. Так как $y = x \cup (\omega_\mu - \alpha)$, $x \subseteq \alpha$, не верно ни $\min((z - x) \cup (x - z)) \in \alpha$, ни $\min((z - y) \cup (y - z)) \in \alpha$. Отсюда $z \cap \alpha = x$, следовательно $x \subseteq z \subseteq y$. Легко видеть, что равенство в последнем соотношении невозможно.

<u>Лемма 5</u>. Для того, чтобы множество $(x_1\ x_2)$, где $x_1 < x_2$, было пустым, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\alpha \in \omega_\mu$ такое, что

$$x_1 \cap \alpha = x_2 \cap \alpha, \quad \alpha \in x_2, \quad \alpha \notin x_1,$$

$$x_2 \cap (\omega_\mu - (\alpha + 1)) = 0, \quad x_1 \cap (\omega_\mu - (\alpha + 1)) = (\omega_\mu - (\alpha + 1)).$$

Множество $(x -)$ (соотв. $(- y)$) пусто тогда и только тогда, когда $x = \omega_\mu$ (соотв. $y = 0$).

<u>Доказательство</u>: Пусть сначала x_1, x_2 удовлетворяют условию леммы. Тогда $x_1 < x_2$; допустим, что $x_1 \leq x \leq x_2$.

Это означает, что $x \cap \alpha = x_1 \cap \alpha$. Если $\alpha \in x$, то $x \cap (\omega_\mu - (\alpha+1)) = 0$ (поскольку $x \leq x_2$), и, следовательно, $x = x_2$. Если $\alpha \notin x$, то из $x_1 \leq x$ вытекает $(\omega_\mu - (\alpha+1)) \subseteq x$, значит, $x = x_1$. Достаточность условия доказана.

Пусть сейчас $(x_1\, x_2) = 0$, пусть $\alpha = \min((x_1 - x_2) \cup \cup (x_2 - x_1))$. Тогда $x_1 \cap \alpha = x_2 \cap \alpha$, $\alpha \in x_2$, $\alpha \notin x_1$. Допустим, что существует $\beta \in x_2 \cap (\omega_\mu - (\alpha+1))$. Пусть $x = x_2 - \{\beta\}$. Но тогда $x_1 < x < x_2$ и мы получаем противоречие. Допустим наконец, что существует $\beta \in \in (\omega_\mu - (\alpha+1)) - x_1$. В этом случае положим $x = x_1 \cup \{\beta\}$ и опять получаем противоречие, так как $x_1 < x < x_2$.

Оставшиеся утверждения вытекают из того, что ω_μ является наибольшим и 0 наименьшим элементом множества c_μ по отношению к упорядочению $\leq$.

<u>Определение 3</u>. Символом b мы будем обозначать множество всех интервалов $(x_1\, x_2)$ таких, что x_1, x_2 сопряженные точки.

<u>Лемма 6</u>. Множество b вписано в топологию t_μ.

<u>Доказательство</u>: Очевидно $b \subseteq t_\mu$. Пусть $z \in t_\mu$, $z \neq 0$. Так как z является объединением интервалов, существуют x_1, x_2 такие, что $0 \neq (x_1\, x_2) \subseteq z$. Если z содержит интервал $(x\, -) \neq 0$ (соотв. $(-\, x) \neq 0$), оно содержит также интервал $(x\, \omega_\mu)$ (соотв. $(0\, x)$).

Докажем, что существует $u \in b$ (следовательно $u \neq 0$) такое, что $u \subseteq (x_1\, x_2)$. Пусть $\alpha = \min((x_1 - x_2) \cup (x_2 - x_1))$. Тогда $\alpha \in x_2$, $\alpha \notin x_1$, $\alpha \cap x_1 = \alpha \cap x_2$. Так как $(x_1\, x_2) \neq 0$, существует $\beta = \min((x_2 \cap (\omega_\mu - (\alpha+1))) \cup \cup ((\omega_\mu - (\alpha+1)) - x_1))$. Пусть сначала $\beta \in x_2 \cap \cap (\omega_\mu - (\alpha+1))$. В этом случае положим $x = (x_1 \cap \alpha) \cup \{\alpha\}$,

$y=(x_2 \cap \alpha)\cup\{\alpha\}\cup(\omega_\mu-(\beta+1))$. x, y очевидно сопряжены, при этом $x_1 < x$ и $y < x_2$. Пусть сейчас $\beta \in$ $\in (\omega_\mu - (\alpha+1)) - x_1$. В этом случае полагаем

$$x = (x_1 \cap \beta)\cup\{\beta\}, \quad y=(x_1\cap\beta)\cup(\omega_\mu-\beta).$$

x, y опять сопряжены и $x_1 < x$, $y < x_2$.

В дальнейшем предполагается фиксированным некоторое ординальное число $\nu > 1$; обозначим $\bar\nu = \nu - \{0\}$. Пространство $\langle c_\mu^{\bar\nu}, t_\mu^{\bar\nu}\rangle$, значение которого первостепенной важности для наших рассуждений, обозначим коротко $\langle c, t\rangle$. Множество $\bar{b}$ вписано в топологию t (см. определение 6 и лемму 9 § 1).

<u>Определение 4</u>. Пусть j_0 — множество всех подмножеств множества c, содержащих открытое, плотное в c подмножество c.

<u>Лемма 7</u>. j_0 является фильтром на множестве c.

<u>Определение 5</u>. Обозначим символом j некоторый ультрафильтр на c, содержащий j_0.

<u>Лемма 8</u>. Ультрафильтр j нетривиален.

<u>Доказательство</u>: Пусть $\{x\}\in j$. $\{x\}$ не является открытым в c и, следовательно, $c-\{x\}$ — открытое, плотное в c множество. Значит $c-\{x\}\in j_0 \subseteq j$, $\{x\}\cap(c-\{x\})=0\in j$, что является противоречием.

<u>Определение 6</u>. Функции $f_1, f_2 \in c$ мы будем называть сопряженными, если существует конечное множество $s \subseteq \bar\nu$ такое, что $(x)(x\in\bar\nu - s \to f_1'x = 0 \;\&\; f_2'x=\omega_\mu)$ и для всякого $x \in s$ $f_1'x$, $f_2'x$ являются сопряженными точками в c_μ.

<u>Определение 7</u>. Пусть $f_1, f_2 \in c$. Полагаем

$$f\in(f_1 f_2) \equiv (x\in\bar\nu)(f_1'x \neq 0 \vee f_2'x\neq\omega_\mu . \to . f_1'x < f'x < f_2'x).$$

Замечание. Если f_1, f_2 сопряжены, то $(f_1 f_2) \neq 0$; множество $\bar{b}$ состоит из всех множеств (f_1, f_2) таких, что f_1, f_2 сопряжены.

3. Расширение понятия вынуждения.

Определение 1. Пусть $f \in C$; $\alpha, \beta \in On$. Мы будем писать $f\, Forc_{\square}\, \alpha\, \beta$, если существуют конечное множество $s \subseteq \bar{\nu}$ и ординальное число $\gamma \in \omega_{\mu}$ такие, что $\{\langle \gamma, f'x \cap \gamma \rangle\}_{x \in s}\, Forc_{\square}\, \alpha\, \beta$.

Лемма 1. Необходимым и достаточным условием для $f\, Forc_{\square}\, \alpha\, \beta$ является следующее условие: существуют конечное множество $s \subseteq \bar{\nu}$ и для любого $x \in s$ ординальное число γ_x такие, что $\{\langle \gamma_x, f'x \cap \gamma_x \rangle\}_{x \in s}\, Forc_{\square}\, \alpha\, \beta$.

Доказательство: Условие очевидно необходимо. Для доказательства его достаточности предположим, что оно выполнено и положим $\gamma = \max\limits_{x \in s} \gamma_x$. Ясно, что $\gamma \in \omega_{\mu}$. Так как условие $\{\langle \gamma, f'x \cap \gamma \rangle\}_{x \in s}$ сильнее чем $\{\langle \gamma_x, f'x \cap \gamma_x \rangle\}_{x \in s}$ имеет место $f\, Forc_{\square}\, \alpha\, \beta$.

Определение 2. Пусть $f_1, f_2 \in C$ — сопряженные функции. Обозначим символом $p(f_1, f_2)$ (или $p((f_1, f_2))$) условие $\{\langle \gamma_x, f_1' x \rangle\}_{x \in s}$, где $x \in s . \equiv . f_1' x \neq 0 \vee f_2' x \neq \omega_{\mu}$ и $\gamma_x = \omega_{\mu} - (f_2' x - f_1' x)$.

Лемма 2. Если $f\, Forc_{\square}\, \alpha\, \beta$, то существуют сопряженные функции f_1, f_2 такие, что $f_1, f_2 \in C$ и $p(f_1, f_2)\, Forc_{\square}\, \alpha\, \beta$.

Доказательство: Пусть s и γ имеют значение указанное в определении 1. Определим далее $f_1' x = 0$, $f_2' x = \omega_{\mu}$ для $x \in \bar{\nu} - s$, $f_1' x = f'x \cap \gamma$, $f_2' x = f'x \cup (\omega_{\mu} - \gamma)$ для $x \in s$. Пара f_1, f_2 удовлетворяет утверждение леммы.

Лемма 3. Пусть f_1, f_2 сопряжены. Тогда имеет место $p(f_1 f_2)\,Forc_\Box \alpha\beta \;\&\; f \in (f_1 f_2) \to f\,Forc_\Box \alpha\beta$.

Доказательство: Положим $x \in s \equiv f'x \neq 0$, $\gamma_x = \omega_\mu - (f_2'x - f_1'x)$ для $x \in s$. Для $x \in s$ мы имеем $f_1'x \subseteq f'x \subseteq f_2'x$ т.е. $f'x \cap \gamma_x = f_1'x$, следовательно $\{\langle \gamma_x, f'x \cap \gamma_x\rangle\}_{x\in s} = p(f_1 f_2)$ и по лемме 1 $f\,Forc_\Box \alpha\beta$.

Определение 3. $u \in b_{\Box\alpha\beta} \equiv (\exists f_1, f_2)[f_1, f_2 \in c,\ f_1, f_2$ сопряжены $\&\ u = (f_1 f_2)\ \&\ p(f_1 f_2)\,Forc_\Box \alpha\beta]$.

$m_{\Box\alpha\beta} = \bigcup b_{\Box\alpha\beta}$.

Замечание. Очевидно $b_{\Box\alpha\beta} \subseteq \bar{b}$; $m_{\Box\alpha\beta}$ — открытое множество в c и $f \in m_{\Box\alpha\beta} \to f\,Forc_\Box \alpha\beta$.

Лемма 4. Множество $b_{\in\alpha\beta} \cup b_{\notin\alpha\beta}$ (соотв. $b_{=\alpha\beta} \cup b_{\neq\alpha\beta}$) вписано в t.

Доказательство: Достаточно доказать, что для любого множества $(f_1 f_2) \in \bar{b}$ существует $(g_1 g_2) \in b_{\Box\alpha\beta}$ такое, что $(g_1 g_2) \subseteq (f_1 f_2)$. Пусть $(f_1 f_2) \in b$. Тогда существуют конечное непустое множество $s \subseteq \bar{\nu}$ и числа $\gamma_x \in \omega_\mu$ для любого $x \in s$ такие, что $f_2'x = f_1'x \cup (\omega_\mu - \gamma_x)$ для $x \in s$, $f_2'x = \omega_\mu$ для $x \in \bar{\nu} - s$. $\{\langle \gamma_x, f_1'x\rangle\}_{x\in s}$ является условием. Но тогда существует более сильное условие $\{\langle \gamma_x', a_x\rangle\}_{x\in s'}\,Forc_\in \alpha\beta$ или $\{\langle \gamma_x', a_x\rangle\}_{x\in s'}\,Forc_\notin \alpha\beta$. Это означает, что если мы положим $g_1'x = a_x$ для $x \in s'$, $g_1'x = 0$ для $x \in \bar{\nu} - s'$, $g_2'x = a_x \cup (\omega_\mu - \gamma_x')$ для $x \in s'$, $g_2'x = \omega_\mu$ для $x \in \bar{\nu} - s'$, то g_1, g_2 сопряжены и, очевидно, или $(g_1 g_2) \in b_{\in\alpha\beta}$ или $(g_1 g_2) \in b_{\notin\alpha\beta}$. При этом $(g_1 g_2) \subseteq (f_1 f_2)$.

Замечание. Множество $m_{\in\alpha\beta} \cup m_{\notin\alpha\beta}$ (соотв. $m_{=\alpha\beta} \cup m_{\neq\alpha\beta}$) плотно в c ,следовательно оно принадлежит $\dot{j}_0$.

<u>Лемма 5</u>. Если $\alpha, \beta \in On$, то $m_{\in\alpha\beta} \cap m_{\notin\alpha\beta} = 0$ и $m_{=\alpha\beta} \cap m_{\neq\alpha\beta} = 0$.

<u>Доказательство</u>: Пусть $f \in m_{\in\alpha\beta} \cap m_{\notin\alpha\beta}$. Тогда существуют $(f_1 f_2), (g_1 g_2)$ такие, что $f \in (f_1 f_2)$, $f \in$ $\in (g_1 g_2)$, $(f_1 f_2) \in b_{\in\alpha\beta}$, $(g_1 g_2) \in b_{\notin\alpha\beta}$. Так как $(f_1 f_2) \cap (g_1 g_2) \neq 0$, существует $(h_1 h_2)$ такое, что $(h_1 h_2) \subseteq (f_1 f_2) \cap (g_1 g_2)$, $(h_1 h_2) \in b_{\in\alpha\beta} \cup b_{\notin\alpha\beta}$. Однако это является противоречием, поскольку $p(h_1 h_2) \vdash p(f_1 f_2)$, $p(h_1 h_2) \vdash p(g_1 g_2)$, и следовательно $p(h_1 h_2) Forc_{\in} \alpha\beta$ & & $p(h_1 h_2) Forc_{\notin} \alpha\beta$, что противоречит утверждению леммы 1 главы I.

Глава III.

<u>Модель</u> ∇.

В дальнейшем буквы $\varphi, \psi, \xi, \ldots$ будут использоваться в качестве обозначения функционалов, т.е. функций, областью определения которых является некоторое множество функций.

<u>Определение 1</u>. Обозначим символом $\bar{K}$ класс всех функционалов φ, для которых имеет место

(1) $W(\varphi) \subseteq On$;

(2) $\mathfrak{D}(\varphi)$ — подмножество c, плотное в c;

(3) для любого $\alpha \in On$ множество всех $f \in c$, для которых $\varphi(f) = \alpha$, открыто в c.

Обозначение. Пусть $\varphi \in \bar{K}$, $\alpha \in On$. Символом $\varphi^{-1}(\alpha)$ мы будем обозначать множество всех $f \in c$, для которых $\varphi(f) = \alpha$, т.е. $\varphi^{-1}(\alpha) = (Conv\,\varphi)''\{\alpha\}$.

<u>Замечание</u>. Очевидно $\mathfrak{D}(\varphi) = \bigcup_{\alpha \in W(\varphi)} \varphi^{-1}(\alpha)$.

множества $\varphi^{-1}(\alpha)$ открыты и попарно не пересекаются, следовательно, $\mathcal{D}(\varphi)$ -открытое, плотное в c множество. Так как $\bar{b}$ вписано в t, в каждом $\varphi^{-1}(\alpha) \neq 0$ найдется непустое подмножество из $\bar{b}$.

Лемма 1. Если $k \in \omega_0$, $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, $\psi_1, \dots, \psi_k \in \bar{K}$, то существует множество $q^{\varphi_1, \dots, \varphi_k}_{\psi_1, \dots, \psi_k} = q$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $(z)(z \in q \to (\exists f_1, f_2)(f_1, f_2 \in c \,\&\, z = (f_1 f_2) \,\&\, f_1,$ f_2 сопряжены $))$;

(2) $(z_1, z_2)(z_1, z_2 \in q \,\&\, z_1 \neq z_2 \to z_1 \cap z_2 = 0)$;

(3) $\bigcup q$ — плотное в c множество;

(4) каждая из функций φ_i, ψ_i на любом множестве $z \in q$ является постоянной; обозначим ее значение на множестве z символом φ_i^z, соотв. ψ_i^z;

(5) $(i = 1, \dots, k)\,[p(z)\,\mathrm{Forc}_\in\, \varphi_i^z \psi_i^z \vee p(z)\,\mathrm{Forc}_\notin\, \varphi_i^z \psi_i^z . \& .$
$. \& .\, p(z)\,\mathrm{Forc}_=\, \varphi_i^z \psi_i^z \vee p(z)\,\mathrm{Forc}_\neq\, \varphi_i^z \psi_i^z]$

для любого $z \in q$.

Доказательство: Положим $u \in w \equiv (i = 1, \dots, k)(\exists \gamma_i \delta_i)$ $(\gamma_i \in W(\varphi_i) \,\&\, \delta_i \in W(\psi_i) \,\&\, u = \bigcap_{i=1}^{k} \varphi_i^{-1}(\gamma_i) \cap \bigcap_{i=1}^{k} \psi_i^{-1}(\delta_i))$.
Для любого $u \in w$ единственным образом определяются числа γ_i^u, δ_i^u, такие, что $u = \bigcap_{i=1}^{k} \varphi_i^{-1}(\gamma_i^u) \cap \bigcap_{i=1}^{k} \psi_i^{-1}(\delta_i^u))$. w — это множество попарно непересекающихся открытых подмножеств c и $\bigcup w = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{D}(\varphi_i) \cap \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{D}(\psi_i)$, следовательно, $\bigcup w$ является открытым, плотным в c множеством. Для любого $u \in w$ мы определим по индукции множества v_j^u $(j = 0, \dots, 2k)$ следующим образом: $v_0^u = \{u\}$, для $i = 1, \dots, k$ множество v_{2i-1}^u строится следуя лемме 5 главы II § 1, в которой мы полагаем u вместо c, $t \cap \cap \mathcal{P}(u)$ вместо t, $(b_{\in \gamma_i^u \delta_i^u} \cup b_{\notin \gamma_i^u \delta_i^u}) \cap \mathcal{P}(u)$ вместо b, v_{2i-2}^u вместо a; аналогично множество

v_{2i}^{u} строится по этой-же лемме, только мы должны наложить $(b_{=\gamma_i^u \delta_i^u} \cup b_{\neq \gamma_i^u \delta_i^u}) \cap \mathcal{P}(u)$ вместо b, v_{2i-1}^{u} вместо a (см. лемму 7 главы II § 1 и лемму 3 главы II § 3). Для $j = 0, \ldots, 2k$ множество $\cup v_j^u$ открытое и плотное в u.

Из лемм 5,6,7 главы II § 1 вытекает, что множество $q = \bigcup_{u \in w} v_{2k}^{u}$ удовлетворяет условиям доказываемой леммы.

Замечание. Буква z в дальнейшем будет обозначать множество $(f_1\ f_2)$ где f_1, f_2 — сопряженные функции. Мы будем писать $q\,(\varphi, \ldots, \psi)$ вместо $q_{\psi_1, \ldots, \psi_n}^{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}$; здесь φ_i , ψ_i — всевозможные упорядоченные пары функций $\varphi, \ldots, \psi$.

Определение 2. Пусть $\varphi, \psi \in \overline{K}$. Положим $\varphi \,\square^* \psi \equiv \{f \mid f\ Forc_{\square}\ \varphi(f),\ \psi(f)\} \in j$.

Лемма 2. Для любых $\varphi, \psi \in \overline{K}$ имеет место или $\varphi \in^* \psi$, или $\varphi \notin^* \psi$ (соотв. или $\varphi =^* \psi$, или $\varphi \neq^* \psi$), при этом оба случаы взаимно исключаются.

Доказательство: Пусть $q = q_{\psi}^{\varphi}$ является системой множеств из леммы 1 . Если $f \in z \in q$, то имеет место или $f\ Forc_{\in}\ \varphi(f),\ \psi(f)$, или $f\ Forc_{\notin}\ \varphi(f),\ \psi(f)$, при этом для каждой функции из множества z имеет место в точности один из этих случаев. Мы будем писать $z \in q_{\in}$ (соотв. $z \in q_{\notin}$) в том и только в том случае, если $z \in q$ и для всех $f \in z$ имеет место $f\ Forc_{\in}\ \varphi(f),\ \psi(f)$ (соотв. $f\ Forc_{\notin}\ \varphi(f),\ \psi(f)$). Очевидно $q_{\in} \cap q_{\notin} = 0$, $q_{\in} \cup q_{\notin} = q$. Так как $\cup q \in j$ (поскольку оно является открытым, плотным в C множеством), наступает в точности один из случаев $\cup q_{\in} \in j$, $\cup q_{\notin} \in j$. Это означает, что имеет место в точности один из случаев $\varphi \in^* \psi$, $\varphi \notin^* \psi$. Аналогично и для $=^*$, $\neq^*$.

Лемма 3. $(\varphi)(\psi)(\xi)[\varphi =^* \psi \,\&\, \xi \in^* \varphi \to \xi \in^* \psi]$.

Доказательство: Пусть $q = q(\varphi\, \psi\, \xi)$. Символом q_1 (соотв. q_2, q_3) обозначим систему всех $z \in q$ таких, что для любого $f \in z$ имеет место $f\, Forc_{=}\, \varphi(f), \psi(f)$ (соотв. $f\, Forc_{\in}\, \xi(f), \varphi(f)$, $f\, Forc_{\notin}\, \xi(f), \psi(f)$). Предположим, что $\varphi =^* \psi$, $\xi \in^* \varphi$, $\xi \notin^* \psi$. Тогда $q_1 \cap q_2 \cap q_3 \neq 0$ (потому что любое из множеств $\cup q_i$ содержится в ультрафильтре j). Пусть $z \in q_1 \cap q_2 \cap q_3$. Тогда $p(z)\, Forc_{=}\, \varphi^z \psi^z$, $p(z)\, Forc_{\in}\, \xi^z \varphi^z$ и $p(z)\, Forc_{\notin}\, \xi^z \psi^z$. Но это противоречит утверждению леммы 6 главы I.

Лемма 4. $(\varphi)(\psi)(\xi)[\varphi =^* \psi \,\&\, \varphi \in^* \xi \to \psi \in^* \xi]$.

Доказательство аналогично.

Лемма 5. Пусть $\varphi \neq^* \psi$. Тогда существует $\xi \in \overline{K}$ такое, что или $\xi \in^* \varphi$ и $\xi \notin^* \psi$, или $\xi \notin^* \varphi$ и $\xi \in^* \psi$.

Доказательство: Пусть $q = q^{\varphi}_{\psi}$. Положим $z \in q_0$ в том и только в том случае, если $z \in q$ и $p(z)\, Forc_{\neq}\, \varphi^z \psi^z$. Очевидно $\cup q_0 \in j$. Положим $z \in q_1$ (соотв. $z \in q_2$) в том и только в том случае, если $z \in q_0$ и если существует ξ^z такое, что имеет место $p(z)\, Forc_{\in}\, \xi^z, \varphi^z$ и $p(z)\, Forc_{\notin}\, \xi^z \psi^z$ (соотв. $p(z)\, Forc_{\notin}\, \xi^z \varphi^z \,\&\, p(z)\, Forc_{\in}\, \xi^z \psi^z$). Легко видеть, что $q_1 \cup q_2 = q_0$. Следовательно, $\cup q_1 \in j$. Определим функционал ξ соотношениями $\xi(f) = \xi^z$ для $f \in z$, $z \in q_1$, $\xi(f) = 0$, для $f \in z$, $z \in q_0 - q_1$. Имеет тогда место $\xi \in \overline{K}$ и при этом $\xi \in^* \varphi$ и $\xi \notin^* \psi$.

Замечание. Из утверждений лемм 3,4,5 вытекает, что отношение $\overline{E}$, определенное посредством соотношения $\langle\varphi\, \psi\rangle \in \overline{E} \equiv \varphi \in^* \psi \,.\&.\, \overline{E} \subseteq \overline{K} \times \overline{K}$, является слабо интернальным в классе $\overline{K}$ (см. [H]).

Определение 3. Для $\varphi, \psi \in \overline{K}$ мы положим $\varphi << \psi \equiv$ $\equiv \{f \mid \varphi(f) << \psi(f)\} \in \jmath$, аналогично $\varphi < \psi \equiv$ $\equiv \{f \mid \varphi(f) < \psi(f)\}$.

Лемма 6. Если $\xi << \varphi, \psi \not< \varphi$, то $\xi << \psi$.

Лемма 7. Если $\psi \in^* \varphi$, то найдется $\xi \in \overline{K}$ такое, что $\xi =^* \psi$ и $\xi << \varphi$.

Доказательство: Пусть $q = q(\varphi, \psi)$. Положим $z \in q_0 \equiv p(z)\, Forc_{\in}\, \psi^z \varphi^z$. Имеет место $\cup q_0 \in \jmath$. Для любого $z \in q_0$ существует ξ^z такое, что $\xi^z << \varphi^z$ и $p(z)\, Forc_{=}\, \psi^z, \xi^z$. Положим $\xi(f) = \xi^z$ для $f \in z$, где $z \in q_0$, $\xi(f) = 0$ для $f \in z \in q - q_0$. Тогда $\xi =^* \psi$ и $\xi << \varphi$.

Замечание. По лемме 3 тоже $\xi \in^* \varphi$.

Определение 4. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \overline{K}$. Символом $\mathcal{F}_i^*(\varphi_1 \varphi_2)$ мы обозначим функционал φ, для которого имеет место следующее: для любого $f \in \mathcal{D}(\varphi_1) \cap \mathcal{D}(\varphi_2)$ $\varphi(f) =$ $= \bar{\jmath}'\langle i \varphi_1(f) \varphi_2(f)\rangle$ для других f, φ неопределен.

Лемма 8. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \overline{K}$, то также $\mathcal{F}_i^*(\varphi_1, \varphi_2) \in \overline{K}$ $(i = 1, \dots, 8)$.

Доказательство: Для простоты обозначим $\mathcal{F}_i^*(\varphi_1 \varphi_2)$ символом φ. Тогда $W(\varphi) \subseteq On$, $\mathcal{D}(\varphi) = \mathcal{D}(\varphi_1) \cap \mathcal{D}(\varphi_2)$, следовательно, $\mathcal{D}(\varphi)$ открыто и плотно в C. Обозначим $a_{\alpha\beta}$ пересечение $\varphi_1^{-1}(\alpha) \cap \varphi_2^{-1}(\beta)$. $a_{\alpha\beta}$ попарно не пересекаются, открыты и $\mathcal{D}(\varphi) = \bigcup\limits_{\substack{\alpha \in W(\varphi_1) \\ \beta \in W(\varphi_2)}} a_{\alpha\beta}$. Если $f \in a_{\alpha\beta}$, то $\varphi(f) = \bar{\jmath}'\langle i \alpha \beta\rangle$, следовательно, на любом из множеств $a_{\alpha\beta}$ φ является постоянным.

Лемма 9.1. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \overline{K}$, то $\psi \in^* \mathcal{F}_1^*(\varphi_1 \varphi_2) \equiv$ $\equiv \psi =^* \varphi_1 \vee \psi =^* \varphi_2$.

Доказательство: Пусть $\mathcal{F}_1^*(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi$, $q = q^{\psi\ \psi\ \psi}_{\varphi\ \varphi_1\ \varphi_2}$.

Пусть сначала $\psi \in {}^*\varphi$, предположим сразу $\psi << \varphi$. Положим $z \in q_0 \equiv z \in q$ & $\& \; p(z) \, Forc_{\in} \, \psi^z, \varphi^z$. Тогда $\bigcup q_0 \in j$. Положим $z \in q_1 \equiv z \in q_0 \; \&$ $\& \; p(z) \, Forc_{=} \, \psi^z, \varphi_1^z$, $z \in q_2 \equiv z \in q_0 \; \& \; p(z) \, Forc_{=} \, \psi^z, \varphi_2^z$. Очевидно $q_1 \cup q_2 = q_0$. Но это означает, что например $\bigcup q_1 \in j$, следовательно, $\psi = {}^*\varphi_1$. Пусть например наоборот $\psi = {}^*\varphi_1$. Положим $z \in q_1 . \equiv . z \in q \; \& \; p(z) \, Forc_{=} \, \psi^z \varphi_1^z$. Очевидно $\bigcup q_1 \in j$. Если $z \in q_1$, то $p(z) \, Forc_{\in} \, \psi^z, \varphi^z$. Следовательно, $\psi \in {}^*\varphi$.

<u>Замечание</u>. Из леммы 2а) статьи [H] вытекает $\varphi = {}^*\psi \; \&$ $\& \; \psi = {}^*\xi . \rightarrow . \varphi = {}^*\xi$, далее, по лемме 9.1, $\varphi_1 = {}^*\varphi_1' \; \&$ $\& \; \varphi_2 = {}^*\varphi_2' . \rightarrow . \mathcal{F}_1^*(\varphi_1 \varphi_2) = {}^*\mathcal{F}_1^*(\varphi_1' \varphi_2')$. Определим $\mathcal{F}_{11}^*(\varphi_1 \varphi_2)$ посредством соотношения $\mathcal{F}_{11}^*(\varphi_1 \varphi_2) = \mathcal{F}_1^*(\mathcal{F}_1^*(\varphi_1 \varphi_1), \mathcal{F}_1^*(\varphi_1 \varphi_2))$; очевидно имеет место следующее:

$\varphi_1 = {}^*\varphi_1' \; \& \; \varphi_2 = {}^*\varphi_2' \equiv \mathcal{F}_{11}^*(\varphi_1 \varphi_2) = {}^*\mathcal{F}_{11}^*(\varphi_1' \varphi_2')$ (см. [G]).

<u>Лемма 9.11</u>. $\varphi = \mathcal{F}_1^*(\varphi_1 \varphi_2) \; \& \; \varphi \in {}^*\psi . \rightarrow .$ $. \rightarrow . (\exists \varphi_{11} \varphi_{22})(\mathcal{F}_1^*(\varphi_{11} \varphi_{22}) << \psi \; \& \; \mathcal{F}_1^*(\varphi_{11} \varphi_{22}) = {}^*\varphi)$.

<u>Доказательство</u>: Пусть $\varphi_0 << \psi$, $\varphi_0 = {}^*\varphi$ (см. лемму 7), пусть $q = q(\varphi \varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \psi)$; положим $z \in q_0 \equiv z \in q \; \& \; p(z) \, Forc_{\in} \, \varphi_1^z \varphi_0^z \; \& \; p(z) \, Forc_{\in} \, \varphi_2^z \varphi_0^z$; имеем $\bigcup q_0 \in j$ и $(z)(z \in q_0 \rightarrow (\exists \varphi_{11}^z \varphi_{22}^z)(i = 1,2)(p(z)$ $Forc_{=} \, \varphi_{ii}^z \varphi_i^z \; \& \; p(z) \, Forc_{\in} \, \varphi_{ii}^z \varphi_0^z \; \& \; \varphi_{ii}^z << \varphi_0^z)$.

Положим $\varphi_{ii}(f) = \varphi_{ii}^z$ для $f \in z \in q_0$, $\varphi_{ii}(f) = 0$ для $f \in z \in q - q_0$, $\mathcal{F}_1^*(\varphi_{11} \varphi_{22}) = \bar{\varphi}$. Тогда $\bar{\varphi} << \psi \; \& \; (\xi)(\xi \in {}^*\bar{\varphi} \equiv \xi = {}^*\varphi_{11} \vee \xi = {}^*\varphi_{22}$, как это вытекает из леммы 9.1, т.е. $\bar{\varphi} = {}^*\varphi_0 = {}^*\varphi$.

<u>Лемма 9.12</u>. $\varphi = \mathcal{F}_{11}^*(\varphi_1 \varphi_2) \; \& \; \varphi \in {}^*\psi . \rightarrow .$ $. \rightarrow . (\exists \varphi_{11} \varphi_{22})(\mathcal{F}_{11}^*(\varphi_{11} \varphi_{22}) << \psi \; \& \; \mathcal{F}_{11}^*(\varphi_{11} \varphi_{22}) = {}^*\varphi)$.

<u>Доказательство</u> аналогично.

<u>Лемма 9.2</u>. $\psi \in {}^*\mathcal{F}_2^*(\varphi_1 \varphi_2) . \equiv . (\exists \xi_1, \xi_2)[\xi_1 \in {}^*\xi_2 \; \&$ $\& \; \psi = {}^*\mathcal{F}_{11}^*(\xi_1 \xi_2) \; \& \; \psi \in {}^*\varphi_1]$.

Доказательство: Пусть сначала $\psi \in^* \mathcal{F}_2^*(\varphi_1 \varphi_2)$, $\psi_0 << \varphi$, $\psi_0 =^* \psi$. Пусть $\mathcal{F}_2^*(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi$, $q = q(\psi\ \psi_0\ \varphi\ \varphi_1\ \varphi_2)$. Положим $z \in q_0 \equiv z \in q\ \&\ p(z) Forc_\in \psi^z, \varphi^z$. Тогда $\cup q_0 \in \mathcal{J}$. Если $z \in q_0$, то существуют ξ_1^z, ξ_2^z такие, что имеет место $p(z)Forc_\in \xi_1^z, \xi_2^z$, $p(z)Forc_= \psi_0^z, \bar{J}'\langle 1, \bar{J}'\langle 1 \xi_1^z \xi_2^z\rangle, \bar{J}'\langle 1 \xi_1^z \xi_2^z\rangle\rangle$, $p(z)Forc_\in \psi^z \varphi_1^z$. Положим $\xi_1(f) = \xi_1^z$ ($\xi_2(f) = \xi_2^z$) для $f \in z$, $z \in q_0$, $\xi_1(f) = \xi_2(f) = 0$, для $f \in z \in q - q_0$. $\xi_1, \xi_2 \in \bar{K}$ и для этих функционалов имеет место правая половина эквиваленции доказываемой леммы, так как $\psi_0 =^* \psi$.

Предположим теперь, что правая половина имеет место и пусть $\xi_{11}, \xi_{22}, \psi_0$ выбраны по лемме 9.12 таким образом, что $\mathcal{F}_{11}^*(\xi_{11}\ \xi_{22}) = \psi_0 << \varphi_1$, $\psi_0 =^* \psi$.

Пусть $q = q(\psi_0\ \xi_{11}\ \xi_{22}\ \varphi_1\ \varphi_2\ \mathcal{F}_1^*(\xi_{11}\ \xi_{11})\mathcal{F}_1^*(\xi_{11}\ \xi_{22})\mathcal{F}_{11}^*(\xi_{11}\ \xi_{22}))$. Проверим справедливость соотношения $\psi_0 \in^* \mathcal{F}_2^*(\varphi_1 \varphi_2)$. Если для любого $z \in q$ $\lambda_z = H'\langle 0, I'\varphi^z\rangle$ и если мы положим $z \in q_1 \equiv (z \in q\ \&\ p(z) Fo[\lambda_z \langle\ \rangle] \psi_0^z \xi_{11}^z \xi_{22}^z\ \&\ p(z) Fo[\lambda_z \in] \xi_{11}^z \xi_{22}^z\ \&\ p(z) Fo[\lambda_z \in] \psi_0^z \varphi_1^z)$, то $\cup q_1 \in \mathcal{J}$.

Следовательно, $p(z)Forc_\in \psi_0^z, \bar{J}'\langle 2, \varphi_1^z, \varphi_2^z\rangle$; и из этого вытекает $\psi_0 \in^* \mathcal{F}_2^*(\varphi_1 \varphi_2)$. Так как $\psi =^* \psi_0$, имеет место $\psi_0 \in^* \mathcal{F}_2^*(\varphi_1 \varphi_2)$.

Лемма 9.3. $\psi \in^* \mathcal{F}_3^*(\varphi_1 \varphi_2) \equiv \psi \in^* \varphi_1\ \&\ \psi \notin^* \varphi_2$.

Доказательство: Пусть $\varphi = \mathcal{F}_3^*(\varphi_1 \varphi_2)$, $\psi \in^* \varphi$, $\psi =^* \psi_0 << \varphi$, $q = q(\psi\ \varphi\ \varphi_1\ \varphi_2\ \psi_0)$. Положим $z \in q_0 \equiv$ $\equiv z \in q\ \&\ p(z) Forc_\in \psi_0^z\ \varphi^z$, но это означает, что $p(z)Forc_\in \psi_0^z, \bar{J}'\langle 3 \varphi_1^z\ \varphi_2^z\rangle$. Последнее эквивалентно соотношению $p(z)Forc_\in \psi_0^z \varphi_1^z\ \&\ p(z)Forc_\notin \psi_0^z\ \varphi_2^z$. Это означает, что $\psi_0 \in^* \varphi_1\ \&\ \psi_0 \notin^* \varphi_2$, следовательно, $\psi \in^* \varphi_1$, $\psi \notin^* \varphi_2$, так как $\cup q_0 \in \mathcal{J}$.

Пусть наоборот $\psi \in^* \varphi_1$ и $\psi \notin^* \varphi_2$. Предположим сразу, что $\psi << \varphi_1$. Положим $z \in q_0 \equiv z \in q \,\&\, p(z) \mathrm{Forc}_\in \psi^z \varphi_1^z \,\&$ $\&\, p(z) \mathrm{Forc}_\notin \psi^z \varphi_2^z$. Очевидно, для $z \in q_0$ $p(z) \mathrm{Forc}_\in \psi^z$, $\bar{J}'\langle 3 \varphi_1^z \varphi_2^z \rangle$, следовательно, $p(z) \mathrm{Forc}_\in \psi^z$, $\mathcal{F}_3^*(\varphi_1 \varphi_2)^z$.
Так как $\cup q_0 \in j$, имеет место $\psi \in^* \mathcal{F}_3^*(\varphi_1 \varphi_2)$.

<u>Лемма 9.4</u>. $\psi \in^* \mathcal{F}_4^*(\varphi_1 \varphi_2) . \equiv . (\exists \xi)(\mathcal{F}_{11}^*(\xi \psi) \in^* \varphi_1)$.

<u>Доказательство</u>: Допустим сначала, что имеет место левая половина эквиваленции. Пусть сразу $\psi << \mathcal{F}_4^*(\varphi_1 \varphi_2)$ и $q = q(\psi \mathcal{F}_4^*(\varphi_1 \varphi_2))$. Положим $z \in q_0 \equiv z \in q \,\&$ $\&\, p(z) \mathrm{Forc}_\in \psi^z, \mathcal{F}_4^*(\varphi_1 \varphi_2)^z$; это эквивалентно соотношению $p(z) \mathrm{Forc}_\in \psi^z, \bar{J}'\langle 4 \varphi_1^z \varphi_2^z \rangle$. Последнее означает, что существует ξ^z такое, что имеет место $p(z) \mathrm{Forc}_\in \bar{J}'\langle 1, \bar{J}'\langle 1 \xi^z \xi^z \rangle, \bar{J}'\langle 1 \xi^z \psi^z \rangle\rangle, \varphi_1^z$. Положим $\xi(f) =$ $= \xi^z$ для $f \in z \in q_0$ и $\xi(f) = 0$ для $f \in z \in q - q_0$. Тогда $\xi \in \bar{K}$. Для $z \in q_0$ имеет место $p(z) \mathrm{Forc}_\in \mathcal{F}_{11}^*(\xi \psi)^z$, φ_1^z. Так как $\cup q_0 \in j$, имеет место $\mathcal{F}_{11}^*(\xi \psi) \in^* \varphi_1$.

Предположим теперь, что выполнена правая половина эквиваленции. Обозначим $\varphi = \mathcal{F}_4^*(\varphi_1 \varphi_2)$ и выберем ξ_0, ψ_0 такие, что $\mathcal{F}_{11}^*(\xi_0 \psi_0) << \varphi_1 \,\&\, \mathcal{F}_{11}^*(\xi_0 \psi_0) =^* \mathcal{F}_{11}^*(\xi \psi)$; пусть $\mathcal{F}_{11}^*(\xi_0 \psi_0) = \xi_1$, пусть $q = q(\xi_0 \psi_0 \mathcal{F}_1^*(\xi_0 \xi_0)$ $\mathcal{F}_1^*(\varphi_0 \psi_0) \xi_1 \varphi_1)$ и пусть λ_z имеет такое-же значение как в доказательстве леммы 9.2. Если положить $z \in q_1 \equiv z \in q \,\&$ $\&\, p(z) \mathrm{Fo}[\lambda_z \langle\,\rangle] \xi_1^z, \xi_0^z, \psi_0^z \,\&\, p(z) \mathrm{Fo}[\lambda_z \in] \xi_1^z, \psi_1^z$, то $\cup q_1 \in j$ и $p(z) \mathrm{Forc}_\in \psi_0^z \varphi^z$, следовательно, $\psi_0 \in^* \varphi$, $\psi \in^* \varphi$.

<u>Замечание</u>. Можно формулировать аналогичным образом леммы 9.5, ..., 9.8 для операций $\mathcal{F}_5^*, \dots, \mathcal{F}_8^*$. Доказываются они аналогично. Из утверждений лемм 9.1, ..., 9.8 вытекает, что отношение $\in^*$ в классе $\bar{K}$ является слабо

замкнутым на операции $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_8$ (см. [H]).

Лемма 10. Существует класс $K \subseteq \overline{K}$ такой, что имеет место

(1) $(\varphi)(\exists \psi)(\varphi \in \overline{K} \rightarrow \psi \in K \;\&\; \varphi =^* \psi)$,

(2) если $\varphi \in \overline{K}$, то класс всех $\psi \in K$, для которых $\psi < \varphi$, является множеством.

Доказательство: Определим класс K посредством соотношения $\varphi \in K \equiv \varphi \in \overline{K} \;\&\; (f)[\varphi(f) \leq \min_{m \in j} \sup_{g \in m} \varphi(g)]$.
Для класса K утверждения (1),(2) доказаны в работе [V2].

Лемма 11. Отношение $\in^*$ в классе $\overline{K}$ почти регулярно и почти универсально (определение см. [H]).

Доказательство: Почти-регулярность вытекает непосредственно из леммы 10 и 9. Почти-универсальность отношения $\in^*$ следует из леммы 10 и из следующего утверждения, легко вытекающего из определения понятия вынуждения: для любого α существует $\alpha_0 \ni \alpha$ такое, что для любого условия p и любого $\beta \in \alpha$ имеет место $p \; Forc_{\in} \; \beta \alpha_0$. Для любого a, подмножества класса $\overline{K}$, мы полагаем $\alpha = \sup_{\substack{f \in c \\ \varphi \in a}} \{\varphi(f)\}$.
Для этого α найдется соответствующее α_0 и если положить $\xi(f) = \alpha_0$ для любого $f \in c$, то $\xi \in \overline{K}$ и для любого $\varphi \in a$ имеет место $\varphi \in^* \xi$.

Лемма 12. Если $\psi \in^* \varphi$, то существует $\xi_0 \in^* \varphi$ такое, что ни для какого $\xi \in^* \varphi$ не имеет место $\xi < \xi_0$.

Доказательство: Пусть $q = q(\varphi \psi)$. Положим $z \in q_0 \equiv z \in q \;\&\; p(z) \; Forc_{\in} \; \psi^z \varphi^z$. Тогда $\cup q_0 \in j$. Мы будем писать $z \in \overline{b}'$ в том и только в том случае, если выполнено следующее: $z \in \overline{b}$, существует $z' \in q_0$ такое, что $z \leq z'$, существует γ такое, что $p(z) \; Forc_{\in} \; \gamma \varphi^z$ и для любого $\delta \in \gamma$ и $z'' \in \overline{b}$, $z'' \leq z'$ не верно

$p(z'')\,\mathrm{Forc}_\epsilon\,\delta\varphi^z$. Докажем сначала, что $\cup q_0 - \cup \bar{b}'$ является нигде не плотным множеством. Для этого достаточно доказать, что для любого $z \in q_0$ множество $z - \cup \bar{b}'$ нигде не плотно (см. лемму 6 главы II). Пусть $z_1 \subseteq z$. Обозначим символом γ_0 минимум множества всех γ таких, что существует $z_2 \subseteq z_1$ такое, что $p(z_2)\,\mathrm{Forc}_\epsilon\,\gamma\,\psi^z$. Множество таких γ непусто, так как оно содержит например ψ^z . К числу γ_0 существует $z_2 \subseteq z_1$ такое, что $z_2\,\mathrm{Forc}_\epsilon\,\gamma_0\,\varphi^z$. Из этого уже вытекает $z_2 \in \bar{b}'$. Тем самым доказано, что наше множество нигде не плотно, следовательно, не принадлежит j . Но это означает, что $\cup \bar{b}' \in j$. Для $z \in \bar{b}'$ обозначим символом ξ^z наименьшее ординальное число δ, для которого $p(z)\,\mathrm{Forc}_\epsilon\,\delta\varphi^{z'}$ (здесь z' — элемент q_0 такой, что $z \subseteq z'$). Для $\xi^z \neq \xi^{\bar{z}}$ имеет место $z \cap \bar{z} = 0$. Положим $\xi_0(f) = \xi^z$ для $f \in z \in \bar{b}'$, $\xi_0(f) = 0$ для $f \in z \in \bar{b}$, $z \cap \cup \bar{b}' = 0$. Очевидно, $\xi_0 \in^* \varphi$. Предположим, что существует $\xi \in^* \varphi$, $\xi < \xi_0$. Если положить $q_1 = q(\xi_0\,\xi\,\varphi)$, то для почти всех $z \in q_1$ имеет место $p(z)\,\mathrm{Forc}_\epsilon\,\xi_0^z\varphi^z$, $p(z)\,\mathrm{Forc}_\epsilon\,\xi^z\varphi^z$ и $\xi^z \in \xi_0^z$, что однако противоречит способу построения функционала ξ .

<u>Лемма 13</u>. Отношение $\bar{E}$ в классе $\bar{K}$ фундаментировано и существует относительно бесконечное множество.

<u>Доказательство</u>: Пусть $\psi \in^* \varphi$. Лемма 12 утверждает, что существует $\xi_0 \in^* \varphi$ такое, что ни для какого $\xi \in^* \varphi$ не имеет место $\xi < \xi_0$. Допустим, что существует $\xi \in \bar{K}$ такое, что $\xi \in^* \xi_0$ и $\xi \in^* \varphi$. Из утверждения леммы 7 вытекает, что существует $\xi_1 \in \bar{K}$ такое, что $\xi_1 << \xi_0$ и $\xi_1 =^* \xi$. Следовательно, $\xi_1 \in^* \xi_0$ и $\xi_1 \in^* \varphi$.

Но это противоречит свойствам функционала ξ_0. Обозначим символом $\varkappa_{\omega_0}$ функционал, для которого $\varkappa_{\omega_0}(f) = \omega_0$ для любого $f \in C$. Очевидно $\varkappa_{\omega_0} \in \bar{K}$ и этот функционал как раз является относительно бесконечным множеством отношения $\bar{E}$ в классе $\bar{K}$.

Об отношении $\bar{E}$ в классе $\bar{K}$ мы доказали, что оно слабо интернально, слабо замкнуто на операции $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_8$, почти регулярно, почти универсально, фундаментировано и что существует относительно бесконечное множество. Следуя замечанию на стр. 290 в [V 1], которое переносится и на случай слабо интернального отношения, $\bar{E}$ замкнуто также на операции $\mathcal{F}_9$, $\mathcal{F}_{10}$. На основании результатов работ [H], [V 1] можно утверждать, что существует модель теории множеств Σ такая, что $\bar{E}$ каким-то образом (см. [H], [V 1]) описывает отношение принадлежности множеств этой модели. Эта модель в дальнейшем будет обозначаться символом ∇.

<u>Замечание</u>. Напомним некоторые определения из выше указанных работ. Областью изменения переменных x^*, y^* является $\bar{K}$.

$$y \in \Phi(x^*) \equiv \langle y\, x^* \rangle \in \bar{E},$$

$$Cls^*(X) \equiv X \subseteq \bar{K} \,\&\, (x^*)(\exists y^*)(X \cap \Phi(x^*) =$$
$$= \Phi(y^*)) \,\&\, (x^*, y^*)(x^* \in X \,\&\, x^* = {}^* y^* . \rightarrow . \, y^* \in X),$$

$$M^{\#}(X) \equiv (\exists x^*)(X = \Phi(x^*)),$$

$$X \in^{\#} Y \equiv Cls^{\#}(Y) \,\&\, (\exists x^*)(X = \Phi(x^*) \,\&$$
$$\& \, x^* \in Y).$$

Если отношение $\bar{E}$ обладает выше указанными свойствами и $A_1, \dots, C_4$, D — аксиомы теории множеств Σ, то для предикатов $Cls^{\#}$, $M^{\#}$, $\in^{\#}$, $=$ доказуемы очевидным способом образованные формулы $A_1^{\#}, \dots, C_4^{\#}$, $D^{\#}$.

Далее можно определить

$$M^*(x) \equiv x \in \bar{K}, \quad x \in^* y \equiv \langle x y \rangle \in \bar{E} \;;$$

соотношения между обоими "языками" ($\ast$, $\#$) см. [H].

Глава IV.

Модель ∇ , в которой $2^{\aleph_\mu} \geq \aleph_\alpha$.

Определение 1. Пусть $\varphi, \psi \in \bar{K}$. Положим

$$\varphi \cong \psi (mod\, j). \equiv . \{ f \mid \varphi(f) = \psi(f) \} \in j \, .$$

Лемма 1. Отношение $\varphi \cong \psi (mod\, j)$ в классе $\bar{K}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Замечание. Если $\varphi \cong \psi (mod\, j)$, то $\varphi =^* \psi$.

Лемма 2. Отношение $<$ в классе $\bar{K}$ (см. определение 3 главы III) транзитивно.

Лемма 3. Для любых $\varphi, \psi \in \bar{K}$ наступает один и только один из следующих случаев $\varphi \cong \psi (mod\, j), \varphi < \psi, \psi < \varphi$.

Замечание. Если $\psi << \varphi$, то $\psi < \varphi$.

Определение 3. Пусть $\alpha \in On$. Обозначим символом $\varkappa_\alpha$ функционал, определенный на $c_\mu^{\bar\nu}$ посредством соотношения $\varkappa_\alpha (f) = \alpha$.

Замечание. Очевидно $\varkappa_\alpha \in \bar{K}$; ни для какого $\varphi \in \bar{K}$ не имеет место $\varphi \in^* \varkappa_0$.

Определение 4. Пусть $\psi_1 , \psi_2 \in \bar{K}$. Символом $\mathcal{A}(\psi_1 \psi_2)$ обозначим множество всех $\varphi \in \bar{K}$, для которых $\psi_1 < \varphi < \psi_2$.

Замечание. Мы будем говорить, что $\Phi(z)$ имеет место для почти всех $z \in q$, если $q \subseteq \bar{\mathcal{B}}$ и $\bigcup\{ z \mid z \in q \,\&\, \Phi(z) \} \in j$.

Лемма 4. Если $\varphi, \psi \in \mathcal{A}(\varkappa_{\omega_\mu} \varkappa_{\omega_\mu + \nu})$, $\varphi < \psi$, то $\varphi \neq^* \psi$.

Доказательство: Предположим, что $\varphi =^* \psi$. Тогда для почти всех $z \in q(\varphi\, \psi)$ имеет место $p(z) \mathrm{Forc}_= \varphi^z \psi^z$,

$\omega_\mu \in \varphi^z, \psi^z \in \omega_\mu + \nu$. По определению вынуждения $\varphi^z = \psi^z$, следовательно, $\varphi \cong \psi \ (mod\ j)$ что однако противоречит предположению $\varphi < \psi$.

<u>Определение 5</u>. Обозначим символом r_0 отношение, определенное следующим образом: $\langle \alpha \beta \rangle \in r_0 . \equiv . \alpha, \beta \in \bar{\nu} \ \& \ \alpha \in \beta$.

<u>Лемма 5</u>. Если $\lambda_1 = Y'2$, то $\langle \varphi \psi \rangle^* \in {}^* \varkappa_{\lambda_1} \equiv$
$\equiv (\exists \varphi_1)(\exists \psi_1)[\varphi_1 = {}^*\varphi \ \& \ \psi_1 = {}^*\psi \ \& \ \varkappa_{\omega_\mu} < \varphi_1 < \psi_1 < \varkappa_{\omega_\mu + \nu}]$.

<u>Доказательство</u>: Пусть сначала имеет место правая половина эквивалентности. Тогда для почти всех $z \in \mathcal{Q}(\varkappa_{\omega_\mu}, \varkappa_{\omega_\mu+\nu}, \varphi_1, \psi_1)$ имеет место $\omega_\mu \in \varphi_1^z \in \psi_1^z \in \omega_\mu + \nu$. Но это означает, что $\langle \varphi_1^z, \psi_1^z \rangle \in r_0$, следовательно, $\langle \varphi_1, \psi_1 \rangle^* \in {}^*\varkappa_{\lambda_1}$, и оттуда $\langle \varphi \psi \rangle^* \in {}^*\varkappa_{\lambda_1}$. Пусть теперь имеет место левая половина эквивалентности. Обозначим символом $\mathcal{Q}_0$ множество всех $z \in \mathcal{Q}(\mathcal{F}_{11}^*(\varphi, \psi), \varphi, \psi, \varkappa_{\lambda_1})$ таких, что имеет место $p(z) \mathrm{Forc}_\in \mathcal{F}_{11}^*(\varphi \psi)^z \lambda_1$. Очевидно $U\mathcal{Q}_0 \in j$. Для любого $z \in \mathcal{Q}_0$ существуют φ_1^z, ψ_1^z такие, что имеет место $p(z) \mathrm{Forc}_= \varphi_1^z \varphi^z$, $p(z) \mathrm{Forc}_= \psi_1^z \psi^z$, $\omega_\mu \in \varphi_1^z \in \psi_1^z \in \omega_\mu + \nu$. Определим функционалы $\varphi_1 \ \psi_1$ следующим образом: $\varphi_1(f) = \varphi_1^z$, $\psi_1(f) = \psi_1^z$ для $f \in z \in \mathcal{Q}_0$ и $\varphi_1(f) = \psi_1(f) = 0$ для $f \in z \in \in U(\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_0)$. Очевидно, $\varphi_1 \ \psi_1$ обладают требуемым свойством.

<u>Лемма 6</u>. $\varphi \in {}^*\varkappa_{\omega_\mu} \equiv (\exists \varphi_1)(\varphi = {}^*\varphi_1 \ \& \ \varphi_1 < \varkappa_{\omega_\mu})$.

<u>Лемма 7</u>. Если $\varphi \in \mathcal{A}(\varkappa_{\omega_\mu} \varkappa_{\omega_\mu + \nu})$, то $\varphi \subseteq {}^*\varkappa_{\omega_\mu}$.

<u>Доказательство</u>: Пусть $\psi \in {}^*\varphi$, предположим сразу $\psi << \varphi$. Если положить $z \in \mathcal{Q}_0 \equiv z \in \mathcal{Q}(\varphi \psi) \ \&$
$\& \ \omega_\mu < \varphi^z < \omega_\mu + \nu \ \& \ \psi^z << \varphi^z$, то $\mathcal{Q}_0 \in j$. Для почти всех $z \in \mathcal{Q}_0$ имеет место $p(z) \mathrm{Forc}_\in \psi^z \varphi^z$, т.е. $\psi^z \in \omega_\mu$. Следовательно, для почти всех $\mathcal{Q}_0 \in j$ имеет место $p(z) \mathrm{Forc}_\in \psi^z \omega_\mu$ $(\omega_\mu = (\varkappa_{\omega_\mu})^z)$.

$\underline{\text{Лемма 8}}$. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \overline{K}$ такие, что $\varkappa_{\omega_\mu} < \varphi_1 < \varphi_2 < \varkappa_{\omega_\mu + \nu}$ (соотв. $\varphi_2 \cong \varkappa_{\omega_\mu + \nu} \pmod j$), то существует $\xi_{\varphi_1 \varphi_2} \in \overline{K}$ удовлетворяющее соотношению
$\psi \in^* \xi_{\varphi_1 \varphi_2} \equiv (\exists \psi_1)(\psi_1 =^* \psi \;\&\; \psi_1 \in a(\varphi_1 \varphi_2))$.

Доказательство: Достаточно положить $\xi_{\varphi_1 \varphi_2} = W^*(\varkappa_{\lambda_1} \cap {}^*(W^*(\varkappa_{\lambda_1}) \times {}^*\{\varphi_2\}^*)) \cap {}^*\mathcal{D}^*(\varkappa_{\lambda_1} \cap {}^*(\{\varphi_1\}^* \times {}^*\mathcal{D}^*(\varkappa_{\lambda_1})))$ (соотв. в случае $\varphi_2 \cong \varkappa_{\omega_\mu + \nu} \pmod j$ мы заменим первое из выражений выражением $W^*(\varkappa_{\lambda_1})$).

$\underline{\text{Лемма 9}}$: $\varkappa_{\lambda_1}$ вполне упорядочивает в смысле модели ∇ множество $\xi_{\varkappa_{\omega_\mu} \varkappa_{\omega_\mu + \nu}}$.

Доказательство: Пусть $\varphi \subseteq^* \xi_{\varkappa_{\omega_\mu} \varkappa_{\omega_\mu + \nu}}$, $\varphi \neq^* a_0$. Тогда по лемме 12 из III. главы существует $\psi_1 \in^* \varphi$ такое, что для любого $\psi \in^* \varphi$ имеет место $\psi_1 < \psi \vee \psi_1 \cong \psi \pmod j$. Ясно, что $\psi_1 < \varkappa_{\omega_\mu} + \nu$. Допустим, что существует $\psi \in^* \varphi$ удовлетворяющее соотношению $\langle \psi \psi_1 \rangle^* \in^* \varkappa_{\lambda_1}$. Тогда существует $\psi_2 =^* \psi$, $\psi_2 < \psi_1$ (см. лемму 5), следовательно, $\psi_2 \in^* \varphi$ и $\psi_2 < \psi_1$, что однако является противоречием.

В дальнейшем мы будем предполагать, что в теории, в которой мы работаем, имеет место аксиома $V = L$ (утверждающая, что любое множество конструктивно), следовательно, имеют место также аксиомы выбора и обобщенная континуум-гипотеза.

$\underline{\text{Лемма 10}}$. Мощность множества b в пространстве c_μ равняется $\aleph_\mu$.

Доказательство: Если $(xy) \in b$, то x, y сопряжены. Всех сопряженных точек имеется $\aleph_\mu$ (следует из континуум-гипотезы. Их столько-же, сколько имеется подмножеств отрезков множества ω_μ).

Следствие. Если $b_1 \subseteq t_\mu$, и b_1 содержит попарно непересекающиеся множества, то $card\, b_1 \leq \aleph_\mu$, так как в любом непустом таком множестве содержится множество из b.

Лемма 11. Пусть в пространстве $c_\mu^{\bar{\nu}}$ имеет место $b_1 \subseteq \bar{b}$ и пусть элементы множества b_1 попарно не пересекаются и непусты. Тогда $card\ b_1 \leq \aleph_\mu$.

Доказательство: Будем доказывать от противного. Можно тогда предположитьм что $card\ b_1 = \aleph_{\mu+1}$. Для $z \in b_1$ обозначим символом s_z множество всех ординальных чисел из множества $\bar{\nu}$ таких, что если $z = (f_1\ f_2)$ то для $\alpha \in s_z$ или $f_1'\alpha \neq 0$ или $f_2'\alpha \neq \omega_\mu$. s_z является конечным непустым множеством (если бы оно было для какого-то z пустым, то b_1 было бы одноэлементным множеством). Символом n_z обозначим количество элементов множества s_z. Значит, n_z — натуральное число. Так как имеется $\aleph_{\mu+1}$ множеств $z \in b_1$, существует натуральное число k и множество $b_2 \subseteq b_1$ такое, что $card\ b_2 = \aleph_{\mu+1}$ и для любого $z \in b_2$ имеет место $n_z = k$.

Если $z_1, z_2 \in b_2$, то $s_{z_1} \cap s_{z_2} \neq 0$, так как в обратном случае множества z_1, z_2 имели бы непустое пересечение. Пусть $z \in b_2$, $\alpha \in \bar{\nu}$. Обозначим α_z^1, α_z^2 две сопряженные точки в пространстве c_μ такие, что если $z = (f_1\ f_2)$, то $\alpha_z^1 = f_1'\alpha$, $\alpha_z^2 = f_2'\alpha$. Зафиксируем $z_1 \in b_2$. Существуют $\alpha \in s_{z_1}$ и множество $b_3 \subseteq b_2$, $card\ b_3 = \aleph_{\mu+1}$, такие, что для любого $z \in b_3$ $\alpha \in s_z$. Всех множеств $(\alpha_z^1\ \alpha_z^2)$ для $z \in b_3$ имеется не более $\aleph_{\mu+1}$, следовательно, существуют сопряженные точки $x_1, x_2 \in c_\mu$ и множество b_4 такие, что $b_4 \subseteq b_3$, $card\ b_4 = \aleph_{\mu+1}$ и для любого $z \in b_4$ имеет место $\alpha_z^1 = x_1$, $\alpha_z^2 = x_2$. Оттуда следует $k \neq 1$. (В случае $k = 1$ α являлось бы единственным элементом всех множеств s_x для $x \in b_3$, и так как они попарно различны, не могло бы для бесконечного числа их быть справедливым $\alpha_x^1 = x_1$, $\alpha_x^2 = x_2$.) Допустим, что теорема уже доказана для натурального числа $k-1$. Обозначим символом b_5 следующую систему множеств: $x \in b_5$ в том и только в том случае, если существует $x_1 \in b_4$ удовлетворяющее условию: если $x_1 = (f_1 f_2)$, то $x = (g_1 g_2)$; здесь $g_1' \beta = f_1' \beta$, $g_2' \beta = f_2' \beta$ для $\beta \neq \alpha$, $g_1' \alpha = 0$, $g_2' \alpha = \omega_\mu$.

Очевидно, различным множествам из b_4 сопоставлены различные множества из b_5. Если $x_1, x_2 \in b_4$ не пересекаются, то не пересекаются также им сопоставленные множества из b_5. Следовательно, $card\ b_5 = \omega_{\mu+1}$. Любые два множества из b_5 не пересекаются и для любого $x \in b_5$ $n_x = k-1$. Но это противоречит индукционному предположению.

Следствие. Если $\varphi \in \bar{K}$, то $card\ W(\varphi) \leq \aleph_\mu$. (Если $\alpha \in W(\varphi)$, то прообраз α — открытое множество. Так как $\bar{b}$ вписано в t, найдется в любом таком множестве некоторое множество из $\bar{b}$ и, следовательно, всех этих множеств имеется не более $\aleph_\mu$.)

<u>Лемма 12</u>. Пусть $\psi_0, \psi_1 \in \bar{K}$ такие, что $\varkappa_{\omega_\mu} < \psi_0 < \psi_1 \leq \varkappa_{\omega_\mu + \nu}$ и пусть для почти всех $f \in c_\mu^{\bar{\nu}}$ $\psi_1(f)$ является кардинальным регулярным числом большим ω_μ. Тогда мощность множества $\xi_{\varkappa_{\omega_\mu} \psi_0}$ в модели ∇ меньше мощности $\xi_{\varkappa_{\omega_\mu} \psi_1}$.

<u>Доказательство</u>: Очевидно, первое из обоих множеств является (в смысле модели) частью второго, следовательно, мощность первого не превосходит мощность второго. Допустим, что оба множества имеют в ∇ одинаковую мощность. Это означает, что существует $\psi \in \bar{K}$, являющееся в смысле модели взаимно

однозначным отображением первого множества на второе. Точнее, для любого $\varphi_1 \in \mathcal{A}(\varkappa_{\omega_\mu}\psi_0)$ (соотв. $\varphi_2 \in \mathcal{A}(\varkappa_{\omega_\mu}\psi_1)$) существует в точности одно $\varphi_2 \in \mathcal{A}(\varkappa_{\omega_\mu}\psi_1)$ (соотв. $\varphi_1 \in \mathcal{A}(\varkappa_{\omega_\mu}\psi_0)$) такое, что $\langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle^* \in^* \psi$. Обозначим символом q множество всех $z \in q(\psi_0 \psi_1 \psi \,\S\varkappa_{\omega_\mu}\psi_1, \S\varkappa_{\omega_\mu}\psi_0)$, для которых ψ_1^z — регулярное кардинальное число большее ω_μ, $\omega_\mu \in \psi_0^z \in \psi_1^z \subseteq \omega_\mu + \nu$. Тогда $\cup q \in j$. Положим $dv(\alpha,\beta) = \bar{J}'\langle 1, \bar{J}'\langle 1\alpha\alpha\rangle, \bar{J}'\langle 1\alpha\beta\rangle\rangle$ и определим $z_1 \in q_1 :\equiv: z_1 \in \bar{b} \,\&\, (\exists z)(z_1 \subseteq z \,\&$

$\& \; z \in q \,.\&.\; 1)(\exists \beta, \alpha_1, \alpha_2)(\omega_\mu < \beta < \psi_0^z \,\&\, \omega_\mu < \alpha_1, \alpha_2 < \psi_1^z \,\&$

$\& \; p(z_1)\,\mathrm{Forc}_\epsilon\, dv(\beta\alpha_1)\psi^z \,\&\, p(z_1)\,\mathrm{Forc}_\epsilon\, dv(\beta\alpha_2)\psi^z)$

$\vee\, 2)(\exists \beta_1, \beta_2, \alpha)(\omega_\mu < \beta_1, \beta_2 < \psi_0^z \,\&\, \omega_\mu < \alpha < \psi_1^z \,\&$

$\& \; p(z_1)\,\mathrm{Forc}_\epsilon\, dv(\beta_1\alpha)\psi^z \,\&\, p(z_1)\,\mathrm{Forc}_\epsilon\, dv(\beta_2\alpha)\psi^z)$

$\vee\, 3)(\exists \beta)(\omega_\mu < \beta < \psi_0^z \,\&\, (\bar{p})(\bar{p} \vdash p(z_1) \rightarrow$

$\rightarrow \neg(\exists \alpha)(\omega_\mu < \alpha < \psi_1^z \,\&\, \bar{p}\,\mathrm{Forc}_\epsilon\, dv(\beta\alpha)\psi^z)$

$\vee 4)(\exists \alpha)(\omega_\mu < \alpha < \psi_1^z \,\&\, (\bar{p})(\bar{p} \vdash p(z_1) \rightarrow$

$\rightarrow \neg(\exists \beta)(\omega_\mu < \beta < \psi_1^z \,\&\, \bar{p}\,\mathrm{Forc}_\epsilon\, dv(\beta\alpha)\psi^z)$.

Докажем, что $\cup q_1 \notin j$. q_1 — открыто и имеет место $z_2 \subseteq z_1 \in q_1 \,\&\, z_1 \in \bar{b} .\rightarrow.\; z_2 \in q_1$; следовательно, с помощью трансфинитной индукции можно выбрать систему q_1' попарно непересекающихся элементов q_1 такую, что $\cup q_1'$ плотно в $\cup q_1$. Из $\cup q_1 \in j$ вытекало бы также $\cup q_1' \in j$, следовательно, по крайней мере одно из множеств $\cup q_1^1, \ldots, \cup q_1^4$ принадлежало бы j (при этом например $z_1 \in q_1^1 \equiv$ $\equiv z_1 \in q_1' \,\&\, (\exists z)(z \in q \,\&\, z_1 \subseteq z \,\&\, 1))$; пусть например $\cup q_1^1 \in j$. Посредством символов β^z, α_1^z, α_2^z обозначим для $z \in q_1^1$ какие-нибудь числа, удовлетворяющее соотношению 1) и положим $\varphi_1(f) = \beta^z$, $\varphi_{21}(f) = \alpha_1^z$, $\varphi_{22}(f) = \alpha_2^z$ для $f \in z \in q_1$; $\varphi_1(f) = \varphi_{21}(f) = \varphi_{22}(f) = 0$ для f

принадлежащих внутренности дополнения $\cup q_1$ (которая является объединением всех открытых множеств, имеющих пустое пересечение с $\cup q_1$). Имеет место $\varphi_{21} \neq^* \varphi_{22}$ & $\& \langle \varphi_1 \varphi_{21} \rangle^* \in^* \psi \& \langle \varphi_1 \varphi_{22} \rangle^* \in^* \psi$, что однако противоречит $Un_2^* \psi$. Аналогично в остальных случаях.

Следовательно, $\cup q_1 \notin j$. Пусть u является внутренностью дополнения $\cup q_1$, положим $z_1 \in \bar{q} \equiv$ $\equiv (\exists z)(z \in q \& z_1 = z \cap u)$. $\cup \bar{q} \cup \cup q_1$ является открытым плотным множеством, следовательно, $\cup \bar{q} \in j$. Зафиксируем $z \in \bar{q}$ и β такое, что $\omega_\mu < \beta < \psi_0^z$. Пусть $z_1 \in q_\beta^z . \equiv . z_1 \in \bar{b} \& z_1 \leq z \& (\exists \alpha)(p(z_1) \, Forc_\epsilon \, dv(\beta\alpha) \psi^z)$. Множество $\cup q_\beta^z$ плотно в z , так как в любой открытой непустой части z найдется подмножество из q_β^z . На q_3^z можно единственным образом определить функцию $al'_\beta z_1$ следующим образом: $al'_\beta z_1 = \alpha \equiv p(z_1) \, Forc_\epsilon \, dv(\beta\alpha)\psi^z$. Если $al'_\beta z_1 \neq al'_\beta z_2$, то $z_1 \cap z_2 = 0$, так как обратное противоречит предположению $z_1, z_2 \subseteq z \in \bar{q}$, т.е. $z_1 \cap \cup q_1 = 0$. Значит, из al_β можно выбрать взаимно однозначную функцию $\overline{al_\beta}$ такую, что $W(al_\beta) = W(\overline{al_\beta})$. $\mathfrak{D}(\overline{al_\beta})$ является системой попарно непересекающихся элементов $\bar{b}$, следовательно, $card\, \mathfrak{D}(\overline{al_\beta}) \leq \aleph_\mu$ (см. лемму 11). Оттуда $card\, W(al_\beta) = card\, W(\overline{al_\beta}) \leq \omega_\mu$, и так как ψ_1^z — большее ω_μ регулярное кардинальное число, то $card\,(\bigcup_{\omega_\mu \in \beta \in \psi_0^z} W(al_\beta)) < \psi^z$. Значит, существует ординальное число φ^z такое, что $\omega_\mu < \varphi^z < \psi_1^z \&$ $\& \, al'_\beta z_1 < \varphi^z$ для любого $z_1 \in q_3$ и β удовлетворяющего неравенствам $\omega_\mu < \beta < \psi_0^z$. Положим $\varphi(f) =$ $= \varphi^z$ для $f \in z \in \bar{q}$, $\varphi(f) = 0$ для $f \in \cup q_1$. Имеет место $\varphi \in \bar{K}$, $\varkappa_{\omega_\mu} < \varphi < \psi_1$, следовательно, найдется φ_1 такое, что $\varkappa_{\omega_\mu} < \varphi_1 < \psi_0 \& \langle \varphi_1 \varphi \rangle^* \in^* \psi$.

Раздробим систему $\bar{q}$ по лемме 1 III главы еще по отношению к функционалам φ, φ_1. Положим

$z \in q_2 \equiv z \in \bar{\bar{q}} \;\&\; \varphi_1^z < \varphi^z \;\&\; p(z)\, Forc_\varepsilon\, dv\, (\varphi_1^z \varphi^z)\, \psi^z$.

Имеет место $\cup q_2 \in j$; возьмем какое-нибудь $z \in q_2$ и обозначим $\varphi_1^z = \beta$. Так как $z \cap \cup q_1 = 0$, то $(\exists z_1)(z_1 \equiv z \;\&\; z_1 \in \bar{b} \;\&\; p(z_1)\, Forc_\varepsilon\, dv\, (\beta, al'_\beta z_1)\psi^z$; но $p(z_1) \vdash \vdash p(z)$, значит $p(z_1)\, Forc_\varepsilon\, dv\, (\beta \varphi^z)\, \psi^z$; при этом $al'_\beta z_1 < \psi^z$. Следовательно, мы получили противоречие с $z_1 \notin q_1$ (см. 1) из определения q_1). Тем самым доказано, что функционал ψ не мощет существовать.

Лемма 13. Утверждение предыдущей леммы справедливо и в предположении, что для почти всех $f \in C_\mu^{\bar{\nu}}$ $\psi_1(f)$ является нерегулярным кардинальным числом.

Доказательство: В этом случае, очевидно, множество $\xi \varkappa_{\omega_\mu} \psi_1$ является объединением в смысле модели всех отрезков $\xi \varkappa_{\omega_\mu} \psi_0$ таких, что $\psi_0 < \psi_1$ и $\psi_0(f)$ является для почти всех f регулярным кардинальным числом меньшим $\psi_1(f)$. Следовательно, $\xi \varkappa_{\omega_\mu} \psi_1$ не эквивалентно никакому своему собственному отрезку в смысле модели ∇.

Следствие. В предположениях предыдущих лемм, если $\psi_1(f)$ для почти всех f является нерегулярным кардинальным числом, то тип полного упорядочения множества $\xi \varkappa_{\omega_\mu} \psi_1$ посредством отношения $\varkappa_{\lambda_1}$ является в смысле модели ∇ нерегулярным кардинальным числом.

Определение. Обозначим символом r_1 отношение на $\bar{\nu}$ такое, что $\langle \alpha \beta \rangle \in r_1 \equiv F'\alpha \in F'\beta$; здесь F — функция Геделя. Обозначим символом λ_2 число $Y'3$.

Лемма 14. $\varkappa_{\lambda_2}$ является отношением на множестве $\xi \varkappa_{\omega_\mu} \varkappa_{\omega_\mu + \nu}$ в модели ∇.

В дальнейшем мы будем предполагать, что ν — кардинальное число.

<u>Замечание</u>. Пусть $\omega_\alpha \in \nu$, пусть β является ординальным числом, мощность которого равняется ω_α. Существует тогда $\gamma \in \nu$ такое, что $F'\gamma$ является взаимно однозначным отображением множества ω_α на множество β. Существование такого γ следует из результатов работы [G]. Любое взаимно однозначное отображение между ω и β является подмножеством $\omega_\alpha \times \beta$. Число этого множества меньше $\omega_{\alpha+1}$, следовательно, оно не превосходит ν. Оттуда вытекает, что также число любого подмножества этого множества меньше $\omega_{\alpha+1}$. Этот факт можно, конечно, записать посредством отношения κ_1 вместо отношения $\in$ так как κ_1 на ν изоморфно $\in$ на $F''\nu$.

<u>Лемма 15</u>. Пусть $\varphi \in \overline{K}$, $\varkappa_{\omega_\mu} < \varphi < \varkappa_{\omega_\mu+\nu}$. Если для почти всех $f \in C_\mu^{\bar\nu}$ $\varphi(f)$ не является кардинальным числом, то тип упорядочения множества $\xi\varkappa_{\omega_\mu}\varphi$ в модели ∇ не является кардинальным числом модели ∇.

<u>Доказательство</u>: Для $x \in Q(\varphi, \varkappa_{\lambda_1}, \varkappa_{\lambda_2}, \xi, \varkappa_{\omega_\mu}, \varphi, \varkappa_{\omega_\mu}, \varkappa_{\omega_\mu+\nu})$ положим $x \in Q_0$ в том и тоьлко в том случае, если $\omega_\mu \in \varphi^x \in \omega_\mu + \nu$ и φ^x не является кардинальным числом. Тогда $\cup Q_0 \in j$.

Обозначим символом ψ_0^x первое кардинальное число, мощность которого равняется мощности ψ^x, символом ψ_1^x первое кардинальное число, мощность которого больше мощности φ^x, символом ψ^x первое ординальное число такое, что $F'\psi^x$ является взаимно однозначным отображением множества ψ_0^x на φ^x. Имеет место $\psi_0^x \in \varphi^x \in \psi^x \in \psi_1^x \subseteq \omega_\mu + \nu$. Определим функционалы ψ_0, ψ_1, ψ посредством предписания

$\psi_0(f)=\psi_0^x$, $\psi_1(f)=\psi_1^x$, $\psi(f)=\psi^x$ для $f\in x\in Q_0$, $\psi_0(f)=$ $=\psi_1(f)=\psi(f)=0$ для f принадлежащего внутренности дополнения $\cup Q_0$.

Очевидно $\psi_0, \psi_1, \psi \in \bar{K}$ и имеет место $\psi_0 < \varphi < \psi_1$, $\psi_0 < \psi < \psi_1$. Мощность множества $\xi \varkappa_{\omega_\mu} \psi_0$ в модели ∇ равняется мощности множества $\xi \varkappa_{\omega_\mu} \varphi$, так как из функционала ψ легко можно получить взаимно однозначное отображение этих множеств.

<u>Замечание</u>. Символом ν^* обозначим ординальное число модели ∇, являющееся типом упорядочения $\varkappa_{\lambda_1}$ множества $\xi \varkappa_{\omega_\mu} \varkappa_{\omega_\mu+\nu}$ в модели ∇. Легко можно доказать, что отношение $\varkappa_{\lambda_2}$ на множестве $\xi \varkappa_{\omega_\mu} \varkappa_{\omega_\mu+\nu}$ изоморфно отношению $\in^*$ на множестве $W^*(F^* \upharpoonright^* \nu^*)$ в модели ∇ (F^* — функция Геделя в модели ∇).

<u>Доказательство</u> ведется по индукции в модели ∇ и достаточно рассмотреть девять частных случаев.

Следствие. Если $\omega_\mu = \omega_0$, то кардинальные числа модели ∇ меньше ν^*, совпадают с кардинальными числами модели Δ^* (т.е. модели Δ, построенной в модели ∇).

Следствие. Если $\omega_\mu \in \nu$ и ν больше эксорбитантного числа, то ν^* является ординальным числом модели ∇ большим эксорбитантного числа в смысле модели.

<u>Замечание</u>. Ординальные (соотв. кардинальные)числа модели ∇, которые меньше ν^* изоморфны ординальным (соотв. кардинальным) числам соответствующей подмодели ультрапроизведения (см. [V 2], [V 3]). Итак, если $\nu = \omega_\alpha$, то мы в каком-то смысле правы обозначить число ν^* в модели ∇ посредством ω_α.

Теорема 1. Если положить $\nu = \omega_\alpha$, $\omega_\mu = \omega_0$ и $\alpha = 2$ (соотв. $\alpha = 3, 4, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \omega_1, \ldots$) то в модели ∇ справедливо неравенство $2^{\aleph_0} \geq \aleph_\alpha$.

Теорема 2. Пусть $\omega_\mu = \omega_0$, и $\nu = \omega_\alpha$ — эксорбитантное число. Тогда в модели ∇ $2^{\aleph_0}$ не меньше эксорбитантного числа модели ∇.

Замечание. Вопрос о том, имеет-ли в модели ∇ место аксиома выбора, мы до сих пор оставляли в стороне. Если бы аксиома выбора не имела место в ∇, то мы можем в ∇ построить модель аналогичную модели Δ Геделя, с той лишь разницей, что в Δ включим сначала все элементы множеств $\xi \varkappa_{\omega_\mu} \varkappa_{\omega_\alpha}$ (см. [L]). В таким образом построенной модели аксиома выбора имеет место. Так как кардинальные числа меньше ν^* абсолютны, соответствующее неравенство для континуума останется в силе.

Замечание. Для построения моделей, в которых например $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, мы воспользуемся результатами Хаинала (Hajnal [Hnl]). В наших моделях выполнено только $2^{\aleph_0} \geqq \aleph_2$.

Список уключений от обозначений Геделя.

В работе используются обозначения из [G] (см. указатель на стр. 63 - 64, [G]) за исключением следующего:

$\cup, \cap$ - объединение и пересечение классов (вместо $+$, $\cdot$),

$\bigcup x$ - объединение множества (вместо $\mathfrak{S}(x)$),

$\bigcup_{t \in a} x_t$ - объединение множеств x_t (по Геделю: $x \, Fn \, a$, $\bigcup_{t \in a} x_t = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(x))$.

(Замечание: $\bigcup x = \bigcup_{t \in x} t$)

$\bigcap_{i=1}^{k} x_i$ - пересечение множеств x_i (обычное значение)

$\bar{\mathfrak{p}}$ — черта не означает конструктивное множество

$\varphi, \psi, \xi, \ldots$ — переменные для множеств — функций, областью определения которых является C .

Замечание: Фразу "Если $k \in \omega_0$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \bar{K}$, то ..." надо понимать не в смысле неформального разъяснения формулы, начинающейся кванторами в числе k (k является не метаматическим натуральным числом, а только лишь элементом множества ω_0), а в смысле неформального разъяснения формулы, начинающейся следующим образом:

$(h)(\mathrm{Fnc}\, h \,\&\, \mathfrak{D}(h) \in \omega_0 \,\&\, (i)(i \in \mathfrak{D}(h) \rightarrow h'i \in \bar{K}).\rightarrow.\ldots).$

THE INDEPENDENCE OF THE CONTINUUM HYPOTHESIS

Petr VOPĚNKA

S U M M A R Y .

The main result of this paper is a proof that the continuum hypothesis cannot be derived from the axioms of the set theory of Bernays-Gödel (if the last is consistent).

We denote by Σ the set theory of Bernays-Gödel with the axioms of the groups A - D, Σ^* the theory Σ with the axiom of choice, Σ_C the theory Σ^* with the generalized continuum hypothesis and Σ_{NC} the theory Σ^* with the negation of the continuum hypothesis (i.e. $\neg 2^{\aleph_0} = \aleph_1$).

This paper is closely related to a result of P.J.COHEN ([Coh 1],[Coh 2]). The result of Cohen can be looked at in two different ways (see the discussion in the end of [Coh 2]):

1) Either as a construction of a metamathematical model, which is a system of objects (for example: the objects are

formulas, that is finite sequences of letters). In this system, a relation $\in$ is defined and the axioms of Σ_{NC} are true; we must assume that the axioms of the set theory hold for the systems of the metamathematical objects;

2) or as a proof of a relative consistancy of the negation of the continuum hypothesis with the axioms of Σ^* in the same way as in [G] the relative consistency of the generalized continuum hypothesis has been proved. The proof sketched by Cohen assumes, except of the axioms of set theory, that there exists a standard strongly regular model (mathematical, see for example [Sh] or [R]) x). The last condition is satisfied, if e.g. there exists an inaccessible cardinal number.

The proof of the consistency of Σ_{NC} given in this paper is as general as the proof of the consistency of Σ_C in [G]. Moreover, it does not assume the existence of a standard strongly regular model. To a given proof of a contradiction in Σ_{NC}, we can find effectively a proof of a contradiction in Σ^*. We prove here also the consistency of the following assumptions:

1) $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (respectively $\aleph_3, \aleph_4, \dots, \aleph_{\omega_0+1}, \dots, \aleph_{\omega_1+1}, \dots$) .

2) (Under the assumption of the existence of an inaccessible cardinal number):

---

x) The theorem by Löwenheim-Skolem does not say anything about the existence of such a model. The non-existence of it is relative consistent.

$\aleph_\alpha$ is an inaccessible cardinal number, $2^{\aleph_0} > \aleph_\alpha$.

Thus, there exists an inaccessible cardinal number, which is not strongly inaccessible.

In Chapter I. a formalization of the notion "forcing" by Cohen is given. We define a notion " p is a condition" and four normal classes $Forc_\in$, $Forc_\notin$, $Forc_\neq$, $Forc_=$. The elements of these classes are triples $\langle p \alpha \beta \rangle$, where p is a condition and α , β are ordinal numbers.

Chapter II. deals with the generalized Cantor discontinuums and their topological products. A space $\langle c, t \rangle$ and formulas $f\ Forc_\in \alpha\ \beta$, $f\ Forc_\notin \alpha \beta$, $f\ Forc_\neq \alpha \beta$, $f\ Forc_= \alpha \beta$, where $f \in c$, are defined. For given ordinal numbers α , β , the set $\{f | f\ Forc_\in \alpha \beta \vee f\ Forc_\notin \alpha \beta\}$ is an open dense subset of c (similarly for $=$, $\neq$). We denote by j an ultrafilter containing all open dense subsets of c .

A class $\bar{K}$ of functionals is defined in Chapter III. Each of these functionals is defined on an open dense subset of c , its values are the ordinal numbers and the counterimage of each ordinal number is an open subset in c . A predicate $\in^*$ is defined for these functionals in the following way:

$$\varphi \in^* \psi \equiv [\{f | f\ Forc_\in \varphi(f) \psi(f)\} \in j] .$$

It is proved that the relation $\bar{E}$ ($\langle \varphi \psi \rangle \in \bar{E} \equiv \varphi \in^* \psi$) is weakly internal, weakly closed, almost regular, almost universal etc., i.e. we can define the model ∇ of the set theory Σ .

We prove in Chapter IV. that ∇ is a model of Σ_{NC} (also model for Σ^* with $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ etc.).

It was P. Hájek who formalized the notion of forcing (Chapter I.), and helped during the preparing of this paper.

I thank him very much for it and also for valuable remarks concerning this work.

The paper was read and discussed in the seminarium of the set theory on the Charles University, Prague, during April 1964.

Литература:

[G] K. GÖDEL, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, Annals of Math. Studies 3. Princeton, 1940.

[Coh 1] P.J. COHEN, The independence of the axiom of choice, Stanford University, 1963.

[Coh 2] P.J. COHEN, The independence of the continuum hypothesis I.,II., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 50(1963), No 6, 51(1964), No 1 .

[V 1] P. VOPĚNKA, Модели теории множеств, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 8 (1962), 281 - 292.

[V 2] P. VOPĚNKA, Построение моделей теории множеств методом ультрапроизведения, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 8(1962), 293-304.

[V 3] P. VOPĚNKA, Подмодели моделей теории множеств, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 10(1964).

[H] P. HÁJEK, Die durch die schwach inneren Relationen gegebenen Modelle der Mengenlehre, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 10 (1964).

[L] A. LÉVY, A generalization of Gödel's notion of constructibility, The Journal of Symbolic Logic 25(1960), No 2.

[Hnl] A. HAJNAL, On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 2(1956), 131-136.

[R] L. RIEGER, A contribution to Gödel's axiomatic set theory, Czechoslovak Math. J., 7(82)(1957), No 3.

[Sh] J.C. SHEPHERDSON, Inner models for set theory I., J. Symb.Logic 16(1951).

Исправления

стр. 3 в определении 7 добавить:

$$max(\alpha,\beta) < Y'0 \rightarrow \bar{J}'\langle i\alpha\beta\rangle = J_0\langle i\alpha\beta\rangle$$

стр. 19 лемма 6: Тривиальный случай $x_1 = 0 \,\&\, x_2 = \omega_\mu$ нужно рассмотреть отдельно.

стр. 21 лемма 4: Тривиальный случай

$(\alpha \in \bar{\nu})(f_1'\alpha = 0 \,\&\, f_2'\alpha = \omega_\mu)$

нужно рассмотреть отдельно.