Alois Švec
Contact des systèmes des sousgroupes d'un groupe de Lie

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 2 (1961), No. 4, 3–5

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104892`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
2, 4 (1961)

CONTACT DES SYSTÈMES DES SOUSGROUPES D'UNE GROUPE DE LIE

Alois ŠVEC, Praha

Soit: V une variété analytique, $\mathcal{G}$ une groupe de Lie des transformations biunivoques de V en elle - même; g l'algèbre de Lie de la groupe $\mathcal{G}$; $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t)$, $t_1 < t < t_2$, un système 1-paramètrique des sousensembles de la variété V ; $\mathcal{H}(t)$ la groupe maximale des éléments de $\mathcal{G}$ pour lesquels les transformations correspondantes laissent fixe $\mathcal{R}(t)$; $f(t) \subset g$ l'algèbre de Lie de la groupe $\mathcal{H}(t)$; $\dim f(t) \geq 1$ ne dépend pas de t ; $\mathcal{S}(t)$ un système aux propriétés analogues aux celles de $\mathcal{R}(t)$ (avec les groupes $\mathcal{K}(t)$ et les algèbres $k(t)$); $\dim f(t) = \dim k(t)$

<u>Définition 1</u>. Soient: V_n un espace vectoriel; $y_1, \ldots, y_n$ sa base; $V'_m(t)$ et $V''_m(t)$ deux systèmes de ses sousespaces. Le système $V'_m(t)$ est r-fois différentiable si dans chaque $V'_m(t)$ il existe la base $y'_a(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_{ai}(t)\, y_i$, $a = 1, \ldots, m$, de sorte que $\alpha'_{ai}(t)$ soient r-fois différentiables. Les systèmes $V'_m(t)$, $V''_m(t)$ r-fois différentiables ont un contact d'ordre s $(s \leq r)$ à l'espace $V'_m(t_0)$, $t_1 < t_0 < t_2$, si dans chaque $V'_m(t)$ ou $V''_m(t)$ resp. il existe la base $y'_a(t)$ ou $y''_a(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha''_{ai}(t)\, y_i$ resp. de sorte que

$\alpha'^{(p)}_{ai}(t_0) = \alpha''^{(p)}_{ai}(t_0)$ pour $a = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, n$;

$p = 0, 1, \ldots, s$;

$\alpha'^{(s+1)}_{ai}(t_0) \neq \alpha''^{(s+1)}_{ai}(t_0)$ pour certaines valeurs d'a, i.

<u>Définition 2</u>. Le système $\mathcal{R}(t)$ est $\varkappa$-fois différentiable si le système $f(t)$ de sousespaces de l'espace $\mathcal{Y}$ est $\varkappa$-fois différentiable. Les systèmes $\mathcal{R}(t)$ et $\mathcal{T}(t)$ $\varkappa$-fois différentiables ont un contact d'ordre s $(s \leq \varkappa)$ à l'ensemble $\mathcal{R}(t_0)$ si les systèmes $f(t)$ et $k(t)$ ont un contact d'ordre s à l'espace $f(t_0)$.

<u>Définition 3</u>. Soit A_n un espace affin; $P, \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n$ sa base; soient données deux courbes
$X(t) = P + \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\mathcal{J}_i$, $Y(t) = P + \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\mathcal{J}_i$.
La courbe $X(t)$ est $\varkappa$-fois différentiable si les fonctions $x_i(t)$ sont $\varkappa$-fois différentiables. Les courbes ont un contact d'ordre s $(s \leq \varkappa)$ au point $X(t_0)$ si

$x_i^{(p)}(t_0) = y_i^{(p)}(t_0)$ pour $i = 1, \dots, n$; $p = 0, 1, \dots, s$;
$x_i^{(s+1)}(t_0) \neq y_i^{(s+1)}(t_0)$ pour certaine valeur d'i.

<u>Théorème</u>. Soient: $V = A_n$; $\mathcal{G} = \mathcal{Cl}$ la groupe de Lie des affinités régulières d'espace A_n en soi-même; $\mathcal{R}(t) = X(t)$ et $\mathcal{T}(t) = Y(t)$ deux courbes dans A_n. Alors les définitions 2 et 3 du contact des deux courbes coïncident. Si la courbe $X(t)$ est $\varkappa$-fois différentiable d'après la définition 2 (ou 3 resp.), alors elle est $\varkappa'$-fois différentiable d'après la définition 3 (ou 2 resp.) où $\varkappa' \geq \varkappa$.

On le démontre à l'aide du

<u>Lemma</u>. L'algèbre de Lie de la groupe $\mathcal{Cl}$ est isomorphe à l'espace vectoriel Λ_{n^2+n} qui se compose des éléments $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}$ ou $\mathbb{A}$ ou $\mathbb{B}$ resp. sont les matrices des types $(n \times n)$ ou $(n \times 1)$ resp. et où
$\{\mathbb{A}, \mathbb{B}\} + \{\mathbb{A}', \mathbb{B}'\} = \{\mathbb{A} + \mathbb{A}', \mathbb{B} + \mathbb{B}'\}$,
$[\{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}, \{\mathbb{A}', \mathbb{B}'\}] = \{\mathbb{A}'\mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{A}', \mathbb{A}'\mathbb{B} - \mathbb{A}\mathbb{B}'\}$.

La sousalgèbre qui correspond à la sousgroupe des affinités qui laissent fixe le point X, est l'ensemble des éléments $\{\mathbb{A}, -\mathbb{A}\,\mathbb{X}\}$ où $\mathbb{A}$ est une matrice arbitraire et $\mathbb{X} = (x_i)$ la matrice du type $(n \times 1)$ où x_i sont les coordonnées du point X . On peut choisir la base $L_{ij}, L_i, i, j = 1, \ldots, n,$ dans Λ_{n^2+n} de sorte que la sousalgèbre considérée a les vecteurs

$y_{ij} = L_{ij} - x_j L_i$ pour sa base.