Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Jiří Jelínek

# Sur le produit simple de deux distributions

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 5 (1964), No. 4, 209--214

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104976

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
5, 4(1964)

# SUR LE PRODUIT SIMPLE DE DEUX DISTRIBUTIONS x)

J. JELÍNEK, Praha

Nous considérons les distributions réelles définies sur une partie ouverte $G$ de l'espace euclidienne $E^r$. D'après [1] nous prenons une distribution $f$ comme une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}_G$. Nous désignons la valeur de cette forme dans le point $\varphi \in \mathcal{D}_G$ par $\int f(x)\,\varphi(x)\,dx$ ou $\int f\varphi$. Dans [2] le produit simple de deux distributions $f$, $g$ sur une partie ouverte $G$ de $E^r$ est défini de la manière qui ne diffère pas essentiellement de celle-ci:

$$f(x)\,g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x)\,g_n(x)$$

où $g_n$ est une suite régulière convergente à $g$, si cette limite existe indépendante au choix de la suite régulière $g_n$.

La distribution $g_n = g * \rho_n$, où $\rho_n$ est une suite régulière convergente à $\delta$, n'y est pas définie sur l'ensemble $G$, mais seulement sur un ouvert $G_n \subset G$. Mais ce ne fait aucune difficulté parce que tout compact $K \subset G$ est contenu dans presque tous les $G_n$.

On peut facilement prouver que le produit simple ne diffère pas de celui d'après les définitions usuelles dans ces cas-ci:

1. $f$ est de la forme $D^p\mu$ où $\mu$ est une mesure,

---

x) Le texte complet sera publié dans Čech.mat.ž.

$p \geqq 0$ (un système d'entiers), $g$ est une fonction aux dérivées $D^q g$ continues pour tous les $q \leqq p$, $q \geqq 0$.

2. $f$ est une fonction mesurable et bornée, $g$ est une fonction localement intégrable.

3. $f$ et $g$ sont des fonctions intégrables qui sont des éléments d'espaces d'Orlič duals.

4. $x = (y, z)$, $f(x) = f_1(y)$, $g(x) = g_1(z)$. $f(x)\, g(x)$ est alors le produit direct $f_1(y) \times g_1(z)$.

Remarque 1. L'exemple cité à la fin de cette note montre que le produit simple de deux fonctions localement intégrables peut être une distribution qui n'est pas une fonction. Même le produit dans lè sens usuel des fonctions en question est une fonction intégrable.

Le contenu de cette note est formé par deux caractérisations du produit simple de deux distributions (les théorèmes 1 et 2). A la fin de cette note, il y a quelques remarques sur l'associativité du produit simple.

Théorème 1. Soient $f$, $g$ deux distributions définies (au moins) sur une partie ouverte $G$ de l'espace $E^r$. Pour l'existence du produit simple $fg$ sur $G$, il est nécessaire et suffisant qu'il y a un ouvert $H$ dans l'espace $(E^r)_x \times (E^r)_y$, $H \supset (G)_x \times O_y$, de sorte que $f(x)\, g(x - y)$ est une distribution qui est sur $H$ une fonctiom localement intégrable par rapport à la variable $y$ continue dans le point $y = 0$. Dans ce cas $f(x)\, g(x)$ est la section de la distribution $f(x)\, g(x - y)$ sur $G$ dans le point $y = 0$.

Remarque 2. Le produit simple de la forme $f(x)\, g(x - y)$ est défini pour des distributions quelconques $f$, $g$ ; on peut le définir de la manière classique par la formule:

$$\int f(x)\, g\,(x-y)\, \varphi\,(x, y)\, d\,x\, d\,y =$$
$$= \int f(x)\, [\int g(x-y)\, \varphi\,(x, y)\, d\,y]\, d\,x$$
car pour $\varphi\,(x, y) \in (\mathcal{D})_{x,y}$ on a $\int g(x-y)\, \varphi\,(x, y)\, d\,y \in$ $\in (\mathcal{D})_x$ .

Remarque 3. L'énoncé "une distribution $F(x, y)$ (définie au moins sur $H$ ) est sur $H$ une fonction localement intégrable par rapport à $y$ " signifie que pour tout $\varphi \in (\mathcal{D})_x$ , $\int F(x, y)\, \varphi\,(x)\, d\,x$ est une distribution qui est sur l'ensemble $\{y\ ;\ \text{support}\ \varphi \times (y) \subset H\}$ une fonction localement intégrable. De même on peut définir cet énoncé pour une fonction distributionnelle $F_y(x)$ où pour tout $y$ pour lequel l'ensemble $\{x\ ;\ (x, y) \in H\}$ n'est pas vide, $F_y(x)$ est une distribution sur cet ensemble. L'équivalence de cette définition à celle qui est citée dans [3] est montrée dans [4]. De la façon analogique on définit la continuité de $F(x, y)$ par rapport à $y$ et d'autres propriétés.

Remarque 4. Par un calcul facil on peut vérifier que, dans le cas où $\rho_n$ est une suite régulière convergente à $\delta$, on a pour $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\iint f(x)\, g\,(x-y)\, \varphi\,(x)\, d\,x\, \rho_n(y)\, d\,y =$$
$$= \int [\,g_n(x)\, f(x)]\, \varphi\,(x)\, d\,x\ ,$$
où $g_n = g * \rho_n$ est une suite régulière convergente à $g$ .

Théorème 2. Soient $f, g, h$ des distributions sur une partie ouverte $G$ de $E^r$ . Pour qu'on ait $h = fg$ , il est nécessaire et suffisant qu' à chaque intervale compact $K$ dans $G$ $(\text{int}\ K \neq \emptyset)$ et à chaque voisinage du zéro $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{D}'_K$ il existe $\lambda > 0$ de sorte que $\psi_1(x)\ ,\ \psi_2(x) \in \mathcal{D}_{\{|x| \leq \lambda\}}$ , $\psi_1 \geq 0\ ,\ \psi_2 \geq 0\ ,\ \int \psi_1 = \int \psi_2 = 1 \Rightarrow h - (f * \psi_1)(g * \psi_2) \in \mathcal{U}$ (naturellement on prend les distributions du second membre seulement sur $K$ ).

Pour démontrer le théorème 1 j'ai usé les théorèmes suivants concernant les distributions de deux variables.

Théorème 3. Soit $H$ un ouvert dans $(E^r)_x \times (E^s)_y$ , et soit $f(x, y)$ une distribution qui est sur l'ensemble $H$ une fonction continue par rapport à la variable $y$ . Alors il existe une fonction distributionnelle $f_y(x)$ sur $H$ , continue par rapport à $y$ et telle qu'on a $f_y(x) = f(x, y)$ sur $H$ . Par ces conditions la fonction distributionnelle $f_y(x)$ est bien déterminée.

Remarque 5 . La dernière égalité signifie qu on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_H$

$$\int f(x, y)\, \varphi(x, y)\, d x\, d y = \int \left[\int f_y(x)\, \varphi(x, y)\, d x\right] d y .$$

(Dans le second membre l'intégrale extérieure est celle d'une fonction continue dans le sens usuel).

Théorème 4. Soit $f(x, y)$ une distribution sur $P \times Q$ où $P \subset (E^r)_x$ , $Q \subset (E^s)_y$ sont des intervalles compacts à l'intérieur non-vide. $f(x, y)$ soit, par rapport à $y$ , une fonction mesurable et bornée. Il existe alors une fonction distributionnelle $f_y(x)$ ($x \in P$ , $y \in Q$ ) de manière que $f_y(x) = f(x, y)$ sur $P \times Q$ , l'ensemble des distributions $\{f_y(x)\ ;\ y \in Q\}$ est borné dans $\mathcal{D}'_P$ et si pour un $\varphi \in \mathcal{D}_P$ la fonction $\left|\int f(x, y)\, \varphi(x)\, d x\right|$ est bornée par le nombre $a$ sur un intervalle $Q^* \subset Q$ , int $Q^* \neq \emptyset$ (dans le sens de l'égalité des fonctions et des distributions), on a le même pour la fonction $\left|\int f_y(x)\, \varphi(x)\, d x\right|$ .

Théorème 5. Soit $f$ une distribution sur $P \times Q$ où $P \subset (E^r)_x$ , $Q \subset (E^s)_y$ sont des intervalles compacts à l'intérieur non-vide, $y_0 \in Q$ . Supposons qu' à chaque $\varphi \in \mathcal{D}_P$

il y ait un intervalle $I(\varphi)$ étant un voisinage du point $y_0$, dans Q de sorte que sur $I(\varphi)$, $\int f(x, y)\, \varphi(x)\, d\, x$ est une fonction mesurable et continue dans le point $y_0$. Il y a alors un intervalle $I$ étant un voisinage du point $y_0$ dans Q de sorte que sur $P \times I$, $f(x, y)$ est égal à une fonction distributionnelle $f_y(x)$ qui est, par rapport à la variable $y$, bornée et continue dans le point $y = 0$.

Théorème 6. Soient $f$, $g$ des distributions telles qu'il existe $fg$ sur un ouvert $G \subset E^r$. Soit $\mu$ une mesure qui est une fonction infiniment dérivable sauf le point 0 de sorte qu'il existe le produit de composition $g * \mu$ sur $G$. Alors il existe aussi $f.(g * \mu)$ sur $G$.

Remarque 6. La loi d'associativité n'est pas valable pour le produit simple de distributions, c'est-à-dire on n'a pas nécessairement $(fg)h = f(gh)$ même que les deux membres ont un sens, comme le montre un exemple classique sur $E^1$ : $f = \delta$, $g(x) = x$, $h(x) = \frac{1}{x}$ (une pseudofonction). Mais dans l' exemple cité, il n'existe pas $fh$. Le travail [2] contient des conditions suffisantes fondées sur les ordres des distributions $f$, $g$, $h$, pour la validité de la loi d'associativité. Mais il en résulte aussi l'existence $fh$, il pourrait donc sembler que l'existence $fh$ seule fût une condition suffisante pour la validité de la loi d'associativité. Mais ce n'est pas vrai comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soit $f$, $g$ des fonctions sur $E^1$ déterminées par les formules-ci:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}\,.\,(1-\log x)} & \text{s'il y a un entier } n \geqq 2 \text{ pair de sorte que } x \in (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}) \\ 0 & \text{pour les autres } x, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}\,.(1-\log x)} & \text{s'il y a un entier } n \geqq 2 \text{ pair de sorte que } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{pour les autres } x\,. \end{cases}$$

Alors, si nous prenons $\sqrt{f}$ dans le sens usuel, on a $\sqrt{f}\,.\,\sqrt{f} = f$, $\sqrt{f}\,.\,g = 0$ dans le sens usuel et aussi d'après la définition du produit simple de distributions, mais on a $f\,.\,g = \delta\,.\,\frac{1}{4}\log 2$ ( $\delta$ est la mesure de Dirac) d'après la définition du produit simple de distributions. On n'a pas donc

$$(\sqrt{f}\,.\,\sqrt{f})\,.\,g = \sqrt{f}\,.\,(\sqrt{f}\,.\,g)$$

Même pour des mesures $\mu$, $\nu$ quelconques, le produit simple $[(\sqrt{f} * \mu)(\sqrt{f} * \nu)]\,.\,g$ a un sens; cela signifie que la supposition si forte ne suffit pas à la validité de la loi d'associativité.

Théorème 7. Soient $f$, $g$, $h$ des distributions sur $E^r$, $G$ un ouvert dans $E^r$. Supposons que pour chaque mesure $\mu$ au support contenu dans un voisinage du point $0$ suffisament petit il existe $[(f * \mu)\,.\,g]\,.\,h$ sur $G$ et qu'il existe $gh$ sur $G$. Soit $i$ une fonction intégrable sur $E^r$, infiniment dérivable sauf le point $0$ de sorte qu'il existe $f_1 = f * i$. On a alors $(f_1\, g)\,.\,h = f_1\,.\,(g\,h)$ sur $G$.

Travaux cités:


[1] SCHWARTZ, Théorie des distributions, Paris 1950.

[2] MIKUSINSKI, Criteria of the existence and of the associativity of the product of distributions, Studia Mathematica XXI, p.253-259.

[3] LOJASIEWICZ, Sur la fixation des variables dans une distribution, Studia Mathematica XVII, p.1-64.

[4] JELÍNEK, Les fonctions distributionnelles localement intégrables, Čech.mat.ž.T.12(87), No 4, p.477-485.