Miroslav Fiedler

Ueber die qualitative Lage des Mittelpunktes der umgeschriebenen Hyperkugel im n-Simplex

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 2 (1961), No. 1, 3–51

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104885`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
2, 1 (1961)

UEBER DIE QUALITATIVE LAGE DES MITTELPUNKTES DER UMGESCHRIEBENEN HYPERKUGEL IM n - SIMPLEX

Miroslav FIEDLER, Praha

Einleitung. Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, zu untersuchen, wie die Lage des Mittelpunktes des umgeschriebenen Hyperkugel in einem n-Simplex von der Qualität der Innenwinkel des n-Simplexes abhängt. Dabei verstehen wir wie in [3] unter der Qualität eines Innenwinkels seine Eigenschaft, spitz, recht oder stumpf zu sein. Auch die Lage des erwähnten Mittelpunktes unterscheiden wir nur qualitativ, d.h. danach, in welchem Teile derjenigen Zerlegung, in die der zugehörige n-dimensionale euklidische Raum durch die $(n-1)$-dimensionalen Seiten (Hyperebenen) des n-Simplexes zerlegt wird, dieser Mittelpunkt liegt. Diese Problemstellung hat ihre Begründung im Falle $n = 2$, da die qualitative Lage des Umkreismittelpunktes durch die Qualität der Innenwinkel des Dreiecks eindeutig bestimmt ist (im spitzwinkligen Dreieck ist dieser Mittelpunkt ein innerer Punkt des Dreiecks, im rechtwinkligen Dreieck ist er ein (innerer) Punkt der Hypotenuse, im stumpfwinkligen liegt er ausserhalb der Seite gegenüber dem stumpfen Innenwinkel.

In [2] haben wir den Begriff des Graphen eines n-Simplexes eingeführt. Dieser Begriff erlaubt es, die Qualität der Innenwinkel des n-Simplexes vollkommen zu beschreiben: Sind $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}$ die $(n-1)$-dimensionalen Seiten des n-Simplexes, so ist sein Graph derjenige endliche nichtgerichtete Vorzeichengraph x) G mit $n+1$ Knotenpunkten $1, 2, \ldots, n+1$, dessen Knotenpunkte $i, j\ (i \neq j)$ durch eine positive bzw. negative Kante dann und nur dann verbunden

---

x) Jede seine Kante ist mit einem Vorzeichen (+ oder -) versehen. Ausführlicher s. Abschnitt 2.

sind, falls der Innenwinkel der Seiten ω_i, ω_j spitz bzw. stumpf ist; ist dieser Winkel recht, so sind die Knotenpunkte i, j nicht verbunden.

Um die qualitative Lage des Mittelpunktes der umgeschriebenen Hyperkugel (kurz: Umkugel) besser untersuchen zu können, werden wir den Begriff des erweiterten Graphen G_0 eines n-Simplexes folgendermassen einführen: zum "gewöhnlichen" Graphen G des Simplexes fügen wir noch einen Knotenpunkt 0 (Null) hinzu, der mit einem Knotenpunkt $i (i = 1, 2, \ldots, n+1)$ durch eine positive Kante dann und nur dann verbunden ist, falls der Mittelpunkt M der Umkugel im inneren offenen Halbraum (des zugehörigen n-dimensionalen Raumes) liegt, der durch die Seite ω_i bestimmt ist und sämtliche innere Punkte des n-Simplexes enthält; 0 wird mit i durch eine negative Kante verbunden, falls M im äusseren durch ω_i bestimmten (offenen) Halbraum liegt. Dagegen wird 0 mit i nicht verbunden, falls M in ω_i liegt. Sämtliche Kanten zwischen den Knotenpunkten i und $j (i \neq j; i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$ sind in G_0 dieselben wie in G.

In der Arbeit [2] wurde das Problem der Realisierung eines Graphen als des (gewöhnlichen) Graphen eines n-Simplexes völlig gelöst: ein nichtgerichteter Vorzeichengraph (ohne Zweiecke und Schlingen) mit $n+1$ Knotenpunkten ist dann und nur dann Graph eines n-Simplexes, wenn der positive Teil G_+ von G (mit denselben Knotenpunkten wie G und nur den positiven von den Kanten von G) zusammenhängend ist.

Wir werden hier das ähnliche Problem der Realisierung eines Graphen als des erweiterten Graphen eines n-Simplexes für $n = 3$ lösen. Für den allgemeinen Fall werden wir einen Zusammenhang zwischen den erweiterten Graphen und den Matrizen von einem speziellen Typus auffinden. Aus diesem Zusammenhang folgt eine Reihe von Sätzen über die erweiterten Graphen, wie z.B. Sätze über erweiterte Graphen der k-dimensionalen Seiten eines n-Simplexes für $2 \leq k < n$, Sätze über erweiterte Graphen der nicht-stumpfwinkligen Simplexe, deren Umkugelmittelpunkt im

Inneren oder auf dem Rande des Simplexes liegt, usw.

1. Bezeichnungen und Hilfssätze.

In diesem Absatz werden wir einige Bezeichnungen und Hilfssätze aus der Matrizentheorie, aus der Graphentheorie und aus der Geometrie der n-Simplexe im euklidischen Raum zusammenstellen, die wir später brauchen werden. Dabei sind sämtliche Zahlen, die in dieser Arbeit vorkommen, reell.

Zuerst einige Bezeichnungen und bekannte Sätze aus der Matrizentheorie. Für eine feste natürliche Zahl n schreiben wir $N=\{1,2,\dots,n\}$. Es sei $A=(a_{ij})$, $i,j\in N$, eine quadratische Matrix. Wir bezeichnen dann für $\emptyset\neq M_1\subset N$, $\emptyset\neq M_2\subset N$ mit $A(M_1,M_2)$ diejenige Untermatrix von A, die nur Zeilen mit den Indexen aus M_1 und Spalten mit den Indexen aus M_2 enthält. Oft - besonders wenn die Determinanten zur Geltung kommen - werden wir die Anordnung der Indexe in M_1 und M_2 kennen müssen. Dazu führen wir die folgende Bezeichnung ein: $\underline{M_1}$ bedeutet die Anordnung, bei der die Menge M_1 der Grösse der Indexe nach geordnet ist. Falls $M_1\subset N$, $M_2\subset N$, $M_1\cap M_2=\emptyset$ gilt, so bedeutet $\underline{M_1}\cup\underline{M_2}$ eine Anordnung von $M_1\cup M_2$, in der zuerst die Elemente von $\underline{M_1}$ und dann die Elemente von $\underline{M_2}$ in den zugehörigen Anordnungen angeführt sind, während $\underline{M_1\cup M_2}$ bedeutet, dass $M_1\cup M_2$ erst nach der Vereinigung geordnet wird. Oft werden wir - falls es zu keinem Missverständnis führen kann - statt $\{j\}$ kurz j usw. schreiben. Die Determinante einer quadratischen Matrix A bezeichnen wir mit $\det A$.

(1,1). Es sei $A=(a_{ij})$, $i,j\in N=\{1,2,\dots,n\}$ eine reguläre Matrix. Dann gilt x)

$$\det A^{-1}(\underline{M},\underline{M})=\frac{1}{\det A}\det A(\underline{N-M},\underline{N-M}).$$

Beweis. Dies folgt aus einer allgemeineren Relation

---

x) Das Symbol $A^{-1}(M,M)$ bedeutet hier und weiterhin eine Untermatrix von A^{-1}; die inverse Matrix zu $A(M,M)$ wird mit $(A(M,M))^{-1}$ bezeichnet.

über die Unterdeterminanten der inversen Matrix, wie sie z.B. im Buche [5], S. 26, Relation (33) zu finden ist.

(1,2) Definition. Es sei $A=(a_{ij}),\ i,j\in N=\{1,2,\dots,n\},\ M\subset N$. Dann nennen wir die Matrix $P_M=(p_{kl}),\ k,\ l\in N-M$, wo

$$p_{kl}=\det A(\underline{M}\cup k,\ \underline{M}\cup l),$$

die Gausssche Matrix von A bezüglich M.

(1,3) Es sei $A=(a_{ij}),\ i,j\in N=\{1,2,\dots,n\}$, eine reguläre Matrix und für eine Menge $M\subset N$ sei auch $A(\underline{M},\underline{M})$ regulär. Dann ist die Gausssche Matrix $P_M=(\det A(\underline{M}\cup k,\underline{M}\cup l)),\ k,l\in N-M$, der Matrix A bezüglich M wieder regulär und

$$(P_M)^{-1}=\frac{1}{\det A(\underline{M},\underline{M})}\,A^{-1}(\underline{N-M},\underline{N-M}).$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Relation von Sylvester (z.B. [5], S. 35, Relation (30)).

Wir führen noch ohne Beweis die folgende bekannte Ausdrückung des Elementes $p_{kl}=\det A(\underline{M}\cup k,\underline{M}\cup l)$ an:

(1,4) Es sei $A=(a_{ij}),\ i,j\in N$. Ferner sei $M\subset N,\ k,\ l\in N-M$. Dann gilt die Formel

$$\det A(k\cup \underline{M},\ l\cup\underline{M})=a_{kl}\det A(\underline{M},\underline{M})-\sum_{i_1}a_{ki_1}a_{i_1l}\det A(\underline{M-i_1},\underline{M-i_1})+$$
$$+\sum_{(i_1,i_2)}a_{ki_1}a_{i_1i_2}a_{i_2l}\cdot\det A(\underline{M-i_1-i_2},\underline{M-i_1-i_2})-+\dots+(-1)^m\sum_{(i_1,\dots,i_m)}a_{ki_1}a_{i_1i_2}\dots a_{i_ml},$$

wo m die Anzahl der Elemente von M bedeutet, wobei in jeder Summe über sämtliche angeordnete Gruppen $(i_1,\dots,i_s)$ von voneinander verschiedenen Elementen aus summiert wird.

(1,5) Definition. Die Matrix $A=(a_{ij}),\ i,j\in N$ heisst zerlegbar, falls es eine derartige Zerlegung der Menge N: $N=M_1\cup M_2,\ M_1\neq\emptyset,\ M_2\neq\emptyset,\ M_1\cap M_2=\emptyset$ gibt, dass $A(M_1,M_2)$ eine Nullmatrix ist. Sonst heisst A unzerlegbar.

(1,6) Es sei A eine quadratische nichtnegative x) unzerlegbare Matrix. Dann existiert ein positiver Eigenwert c von A derart, dass: 1° c ist einfach, 2° c ist im Betrag grösser oder gleich jedem anderen Eigenwert von A, 3° der zu c gehörige Eigenvektor kann positiv

---

x) Jedes Element von A ist nichtnegativ.

genommen werden, 4° zu keinem anderen Eigenwert von A gehört ein (von Null verschiedener) nichtnegativer Eigenvektor.

Beweis. Folgt aus den Sätzen, die in [5], S.323 u. 331 angeführt sind.

Aus der Graphentheorie werden wir nur einige Grundbegriffe und Sätze brauchen, die den Zusammenhang zwischen den Graphen und Matrizen beschreiben. Zur Bequemliechkeit des Lesers werden wir hier kurz diese Begriffe zusammen - stellen x), ohne sie als Definitionen zu bezeichnen.

Unter einem Graphen werden wir immer einen endlichen nichtgerichteten Graphen verstehen, d.h. eine endliche Menge von Elementen, sog. Knotenpunkten, wobei sich einige nichtgeordnete Paare von verschiedenen Knotenpunkten in einer Relation befinden; man sagt, dass diese Paare durch eine Kante verbunden sind. Bezeichnen wir die Knotenpunktmenge eines Graphen G mit $U(G)$, die Menge der Kanten mit $H(G)$. Falls für zwei Graphen G_1, G_2 gleichzeitig $U(G_1)\subset U(G_2)$ und $H(G_1)\subset H(G_2)$ gilt, so heisst G_1 ein Teilgraph von G_2; man sagt auch, dass G_1 im Graphen G_2 enthalten ist. Ist G ein Graph $U_0\subset U(G)$, so heisst der maximale Teilgraph G_0 von G mit $U(G_0)=U_0$ der auf U_0 induzierte Teilgraph von G. Ist $u\in U(G)$, so heisst die Anzahl der mit u durch eine Kante verbundenen Knotenpunkte in G Grad von u in G. Ein Graph G, dessen sämtliche Knotenpunkte derart in eine Folge $u_1, u_2, \ldots, u_n$ angeordnet werden können, dass $H(G)$ genau die Kanten $u_1u_2, u_2u_3, \ldots, u_{n-1}u_n$ enthält, heisst ein Weg (von u_1 nach u_n oder von u_n nach u_1); falls $n\geq 3$ und falls in $H(G)$ noch genau die Kante u_nu_1 enthalten ist, spricht man von einem Kreis. Ein Graph G heisst zusammenhängend, wenn zu je zwei verschiedenen von seinen Knotenpunkten u_1, u_2 stets ein Teilgraph $W\subset G$ existiert, der einen Weg von u_1 nach u_2 darstellt. Ein Teilgraph

x) Ausführlich sind sie z. B. im Buche von König [7] enthalten.

$G_1 \subset G$ heisst eine Komponente von G, wenn G_1 zusammenhängend ist, dabei aber in keinem anderen zusammenhängenden Teilgraphen von G enthalten ist. Jeden Graphen kann man in seine Komponenten zerlggen und diese Zerlegung ist bis auf die Anordnung eindeutig bestimmt (s. z.B. [7], S. 15). Ein Graph heisst kreislos, falls er keinen Kreis als Teilgraphen enthält. Ein kreisloser zusammenhängender Graph heisst ein Baum. Der Baum ist auch dadurch charakterisiert, dass in ihm zu je zwei von seinen verschiedenen Knotenpunkten genau ein Weg existiert, der diese Knotenpunkte verbindet. Wenn n die Anzahl der Knotenpunkte eines Baumes ist, so ist die Anzahl seiner Kanten gleich $n-1$ (s. z.B. [7], S. 54). Jede Komponente eines kreislosen Graphen ist somit ein Baum. Wenn ein kreisloser Graph n Knotenpunkte und k Komponenten besitzt, so hat er $n-k$ Kanten. Fügt man zu einem solchen Graphen genau eine Kante zwischen zwei in verschiedenen Komponenten liegenden Knotenpunkten hinzu, so wird sich die Anzahl der Komponenten um eins vermindern, wobei der Graph kreislos bleibt. Ein kreisloser Teilgraph K eines zusammenhängenden Graphen G heisst Gerüst von G, falls $U(K)=U(G)$ gilt.

Eine Untermenge $U_1 \subset U(G)$ heisst ein Schnitt des Graphen G, falls der auf der Knotenpunktmenge $U(G)-U_1$ induzierte Teilgraph von G nicht zusammenhängend ist. (Die leere Menge ist somit ein Schnitt jedes nicht zusammenhängenden Graphen.) Falls ein Knotenpunkt eines zusammenhängenden Graphen G zugleich ein Schnitt von G ist, so heisst er die Artikulation von G. Jedem Graphen kann man in folgender Weise den sog. Zusammenhangsgrad zuordnen: Falls in G kein Schnitt existiert, so ist der Zusammenhangsgrad die um 1 verminderte Anzahl der Knotenpunkte in G; gibt es in G Schnitte, so ist er die Anzahl der Knotenpunkte, die im Schnitte mit möglichst kleiner Anzahl der Knotenpunkte enthalten sind. So hat ein zusammenhängender Graph mit mindestens drei

Knotenpunkten, der eine Artikulation besitzt, den Zusammenhangsgrad 1, ein Kreis den Zusammenhangsgrad 2. Dabei gibt es in G keinen Schnitt genau dann, falls je zwei Knotenpunkte in G durch eine Kante verbunden sind; in diesem Fall heisst der Graph vollständig. Jeder seiner Knotenpunkte ist satt, d.h. ist mit jedem anderen Knotenpunkt durch eine Kante verbunden.

Jetzt werden wir drei Sätze aussprechen, die wir später brauchen werden.

(1,7) Jeder kreislose Teilgraph eines Graphen G kann zu einem Gerüst von G ergänzt werden.

Beweis. S. [8], S. 112.

(1,8) Ist G ein zusammenhängender Graph ohne Artikulation und sind u, v, w drei verschiedene Knotenpunkte von G, so existiert ein Weg $u \ldots v \ldots w$ in G.

Beweis. S. [7], S. 227.

(1,9) Sei B ein Baum $M \subset U(B)$. Dann gilt

$$\sum_{i \in M} s_i(B) = m + \ell + k - 1,$$

wo $s_i(B)$ der Grad des Knotenpunktes i, m die Anzahl der Knotenpunkte in M, k die Anzahl der Kanten von B zwischen Knotenpunkten in M und ℓ die Anzahl von Komponenten des auf $U(B) - M$ induzierten Teilgraphen von B ist.

Beweis. Folgt leicht z.B. durch Induktion nach der Anzahl der Knotenpunkte in M.

Unter einem Vorzeichengraphen verstehen wir einen Graphen, dessen jede Kante mit einem Plus - oder Minus - zeichen versehen ist x) (es ist also eine Zerlegung der Kantenmenge in zwei Klassen gegeben, wobei die eine Klasse als positiv, die andere als negativ bezeichnet wird). Wir bezeichnen mit G_+ bzw. G_- den positiven bzw. negativen Teil von G; dabei ist $U(G_+) = U(G_-) = U(G)$. In einem Vorzeichengraphen wird der Begriff des Weges, des Kreises, des Zusammenhanges usw. wie bei dem gewöhn-

---

x) Vgl. den Begriff signed graph bei Harary [6].

-lichen Graphen eingeführt (ohne dass man die Vorzeichen der Kanten berücksichtigt). Zwei Vorzeichengraphen mit derselben Knotenpunktmenge und Kantenmenge, deren gegenseitig entsprechende Kanten entgegengesetzte Vorzeichen haben, heissen <u>zueinander entgegengesetzt</u>.

Wenn nun $A=(a_{ij}),\ i,j\in N=\{1,2,\dots,n\}\ n\geq 2$, eine symmetrische Matrix ist, so verstehen wir unter dem <u>Graphen dieser Matrix</u> einen Graphen mit n Knotenpunkten, die je einer Zeile entsprechen; dabei werden zwei verschiedene Knotenpunkte durch eine Kante dann und nur dann verbunden, falls dasjenige Element von A von Null verschieden ist, welches in der dem ersten Knotenpunkte entsprechenden Zeile und derjenigen Spalte, die zu der dem zweiten Knoten - punkte entsprechenden Zeile symmetrisch liegt, enthalten ist. Wenn die Knotenpunkte mit $1,2,\dots,n$ bezeichnet werden, so gibt es zwischen i und j $(i\neq j)$ eine Kante genau dann, wenn $a_{ij}\neq 0$ ist. Unter dem <u>Vorzeichengraphen der Matrix</u> A verstehen wir wiederum einen Vorzeichengraphen mit den Knotenpunkten $1,2,\dots,n$, dessen Knotenpunkte $i,j,\ (i\neq j)$ durch eine positive (negative) Kante dann und nur dann verbunden sind, falls $a_{ij}>0\ (a_{ij}<0)$ gilt; für $a_{ij}=0$ gibt es keine Kante zwischen i und j .

(1,10) Es sei $A=(a_{ij}),\ i,j\in N=\{1,2,\dots,n\},\ n\geq 2$, eine symmetrische Matrix, für die

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0$$

für jedes $i\in N$ gilt. Es sei G der Graph der Matrix A. Falls $G_1\subset G$, bezeichnen wir mit $\Pi(G_1)$ das Produkt der Zahlen $(-a_{ik})$ für sämtliche Indexpaare $i,k\in N,\ i\neq k$, für deren Kante $(i,k)\in H(G_1)$ gilt. Sei nun

$$\emptyset\neq M\subset N,\ M=\{i_1,i_2,\dots,i_r\}$$

Dann gilt

$$\det \dot{A}(N-M,\ N-M)=\sum_{K\in S(M)}\Pi(K),$$

wo $S(M)$ die Menge sämtlicher kreisloser Teilgraphen von G mit r Komponenten mit der Eigenschaft, dass die Knotenpunkte $i_1,i_2,\dots,i_r$ sich in verschiedenen Komponenten befinden, ist.

Beweis. Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes 6 von [4] .

(1,11) Eine symmetrische Matrix A n-ter Ordnung ist unzerlegbar dann und nur dann, wenn ihr Graph zusammenhängend ist (d.h., wenn er den Zusammenhangsgrad $\geqq 1$ hat). Die Matrix A sowie sämtliche ihre Hauptuntermatrizen $(n-1)$-ter Ordnung sind unzerlegbar dann und nur dann, wenn der Graph von A den Zusammenhangsgrad $\geqq 2$ hat.

Der Beweis folgt leicht aus (1,5) und der Definition des Zusammenhangsgrades eines Graphen.

Wir stellen nun einige Begriffe und Sätze aus der Geometrie der n-Simplexe zusammen. Für jede natürliche Zahl n verstehen wir unter einem n-Simplex eine nichtgeordnete Menge von $n+1$ linear unabhängigen Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ eines euklidischen n-dimensionalen Raumes E_n (den Eckpunkten des n-Simplexes), zusammen mit sämtlichen k-dimensionalen $(1 \leqq k < n)$ linearen Räumen, die durch je $k+1$ von diesen Eckpunkten bestimmt sind. Zwei n-Simplexe nehmen wir als gleich an, wenn eine Isometrie zwischen den zugehörigen euklidischen Räumen existiert, die die Menge der Eckpunkte des ersten Simplexes in die Menge der Eckpunkte des zweiten Simplexes überführt. Es gilt, dass ein n-Simplex durch die Längen sämtlicher Kanten $A_i A_j$ $(i \neq j)$ eindeutig (im angegebenen Sinne der Gleichheit) bestimmt ist. Bezeichnen wir die Quadrate dieser Längen mit

$$e_{ij} = \overline{A_i A_j}^2 \ (i \neq j,\ i,j = 1, \ldots, n+1),\quad e_{ii} = 0,$$

so gilt folgender Satz über die Existenz eines durch diese Zahlen bestimmten n-Simplexes:

(1,12) Die Zahlen $e_{ij} = e_{ji}$ $(i \neq j,\ i,j = 1, \ldots, n+1;\ n \geqq 1)$ sind Quadrate der Längen von Kanten eines n-Simplexes dann und nur dann, wenn (mit $e_{ii} = 0$, $i = 1, \ldots, n+1$)

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j < 0 \quad \text{ist, sobald} \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \quad \text{und}$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \neq 0$ gilt.

Für den Beweis s. z.B. [2], Satz 4.

Es sei nun für ein solches n-Simplex

(1) $$E = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ 1, & 0, & e_{12}, & \dots, & e_{1,n+1} \\ 1, & e_{12}, & 0, & \dots, & e_{2,n+1} \\ - & - & - & - & - \\ 1, & e_{1,n+1}, & e_{2,n+1}, & \dots, & 0 \end{pmatrix}$$

eine Matrix, die man auch mit
$$E = (e_{rs}),\ r,s = 0, 1, \dots, n+1,$$
bezeichnen kann, wenn man $e_{0i} = e_{i0} = 1$ und $e_{00} = 0$ definiert. Dann gilt der Satz:

(1,13) Die Matrix E ist regulär, und es gilt

(2) $$\det E = (-1)^{n+1} 2^n (n!)^2 V^2,$$

wo V das Volumen des n-Simplexes ist. Die inverse Matrix $E^{-1} = P = (p_{rs})$ hat folgende geometrische Bedeutung:

a) Sind (für $n \geq 2$) Q_i $(i = 1, \dots, n+1)$ die $(n-1)$-dimensionalen Inhalte der $(n-1)$-dimensionalen Seiten ω_i (ω_i gegenüber A), so gilt

(3) $$p_{ii} = -\frac{1}{2n^2}\ \frac{Q_i^2}{V^2};$$

b)

(4) $$p_{00} = -2r^2,$$

wo r der Halbmesser der unbeschriebenen Hyperkugel des n-Simplexes ist;

c) für $i \neq j$ gilt

(5) $$\cos \varphi_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sqrt{-p_{ii}}\,\sqrt{-p_{jj}}}$$

oder

(5') $$p_{ij} = \frac{1}{2n^2}\ \frac{Q_i Q_j}{V^2} \cos \varphi_{ij}$$

wo φ_{ij} der Innenwinkel der Seiten ω_i, ω_j ist;

d) Die Zahlen $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0,n+1}$ sind baryzentrische Koordinaten des Mittelpunktes der umbeschriebenen Hyperkugel.

Der Beweis folgt aus den Sätzen der Abschnitte 3, 4 und 5 in [2] , Relationen (3,11), (4,2) , (5,5) und (5,4).

Aus diesem Satz folgt die folgende wichtige Tatsache, die den Zusammenhang zwischen dem erweiterten Graphen x)

---

x) Die Definition des erweiterten Graphen eines n-Simplexes steht in der Einleitung.

des n-Simplexes und dem Vorzeichengraphen der Matrix M^{-1} zum Ausdruck bringt:

(1,14) Satz. Der erweiterte Graph eines n-Simplexes $(n \geq 1)$ ist der Vorzeichengraph der Matrix E^{-1} (E ist die Matrix aus (1), wenn die erste Zeile von E^{-1} dem hinzugefügten Knotenpunkt des erweiterten Graphen entspricht.

Anmerkung. Es ist zweckmässig, als gewöhnlichen Graphen eines 1-Simplexes den Graphen mit zwei Knotenpunkten und positiver Kante zwischen ihnen zu betrachten. Der erweiterte Graph dieses 1-Simplexes ist somit ein Kreis mit drei Knotenpunkten und drei positiven Kanten.

Beweis. Für $n=1$ folgt der Satz (wegen der vorgehenden Anmerkung) unmittelbar aus der Berechnung von E^{-1}. Es sei also $n \geq 2$ und bezeichnen wir mit $0, 1, \ldots, n+1$ die Knotenpunkte des Vorzeichengraphen der Matrix $P = E^{-1}$, die den Zeilen mit den Indexen $0, 1, \ldots, n+1$ entsprechen. Ferner seien $0', 1', \ldots, (n+1)'$ die Knotenpunkte des erweiterten Graphen ($0'$ entspricht dem Knotenpunkt 0 aus der Einleitung). Da nach (5°) $\operatorname{sgn} p_{ij} = \operatorname{sgn} \cos \varphi_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, n+1$, $i \neq j$ gilt, ist $p_{ij} > 0, p_{ij} = 0$ oder $p_{ij} < 0$, je nachdem φ_{ij} spitz, recht oder stumpf ist. Somit liegen gleichzeitig zwischen i und j $(i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$ und zwischen i', j' positive, negative oder keine Kanten. Es bleibt noch übrig, dasselbe für die Kanten zwischen $0, i$ und $0', i'$ zu beweisen. Das folgt aber unmittelbar aus (1,10) d), da die i-te baryzentrische Koordinate eines Punktes bezüglich eines n-Simplexes positiv, bzw. negativ, bzw. gleich Null ist, je nachdem sich der Pubkt im inneren, bzw. äusseren durch die zugehörige $(n+1)$-dimensionale Seite bestimmten Halbraum, bzw. auf dieser Seite selbst befindet.

2. Gausssche Graphen.

(2,1) Definition. Es sei G ein Vorzeichengraph. Wir sagen, dass G gaussisch definit, kurz g-definit, bezüglich einer Untermenge $U_0 \subset U(G)$ ist, falls für jede zwei verschiedene Knotenpunkte u, v aus $U(G) - U_0$

gilt, dass jede zwei Wege in G von u nach v, deren alle innere Knotenpunkte in U_0 liegen, $\bmod 2$ dieselbe Anzahl von negativen Kanten besitzen.

(2,2) <u>Definition</u>. Ist ein Vorzeichengraph G g-definit bezüglich $U_0 \subset U(G)$, so bezeichnen wir als den <u>Gaussschen Graphen</u>, $G(U_0)$ des Graphen G bezüglich U_0 denjenigen Graphen mit der Knotenpunktmenge $U(G)-U_0$, dessen je zwei verschiedene Knotenpunkte $u, v \in U(G)-U_0$ durch eine Kante dann und nur dann verbunden sind, wenn aus u nach v ein Weg in G existiert, dessen alle innere Knotenpunkte zu U_0 gehören; diese Kante ist positiv oder negativ, je nachdem dieser Weg eine gerade oder ungerade Anzahl von negativen Kanten besitzt.

<u>Anmerkung</u>. Diese Definition ist sinnvoll infolge der Voraussetzung, dass G g-definit ist.

(2,3) Jeder Vorzeichengraph mit lauter positiven Kanten ist g-definit bezüglich jeder Untermenge $U_0 \subset U(G)$. Der zugehörige Gausssche Graph hat wiederum lauter positive Kanten.

<u>Beweis</u> klar.

<u>Anmerkung</u>. Wenn wir einen (gewöhnlichen) Graphen G mit demjenigen Vorzeichengraphen identifizieren, der dieselben Kanten wie G hat und lauter positive Kanten besitzt, so kann man wegen (2,3) die Definition des Gaussschen Graphen auf gewöhnliche Graphen übertragen.

(2,4) Es sei G ein Vorzeichengraph, der bezüglich $U_0 \subset U(G)$ g-definit ist. Es sei h der Zusammenhangsgrad von G. Ist die Anzahl der Knotenpunkte aus $U(G)-U_0$ mindestens gleich $h+1$, so hat der Gausssche Graph $G(U_0)$ den Zusammenhangsgrad mindestens gleich h; ist diese Anzahl höchstens gleich $h+1$, so ist $G(U_0)$ ein vollständiger Graph.

<u>Beweis</u>. Es genügt zu zeigen, dass jeder Schnitt von $G(U_0)$ gleichzeitig ein Schnitt von G ist. Es sei somit $M \subset U(G)-U_0$ ein Schnitt von $G(U_0)$; dann gibt es in $U(G)-U_0-M$ zwei verschiedene Knotenpunkte u, v so, dass jeder Weg in $G(U_0)$ von u nach

v irgendeinen Knotenpunkt aus M enthält. Es sei W ein Weg von u nach v in G, der keinen Knotenpunkt aus M enthält: $W = u \ldots u_1 \ldots u_2 \ldots u_k \ldots v$, wo $u_1, u_2, \ldots, u_k$ alle Knotenpunkte von W sind, die in $U(G) - U_0$ liegen. Dann existieren aber in $G(U_0)$ die Kanten $uu_1, u_1u_2, \ldots, u_kv$, die einen Weg von u nach v bilden, der keinen Knotenpunkt aus M enthält. Dieser Widerspruch beweist, dass M auch Schnitt von G ist. Somit ist der Satz bewiesen.

Anmerkung. Man kann leicht beweisen, dass der Begriff des Gaussschen Graphen (ohne negative Kanten) folgende graphentheoretische Bedeutung hat: Ist G der gegebene Graph und ist $U_0 \subset U(G)$, so ist der Gausssche Graph $G(U_0)$ der einzige Graph G_1 mit der Knotenpunktmenge $U_1 = U(G) - U_0$, der die Eigenschaft besitzt, dass für alle Paare von zwei verschiedenen Knotenpunkten u, v in U_1 die Menge der Schnitte in G_1 zwischen u und v identisch ist mit der Menge derjenigen Schnitte zwischen u und v in dem ursprünglichen Graphen, die zugleich Untermengen von U_1 sind. Dabei ist eine Menge $S \subset U(G)$ ein Schnitt in G zwischen u und v ($u \neq v$, $u, v \in U(G) - S$), falls u und v in verschiedenen Komponenten des auf $U(G) - S$ induzierten Teilgraphen von G liegen. Den Begriff des Gaussschen Graphen kann man auch auf gerichtete Graphen und gerichtete Vorzeichengraphen erweitern.

(2,5) Es sei G ein Vorzeichengraph mit dem Zusammenhangsgrad $h \geqq 2$, $U_0 \subset U(G)$ eine Untermenge seiner Knotenpunktmenge derart, dass $U(G) - U_0$ wenigstens zwei Knotenpunkte enthält. G ist g-definit bezüglich U_0 dann und nur dann, falls jeder Kreis in G, der höchstens zwei Knotenpunkte aus $U(G) - U_0$ enthält, eine gerade Anzahl von negativen Kanten besitzt.

Beweis. Nehmen wir an, dass jeder Kreis in G mit höchstens zwei Knotenpunkten aus $U(G) - U_0$ eine gerade Anzahl von negativen Kanten besitzt. Es seien u und v zwei verschiedene Knotenpunkte in $U(G) - U_0$ und W_1, W_2 zwei Wege von u nach v, deren jeder innere

Knotenpunkt zu U_0 gehört. Die Menge derjenigen Kanten, die in genau einem der Wege W_1, W_2 liegen, ist Vereinigungsmenge von einigen voneinander kantenfremden Kreisen. Jeder dieser Kreise besitzt höchstens zwei Knotenpunkte von $U(G)-U_0$ und hat somit eine gerade Anzahl von negativen Kanten. Also haben die beiden Wege zusammen eine gerade Anzahl von negativen Kanten, d.h. die Anzahl von negativen Kanten ist in den beiden Wegen $mod\ 2$ gleich und G ist g-definit bezüglich U_0.

Sei umgekehrt G ein g-definiter Graph bezüglich $U_0 \subset U(G)$. Setzen wir voraus, dass ein Kreis $K \subset G$ höchstens zwei Knotenpunkte aus $U(G)-U_0$ enthält. Unterscheiden wir drei Fälle:

A) K enthält genau zwei Knotenpunkte $u, v \in U(G)-U_0$. Da die beiden Teile von K zwischen u und v $mod\ 2$ die gleiche Anzahl von negativen Kanten haben, ist die Anzahl von negativen Kanten in K gerade.

B) K enthält einen einzigen Knotenpunkt $u \in U(G)-U_0$. Wenn wir aus G den Knotenpunkt u zusammen mit den mit u inzidenten Kanten entfernen, erhalten wir einen Graphen G', der (wegen $k \geq 2$) zusammenhängend ist. In G' existiert ein Weg W zwischen der Menge der Knotenpunkte von K (mit Ausnahme von u) und der nichtleeren Menge $U(G)-U_0-u$, der die kleinste Anzahl von Kanten enthält. W hat also einen einzigen Knotenpunkt k aus K und einen einzigen Knotenpunkt v aus $U(G)-U_0-u$. Nun gibt es in G zwei Wege zwischen u und v: von u nach k (durch den einen oder anderen Bogen von K und von k nach v mit W. Da diese beiden Wege $mod\ 2$ die gleiche Anzahl von negativen Kanten besitzen, gilt dasselbe für die beiden Bögen $u \dots k$ des Kreises K und K hat eine gerade Anzahl von negativen Kanten.

C) K enthält keinen Knotenpunkt aus $U(G)-U_0$. Ist $k_1 k_2$ eine Kante aus K, u ein Knotenpunkt aus $U(G)-U_0$, so gibt es, da G zusammenhängend und artikulationslos ist, nach (1,8) einen Weg $W = k_1 \dots u \dots k_2$. Sei k_1' bzw. k_2' der letzte Knotenpunkt des Abschnittes $k_1 \dots u$ von W bzw. der erste Knotenpunkt des Abschnittes $u \dots k_2$ von W, der in K liegt. Offenbar gilt $k_1' \neq k_2'$. Sei ferner u_1 bzw. u_2 der erste Knotenpunkt des Abschnittes $k_1' \dots u$ bzw. der letzte Knotenpunkt des Abschnittes $u \dots k_2'$ von W, der in $U(G) - U_0$ liegt. Unterscheiden wir zwei Unterfälle:

a) $u_1 = u_2$, also $u_1 = u$. Dann bildet der Abschnitt $k_1' \dots u \dots k_2'$ von W zusammen mit dem einen oder anderen Bogen $k_1' \dots k_2'$ von K zwei Kreise in G, die je einen Knotenpunkt von $U(G) - U_0$ enthalten. Nach B) hat jeder von diesen Kreisen eine gerade Anzahl von negativen Kanten. Also hat jeder Bogen $k_1' \dots k_2'$ von K mod 2 die gleiche Anzahl von negativen Kanten und K hat eine gerade Anzahl von negativen Kanten.

b) $u_1 \neq u_2$. Dann gibt es zwei Wege $u_1 \dots k_1' \dots k_2' \dots u_2$ in G von u_1 nach u_2, wo $u_1 \dots k_1'$ und $k_2' \dots u_2$ Abschnitte von W sind und $k_1' \dots k_2'$ der eine bzw. andere Bogen von K zwischen k_1' und k_2' ist. Da diese beiden Wege mod 2 die gleiche Anzahl von negativen Kanten haben, besitzt K eine gerade Anzahl von negativen Kanten.

Der Satz ist vollkommen bewiesen.

(2,6) Es sei G ein Vorzeichengraph mit dem Zusammenhangsgrad $h \geqq 2$. Sei $U_0 \subset U(G)$ so, dass $U(G) - U_0$ mindestens zwei Knotenpunkte enthält. Ist G g-definit bezüglich U_0, so ist G g-definit bezüglich jeder $U_1 \subset U_0$ und der Graph $G_1 = G(U_1)$ ist wieder g-definit bezüglich $U_0 - U_1$, wobei

(6) $$G_1(U_0 - U_1) = G(U_0).$$

Ist umgekehrt G (mit dem Zusammenhangsgrad $h \geqq 2$) g-definit bezüglich U_1 und $G_1 = G(U_1)$ g-definit bezüglich $U_0 - U_1$, $U_1 \subset U_0 \subset U(G)$, wobei $U(G) - U_0$ mindestens zwei Knotenpunkte hat, so ist G g-definit auch bezüglich U_0 und es gilt wieder (6).

<u>Beweis</u>. Es sei G g-definit bezüglich U_0 und es

sei $U_1 \subset U_0$. Ist K ein Kreis in G, der höchstens zwei Knotenpunkte aus $U(G)-U_1$ enthält, so enthält K auch höchstens zwei Knotenpunkte aus $U(G)-U_0$ und nach (2,5) ($U(G)-U_0$ hat wenigstens zwei Knotenpunkte) liegt in K eine gerade Anzahl von negativen Kanten. Aber auch $U(G)-U_1$ enthält wenigstens zwei Knotenpunkte, sodass G wieder nach (2,5) g-definit auch bezüglich U_1 ist.

Um die Existenz von $G_1(U_0-U_1)$ und die Relation (6) zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass ein Weg W zwischen zwei verschiedenen Knotenpunkten $u, v \in U(G)-U_0$ mit inneren Knotenpunkten in U_0 dann und nur dann existiert, falls es in G_1 einen Weg W_1 zwischen u und v mit inneren Knotenpunkten in U_0-U_1 gibt, und dass diese beiden Wege $\bmod 2$ die gleiche Anzahl von negativen Kanten besitzen.

Es sei somit $W=u\ldots u_1\ldots v_1\ldots u_2\ldots v_2\ldots u_k\ldots v_k\ldots v$ ein Weg von u nach v $(u,v\in U(G)-U_0)$, dessen alle innere Knotenpunkte zu U_0 gehören, wobei genau die inneren Knotenpunkte der Abschnitte $u_1\ldots v_1, u_2\ldots v_2,\ldots,u_k\ldots v_k$ in U_1 liegen. Es liegen also in G_1 die Kanten $u_i v_i$ $(i=1,\ldots,k)$ sowie alle übrigen Kanten von W (d.h. mit Ausnahme der Abschnitte $u_i\ldots v_i$). Es existiert somit in G_1 ein Weg $W_1=u\ldots u_1 v_1\ldots u_2 v_2\ldots u_k v_k\ldots v$ mit inneren Knotenpunkten aus U_0-U_1. Dabei ist die Kante $u_i v_i$ in G_1 positiv oder negativ, je nachdem der Abschnitt $u_i\ldots v_i$ von W eine gerade oder ungerade Anzahl von negativen Kanten besitzt. Da die übrigen Kanten von W_1 (gemeinsam mit W) dieselben Vorzeichen in W_1 wie in W haben, ist die Anzahl von negativen Kanten in $W_1 \bmod 2$ dieselbe wie in W.

Ist umgekehrt W_1 ein Weg in G_1 von u nach v mit inneren Knotenpunkten in U_0-U_1 und $h_1=pq$ eine Kante von W_1, so gibt es irgendeinen Weg $p\ldots q$ mit inneren Knotenpunkten in U_1. Es existiert somit eine Verbindung $S=u\ldots v$ in G (einige Knotenpunkte oder Kanten können auch mehrfach auftreten) mit inneren Knotenpunkten in

U_0. Die Menge der Kanten von S, die in S in ungerader Anzahl auftreten, bildet, zusammen mit den Endknotenpunkten dieser Kanten, wieder eine Verbindung S' von u und v, die keine Kante mehrfach enthält. Dabei setzt sich die Menge der Kanten von S' zusammen aus der Menge der Kanten eines Weges W von u nach v und aus den Kantenmengen von einigen Kreisen. Da die Verbindung $S \bmod 2$ gleiche Anzahl von negativen Kanten besitzt wie W_1 und da weder der Übergang von S zu S' noch von S' zu W diese Anzahl ändert, haben W und $W' \bmod 2$ die gleiche Anzahl von negativdn Kanten. Zwei Wege in G zwischen u und v mit inneren Knotenpunkten in U_0 haben jedoch $\bmod 2$ die gleiche Anzahl von negativen Kanten. Es gilt also dasselbe auch für Wege in G_1 mit inneren Knotenpunkten in $U_0 - U_1$, und $G_1(U_0 - U_1)$ existiert. Die Gleichheit (6) ist also erfüllt.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, genügt es wegen (2,5) zu zeigen, dass jeder Kreis in G, der höchstens zwei Knotenpunkte aus $U(G) - U_0$ enthält, eine gerade Anzahl von negativen Kanten besitzt. Es sei somit K ein solcher Kreis. Besitzt er höchstens zwei Knotenpunkte aus $U(G) - U_1$, so folgt die angeführte Tatsache aus (2,5). Gibt es in K wenigstens drei Knotenpunkte aus $U(G) - U_1$, so gibt es in $U(G) - U_1$ wenigstens drei Knotenpunkte und $G(U_1)$ hat nach (2,4) den Zusammenhangsgrad wenigstens zwei. Jedem Abschnitt $u_1 \dots u_2$ von K, dessen innere Knotenpunkte zu U_1 gehören und $u_1, u_2 \text{ non} \in U_1$, ordnen wir die Kante u_1u_2 in G_1 zu. So erhalten wir einen Kreis K_1 in G_1, der höchstens zwei Knotenpunkte aus $U(G) - U_0 = U(G) - U_1 - (U_0 - U_1)$ enthält und daher eine gerade Anzahl von negativen Kanten besitzt. Eine leichte Überlegung zeigt analog wie vorher, dass K und $K_1 \bmod 2$ die gleiche Anzahl von negativen Kanten besitzen. Der Beweis ist somit vollendet.

(2,7) Ist G ein positiver Graph, so ist sein Zusammenhangsgrad dann und nur dann $\geq k$, wenn jeder

Gausssche Graph von G mit $k+1$ Knotenpunkten vollständig ist.

<u>Beweis</u>. Ist der Zusammenhangsgrad von G mindestens gleich k, so hat die Knotenpunktmenge N von G mindestens $k+1$ Knotenpunkte. Hat $M \subset N$ $k+1$ Knotenpunkte, so ist der Gausssche Graph $G(N-M)$ vollständig: sonst existierte für zwei Knotenpunkte $u, v \in M, u \neq v$, keine Kante uv in $G(N-M)$, d.h. jeder Weg von u nach v in G würde mindestens einen der Knotenpunkte aus $M-\{u\}-\{v\}$ enthalten, sodass $M-\{u\}-\{v\}$ ein Schnitt von G mit $k-1$ Knotenpunkten wäre. Sei umgekehrt jeder Gausssche Graph von G mit $k+1$ Knotenpunkten vollständig. Ist $S \subset N$ ein Schnitt von G mit $n \leq k-1$ Knotenpunkten, so existiert ein Schnitt S_1 von G mit $k-1$ Knotenpunkten. Dann ist für irgendwelche zwei Knotenpunkte $u, v \in N-S_1$ $u\,v$ keine Kante des Gaussschen Graphen $G(N-S_1-\{u\}-\{v\})$ mit $k+1$ Knotenpunken. Dieser Widerspruch zeigt, dass jeder Schnitt von G mindestens k Knotenpunkte hat, und der Satz is bewiesen.

Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen den Gaussschen Graphen und Gaussschen Matrizen aus (1,2).

(2,8) Satz. Es sei $A=(a_{ij}), i,j \in N$, eine symmetrische Matrix, G ihr entgegengesetzter Vorzeichengraph (mit Knotenpunkten aus N). Ist G g-definit bezüglich $M \subset N$ und $A(M,M)$ positiv definit, so ist der Gausssche Graph $G(M)$ der entgegengesetzte Vorzeichengraph der Gaussschen Matrix P_M der Matrix A bezüglich M.

<u>Beweis</u>. Nach (1,2) hat die Gausssche Matrix P_M die Form $(p_{k\ell})$ mit $k, l \in N-M$ und
$p_{k\ell} = \det A(k \cup M, \ell \cup M)$.
Aus (1,4) folgt für $k \neq \ell$

$$
\begin{aligned}
(7)\quad -p_{k\ell} = {} & (a_{k\ell}) \det A(M,M) + \\
& + \sum_{i_1} (-a_{k i_1})(-a_{i_1 \ell}) \det A(M-i_1, M-i_1) + \\
& + \sum_{(i_1, i_2)} (a_{k i_1})(-a_{i_1 i_2})(-a_{i_2 \ell}) \det A(M-i_1-i_2, M-i_1-i_2) + \\
& + \ldots + \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_m)} (-a_{k i_1})(-a_{i_1 i_2}) \ldots (-a_{i_m \ell}),
\end{aligned}
$$

wo m die Anzahl von Elementen aus M bedeutet und in jeder Summe nach sämtlichen geordneten Gruppen $(i_1, \dots i_s)$ von voneinander verschiedenen Elementen aus M summiert wird. Da $A(M,M)$ als positiv definit vorausgesetzt wird, sind sämtliche Determinanten $\det A(M - \bigcup_{s=1}^{k} i_s, M - \bigcup_{s=1}^{k} i_s)$ positiv. Hat also der Gausssche Graph $G(M)$, wo G der Vorzeichengraph von $-A$ ist, eine positive (bzw. negative) Kante $k\ell$ $(k, \ell \in N-M, k \neq \ell$, so existiert in G ein Weg $W = k i_1 \dots i_s \ell$, wo $i_1, \dots, i_s$ voneinander verschiedene Elemente aus M sind, und ein solcher Weg von k nach ℓ hat immer eine gerade (bzw. ungerade) Anzahl von negativen Kanten. Also sind die Zahlen $(-a_{ki_1}), (-a_{i_1 i_2}), \dots, (-a_{i_s \ell})$ von Null verschieden und eine gerade (bzw. ungerade) Anzahl von ihnen ist negativ. Hieraus folgt, dass jeder von Null verschiedener Summand in (7) positives (bzw. negatives) Vorzeichen hat, wobei mindestens ein Summand wirklich von Null verschieden ist, d.h., $(-p_{k\ell})$ ist positiv (negativ). Gibt es in P_M zwischen k und ℓ $(k \neq \ell, k, \ell \in N-M)$ keine Kante, so ist offenbar $p_{k\ell} = 0$. Somit ist $G(M)$ der entgegengesetzte Vorzeichengraph von P_M und der Satz ist bewiesen.

3. Matrizen vom Typ $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$.

(3,1) Definition. Eine symmetrische Matrix m-ter Ordnung ($m \geqq 2$) heisst elliptisch, falls sie regulär mit der Signatur $-(m-2)$ ist, d.h., falls die zugehörige quadrarische Form als lineare Kombination von m Quadraten von Linearformen darstellbar ist, wobei ein Koeffizient positiv und die übrigen $m-1$ Koeffizienten negativ sind.

(3,2) Es sei A eine symmetrische reguläre Matrix m-ter Ordnung, $m \geqq 2$. Es sei L der m-dimensionale Raum von m-gliedrigen Spaltenvektoren. Dann gilt x):

a) Falls für einen Vektor $y \in L$, $y \neq 0$, die

---

x) Vgl. 9 .

Gleichheit $y'Ay=0$ gilt x), wobei für jeden Vektor ~~$x \in L$~~, der nicht von y linear abhängig ist und für den $y'Ax=0$ ist, die Ungleichheit $x'Ax<0$ gilt, so ist A elliptisch.

b) Ist A elliptisch und ist $y \in L, y \neq 0$, ein Vektor, für den $y'Ay=0$ gilt, so erfüllt jeder von y nicht linear abhängige Vektor $x \in L$, für den $y'Ax=0$ ist, die Ungleichheit $x'Ax<0$.

Beweis. Da die Formulierung von a) und b) von der Wahl der Basis in L unabhängig ist, können wir voraus - setzen, dass A in der Diagonalform dargestellt ist, mit den ersten r Diagonalelementen $+1 (0 \leq r \leq m)$ und den übrigen $m-r$ Diagonalelementen -1, d.h. für $x \in L, y \in L$ ist $y'Ax = \sum_{i=1}^{r} x_i y_i - \sum_{j=r+1}^{m} x_j y_j$.

a) Es sei y ein Vektor mit der angegebenen Eigen - schaft. Offenbar ist $r \geqq 1$. Setzen wir voraus, dass $r>1$ gilt. Dann gibt es einen Index $k, 1 \leq k \leq r$, so dass $y_k \neq 0$ ist, und einen Index $\ell, \ell \neq k, 1 \leq \ell \leq r$. Nun ist der Vektor x, für den $x_k = -y_\ell, x_\ell = y_k, x_i = 0 (k \neq i \neq \ell)$ gilt, von y linear unabhängig, es gilt $y'Ax=0$, aber $x'Ax = y_k^2 + y_\ell^2 > 0$. Dieser Widerspruch beweist, dass $r=1$ ist, und die Matrix ist elliptisch.

b) Sei A elliptisch, d.h. $r=1$. Es sei $y \neq 0, y'Ay=0$, sodass $y_1^2 = \sum_{j=2}^{m} y_j^2$. Es sei x ein von y linear unabhängiger Vektor, für den $y'Ax=0$ ist, d.h. $x_1 y_1 = \sum_{j=2}^{m} x_j y_j$.

Dann ist auch der Vektor $0, x_2, \ldots, x_m$ linear unabhängig von dem (von Null verschiedenen) Vektor $0, y_2, \ldots y_m$, sodass

$$x_1^2 y_1^2 = \left(\sum_{j=2}^{m} x_j y_j\right)^2 < \sum_{j=2}^{m} x_j^2 \sum_{j=2}^{m} y_j^2 = y_1^2 \sum_{j=2}^{m} x_j^2$$ gilt.

Also $(y_1 \neq 0)\ x_1^2 - \sum_{j=2}^{m} x_j^2 < 0$, d.h. $x'Ax<0$ und der Beweis ist vollendet.

(3,3) Es sei A eine symmetrische Matrix n-ter

---

x) y' ist die zugehörige transponierte Matrix zum Spaltenvektor y.

Ordnung, $n \geq 2$, $A = (a_{ik})$, $i, k \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sei $\emptyset \neq M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n = N$, $M_i \neq M_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Ist $\det A(M_1, M_1) = 0$, $\det A(M_k, M_k) \neq 0$ für $k = 2, \ldots, n$, so ist A elliptisch dann und nur dann, falls für $k = 2, \ldots, n$

$$(-1)^{k-1} \det A(M_k, M_k) > 0$$

gilt.

Beweis. Offenbar hat M_k $(k = 1, \ldots, n)$ genau k Elemente und die Folge $D_0 = 1$, $D_1 = \det A(M_1, M_1)$, $\det A(M_2, M_2)$, $\ldots$, $D_n = \det A(M_n, M_n) = \det A$

erfüllt die Voraussetzung des Satzes von Jacobi (s. z.B. [5], S. 246 - 247). Also ist A elliptisch dann und nur dann, falls in der Folge $D_0, D_2, D_3, \ldots, D_n$ genau $n-1$ Vorzeichenwechsel vorkommen. Das ist aber genau der Fall, wenn $(-1)^{k-1} D_k > 0$ für $k = 2, \ldots, n$, wie wir beweisen wollten.

(3,4) Definition. Eine Matrix ist vom Typ $\tilde{\mathcal{E}}$, falls sie symmetrisch elliptisch ist und in der Hauptdiagonale lauter Nullelemente besitzt.

Anmerkung. Eine solche Matrix hat also die Ordnung mindestens 2.

(3,5) Eine symmetrische Matrix ist dann und nur dann vom Typ $\tilde{\mathcal{E}}$, falls ihre Ordnung mindestens 2 beträgt und falls ihre Hauptminoren erster Ordnung gleich Null sind und die Hauptminorem $\varkappa$-ter Ordnung für $\varkappa \geq 2$ von Null verschieden sind und das Vorzeichen $(-1)^{\varkappa-1}$ besitzen.

Anmerkung. Damit eine symmetrische Matrix der Ordnung n vom Typ $\tilde{\mathcal{E}}$ sei, genügt es, dass sämtliche ihre diagonalen Elemente gleich Null sind und dass für eine $(n-1)$-gliedrige Folge von Hauptminoren der Ordnungen $2, 3, \ldots, n$, deren Indexmengen der Reihe nach wachsen, gilt, dass für $\varkappa = 2, \ldots n$ jeder Hauptminor $\varkappa$-ter Ordnung von Null verschieden ist und das Vorzeichen $(-1)^{\varkappa-1}$ besitzt.

Beweis. Folgt unmittelbar aus (3,3), wenn wir zeigen, dass sämtliche Hauptminoren einer Matrix vom Typ $\tilde{\mathcal{E}}$

die eine Ordnung ≥ 2 besitzen, von Null verschieden sind. Es sei also $A=(a_{ik}), i,k \in N=\{1,2,\dots,n\}$ eine Matrix vom Typ $\widetilde{\mathscr{E}}$, $M\subset N$ eine Menge mit $m \geq 2$ Elementen; nehmen wir an, dass $\det A(M,M)=0$ ist. Wenn wir für einen n-gliederigen Spaltenvektor z mit $z(M)$ den m-gliederigen Spaltenvektor mit (geordneten) Koordinaten aus M bezeichnen, so existiert ein Spaltenvektor $y \neq 0$ mit $y_i = 0$ für $i \notin M$, für den $A(M,M)y(M)=0$ gilt. Ist $y_k \neq 0$, also $k\in M$, und $\ell \neq k, \ell \in M$, so ist der Vektor x mit $x_\ell = 1$, $x_j = 0$ für $j \neq \ell$, von y linear unabhängig, wobei

$$y'Ay = y'(M)A(M,M)y(M)=0,$$
$$y'Ax = x'Ay = x'(M)A(M,M)y(M)=0$$

gilt, jedoch $x'Ax = a_{\ell\ell} = 0$. Dieser Widerspruch gegen (3,2) beweist den Satz.

(3,6) Es sei A eine Matrix vom Typ $\widetilde{\mathscr{E}}$. Dann gilt:

a) Sämtliche nichtdiagonalen Elemente von A sind von Null verschieden.

b) Ist eine Zeile von A nichtnegativ, so ist A nichtnegativ.

c) Es gibt eine diagonale Matrix D mit den Diagonalelementen $+1$ oder -1 derart, dass DAD, die wieder eine Matrix vom Typ $\widetilde{\mathscr{E}}$ ist, nichtnegativ ist.

Beweis. Die erste Behauptung folgt daraus, dass für $A=(a_{ij}), i,j \in N=\{1,2,\dots,n\}$, bei $k \neq \ell$

$$0 \neq \det\begin{pmatrix} a_{kk}, & a_{k\ell} \\ a_{\ell k}, & a_{\ell\ell}\end{pmatrix} = -a_{k\ell}^2$$

gilt. Nehmen wir jetzt zum Beweis vom b) an, dass für einen festen Index i und $k=1,\dots,n$ $a_{ik} \geq 0$ ist. Ist $n=2$, ist alles bewiesen. Ist $n \geq 3$, so ist für $i \neq k \neq \ell \neq i$

$$0<\det\begin{pmatrix} a_{ii}, & a_{ik}, & a_{i\ell} \\ a_{ik}, & a_{kk}, & a_{k\ell} \\ a_{i\ell}, & a_{k\ell}, & a_{\ell\ell}\end{pmatrix} = 2a_{ik}\, a_{k\ell}\, a_{i\ell},$$

d.h. $a_{k\ell} > 0$.

Um c) zu beweisen, genügt es, die Diagonalelementen $\varepsilon_i, i\in N$ folgendermassen zu wählen: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} a_{1i}$ für $i=2,\dots,n$. Da die Matrix DAD nach (3,5) wieder vom

Typ $\tilde{\mathfrak{e}}$ ist und ihre erste Zeile nichtnegativ ist, ist sie nach b) nichtnegativ.

(3,7) <u>Definition</u>. Eine Matrix ist vom Typ $\mathfrak{e}$, falls sie vom Typ $\tilde{\mathfrak{e}}$ und zugleich nichtnegativ ist.

(3,8) <u>Definition</u>. Eine reguläre Matrix A ist vom Typ $\tilde{\mathfrak{g}}$ bzw. $\mathfrak{g}$, falls die Matrix $-A^{-1}$ vom Typ $\tilde{\mathfrak{e}}$ bzw. $\mathfrak{e}$ ist.

(3,9) Eine symmetrische Matrix n-ter Ordnung ($n \geqq 2$) ist dann und nur dann vom Typ $\tilde{\mathfrak{g}}$, wenn sämtliche ihre Hauptminoren der Ordnung $k \leqq n-2$ positiv, sämtliche Hauptminoren der Ordnung $n-1$ gleich Null sind und ihre Determinante negativ ist.

<u>Anmerkung</u>. Aus der Anmerkung in (3,5) folgt, dass eine Matrix der Ordnung $n \geqq 2$ vom Typ $\tilde{\mathfrak{g}}$ ist, sobald sämtliche ihre Hauptminoren der Ordnung $n-1$ gleich Null sind, die Determinante negativ ist und eine Folge von positiven Hauptminoren der Ordnungen $1, 2, \ldots, n-2$ existiert, deren Indexmengen der Reihe nach wachsen.

Der <u>Beweis</u> folgt aus (3,5) und (1,1).

(3,10) a) Jede Hauptmatrix der Ordnung $\geqq 2$ einer Matrix vom Typ $\tilde{\mathfrak{e}}$ bzw. $\mathfrak{e}$ ist wiederum eine Matrix vom Typ $\tilde{\mathfrak{e}}$ bzw. $\mathfrak{e}$.

b) Jede Gausssche Matrix mindestens zweiter Ordnung einer Matrix vom Typ $\tilde{\mathfrak{g}}$ bzw. $\mathfrak{g}$ ist wieder Matrix vom Typ $\tilde{\mathfrak{g}}$ bzw. $\mathfrak{g}$.

c) Jede Matrix, die durch Permutation von Zeilen und dieselbe Permutation von Spalten aus einer Matrix vom Typ $\tilde{\mathfrak{e}}$, $\mathfrak{e}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$ oder $\mathfrak{g}$ entsteht, ist wiederum vom Typ $\tilde{\mathfrak{e}}$, $\mathfrak{e}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$ oder $\mathfrak{g}$.

<u>Beweis</u>. Folgt leicht aus (1,3), (3,5) und (3,9).

(3,11) Es seien A und B symmetrische Matrizen derselben Ordnung $m \geqq 1$, a_0 und $b_0 \neq 0$ m-gliedrige Spaltenvektoren, I_m die Einheitsmatrix der Ordnung m.

Falls

(8) $$A b_0 = 0,$$

(9) $$a_0 b_0' + AB = c I_m,$$

wo

(10) $$c = a_0' b_0 ,$$
dann existiert eine und nur eine Zahl a derart, dass
(11) $$a b_0' + a_0' B = 0$$
gilt. Dabei kann (8) - (11) auch in der Form geschrieben werden, dass für die Matrizen
$$A_0 = \begin{pmatrix} 0, & a_0' \\ a_0, & A \end{pmatrix} \qquad \text{und } B_0 = \begin{pmatrix} 0, & b_0' \\ b_0 & B \end{pmatrix}$$
$$A_0 B_0 = c I_{m+1}$$
gilt.

Beweis. Wegen (8) ist der Rang r von A höchstens gleich $m-1$.

1^0 Es sei $r = m-1$. Aus (7) folgt dann
$$a_0 b_0' a_0 + AB a_0 = c a_0 ,$$
also wegen (10) $$AB a_0 = 0.$$
Somit gilt $B a_0 = \sigma b_0$ und wegen der Symmetrie gilt (11) für $a = -\sigma$.

2^0 Es sei $r < m-1$. Dann ist $c = 0$ (sonst hätte die Matrix $a_0 b_0' + AB$ den Rang m, aber $a_0 b_0'$ hat den Rang höchstens 1 und AB höchstens r). Wegen $b_0 \neq 0$ existiert ein Vektor y so, dass $b_0' y = \tau \neq 0$. Aus (9) folgt dann $$a_0 \tau + AB y = 0,$$
also wegen $BA = -b_0 a_0'$
$$B a_0 = -\frac{1}{\tau} BABy = \frac{1}{\tau} b_0 a_0' B y .$$
Somit ist (11) für $a = -\frac{1}{\tau}(y' B a_0)$ erfüllt und der Beweis ist vollendet, da die Eindeutigkeit von a aus $b_0 \neq 0$ folgt.

(3,12) Es sei $A = (a_{ik})$ eine symmetrische Matrix der Ordnung $m \geq 1$, für welche
$$A b_0 = 0$$
gilt, wo b_0 der Spaltenvektor mit den Koordinaten $1, 1, \ldots, 1$ ist. Bezeichnen wir mit u_{ik}, $i, k = 1, \ldots, m$ die Zahlen
$$u_{ik} = -a_{ik}, \quad (i \neq k)$$
$$u_{ii} = 0$$

Es sei G der Graph der Matrix $U = (u_{ik})$, S_1 die Menge von allen Gerüsten von G, $S_2(i,k)$ für $i \neq k$, $i, k = 1, \ldots, m$ die Menge von allen kreislosen Teilgraphen von G, die dieselbe Knotenpunktmenge wie G und genau zwei Komponenten besitzen, wobei i und k in verschiedenen Komponenten liegen. Für $K \subset G$ soll $\pi(K)$ das Produkt von Zahlen u_{ik} über diejenigen Paare i, k bezeichnen, für die ik Kante in K ist. Ferner ist $s_i(K)$ der Grad des Knotenpunktes i in K.

Dann haben wir die Zahlen $(i, k = 1, \dots, m)$

$$a_{0i} = a_{i0} = -\sum_{K \in S_1} [2 - s_i(K)] \pi(K),$$

$$b_{00} = 0, \quad b_{0i} = b_{i0} = 1, \quad b_{ii} = 0$$

$$b_{ik} = \sum_{K \in S_2(i,k)} \pi(K) \quad \text{für } i \neq k,$$

$$a_{00} = -\sum_{i=1}^{m} a_{0i} b_{i1}, \quad c = \sum_{i=1}^{m} a_{0i}$$

die Eigenschaft, dass für die Matrizen

$$A_0 = (a_{rs}), \quad B_0 = (b_{rs}), \quad r, s = 0, 1, \dots, m.$$

$$A_0 B_0 = c\, I_{m+1}$$

gilt.

Ferner ist

$$c = -2 \sum_{K \in S_1} \pi(K) \tag{12}$$

und es gilt $c \neq 0$ genau dann, falls der Rang von A gleich $m-1$ ist.

<u>Beweis</u>. Wir zeigen zuerst, dass (12) richtig ist. Aber $c = \sum_{i=1}^{m} a_{0i} = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{K \in S_1} [2 - s_i(K)] \pi(K) =$

$$= -\sum_{K \in S_1} \left(\sum_{i=1}^{m} [2 - s_i(K)] \right) \pi(K) = -2 \sum_{K \in S_1} \pi(K),$$

da jeder Graph $K \in S_1$ m Knotenpunkte und $m-1$ Kanten (s. Abschnitt 1) besitzt und die Summe der Grade von allen Knotenpunkten zweimal so gross ist als die Anzahl der Kanten:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i(K) = 2(m-1).$$

Nun beweisen wir, dass für $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$, $i, k = 1, \dots, m$, für Spaltenvektoren a_0 mit den Koordinaten a_{0i}, b_0 mit den Koordinaten 1 und für c die Relationen (8), (9), und (10) aus (3,11) erfüllt sind. Da für (8) und (10) alles klar ist, genügt es, (9) zu beweisen.

Für $i = 1, \dots, m$ gilt

$$a_{i0} b_{0i} + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_{ji} = a_{0i} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} u_{ij} b_{ij} = a_{0i} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} u_{ij} \sum_{K\in S_2(i,j)} \pi(K) =$$

$$= -2 \sum_{K\in S_1} \pi(K) = c,$$

denn man erhält beim Summieren über $j \neq i$ über alle Graphen, die die Kante ij erhalten, jeden Graphen $K \in S_1$, genau $s_i(K)$-mal (jeder Knotenpunkt i hat genau $s_i(K)$ Nachbarknotenpunkte j).

Ist $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, m$, so gilt

$$a_{i0} b_{0j} + \sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lj} = a_{i0} + a_{ii} b_{ij} + \sum_{\substack{l=1\\ i\neq l\neq j}}^{m} a_{il} b_{lj} =$$

$$= a_{0i} - b_{ij} \sum_{\substack{l=1\\ i\neq l\neq j}}^{m} a_{il} - a_{ij} b_{ij} + \sum_{\substack{l=1\\ i\neq l\neq j}}^{m} a_{il} b_{lj} =$$

$$= a_{i0} + u_{ij}' b_{ij} + \sum_{\substack{l=1\\ i\neq l\neq j}}^{m} u_{il} (b_{ij} - b_{lj}) =$$

$$= -\sum_{K\in S_1} [2 - s_i(K)] \pi(K) + u_{ij} \sum_{K\in S_2(i,j)} \pi(K) -$$

$$- \sum_{\substack{l=1\\ i\neq l\neq j}}^{m} u_{il} \Big[\sum_{K\in S_2(i,j)} \pi(K) - \sum_{K\in S_2(j,l)} \pi(K) \Big].$$

Aber

$$\sum_{K\in S_2(i,j)} \pi(K) - \sum_{K\in S_2(j,l)} \pi(K) = \sum_{K\in S_2(i;j,k)} \pi(K) - \sum_{K\in S_2(j;l,i)} \pi(K),$$

wo $S_2(i; j, l)$ usw. die Menge aller kreislosen Teilgraphen von G mit genau zwei Komponenten und derselben Knotenpunktmenge wie G bedeutet, für die i und j in der einen und l in der anderen Komponente liegt. Wenn wir noch für einen Augenblick mit $S_1(j - il)$ die Menge derjenigen Graphen aus S_1, welche die Kante il enthalten und in welchen der Weg aus j nach l durch i geht [und analogisch $S_1(j - li)$], so gilt

$$u_{il} \Big[\sum_{K\in S_2(i,j)} \pi(K) - \sum_{K\in S_2(j,l)} \pi(K) \Big] = \sum_{K\in S_1(j-il)} \pi(K) - \sum_{K\in S_1(j-li)} \pi(K).$$

Zusammen ergibt es sich also

$$a_{i0} b_{0j} + \sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lj} = -\sum_{K\in S_1} [2 - s_i(K)] \pi(K) + \sum_{\substack{K\in S_2\\ ij \in K}} \pi(K) -$$

$$- \sum_{\substack{l=1\\ i\neq l\neq j}}^{m} \sum_{K\in S_1(j-il)} \pi(K) + \sum_{\substack{l=1\\ i\neq l\neq j}}^{m} \sum_{K\in S_1(j-li)} \pi(K).$$

Die Summe des zweiten und des vierten Summanden ist $\sum_{K\in S_1} \pi(K)$, da - wenn i und j nicht in K benachbart sind - bei jedem Graphen $K \in S_1$ genau ein Nachbarknotenpunkt $\ell\ (i \neq \ell \neq j)$ existiert derart, dass der Weg von j nach i durch ℓ geht; sind i und j benachbart in K, so erscheint K im zweiten Summanden. Der dritte Summand ist gleich $-\sum_{K\in S_1} [s_i(K)-1]\ \pi(K)$, denn es gibt für $K \in S_1$ genau $s_i(K)-1$ benachbarte Knotenpunkte ℓ zu i in K derart, dass ℓ in dem Wege von j nach i nicht enthalten ist; der übrigbleibende Knotenpunkt liegt auf dem Wege von j nach i. Hieraus folgt, dass die angeführte Summe gleich

$$-\sum_{K\in S_1} [2-s_i(K)]\ \pi(K) + \sum_{K\in S_1} \pi(K) - \sum_{K\in S_1} [s_i(K)-1]\ \pi(K) = 0$$

ist. Somit ist (9) bewiesen. Laut (3,11) gibt es eine - und nur eine - Zahl a, die (11) erfüllt. Aber a_{oo} erfüllt die erste der Relationen (11), d.h. für $a = a_{oo}$ sind wegen $b_{oi} = 1$ auch die übrigen Relationen in (11) erfüllt und es ist

$$A_o B_o = c\, I_{m+1},$$

wie wir beweisen sollten. Dass $c \neq 0$ dann und nur dann, falls der Rang von A gleich $m-1$ ist, folgt daraus, dass $-\frac{1}{2}c$ nach (12) und (1,10) der gemeinsame Wert von allen Hauptminoren der Ordnung $m-1$ von A ist.

(3,13) Satz. Es sei P eine symmetrische Matrix m-ter Ordnung $(m \geq 1)$ vom Rang $m-1$, wobei der Spaltenvektor $y \neq 0$ für den $Py = 0$ ist, sämtliche Koordinaten von Null verschieden haben soll. Dann existiert ein Spaltenvektor $p_o \neq 0$ und eine Zahl p_{oo} derart, dass die Matrix

$$P_o = \begin{pmatrix} p_{oo}, & p_o' \\ p_o, & P \end{pmatrix}$$

regulär ist und sämtliche ihre Hauptminoren m-ter Ordnung gleich Null sind. Dabei ist durch diese beiden Bedingungen der Vektor p_o bis auf einen Faktor ρ und die Zahl p_{oo} bis auf den zugehörigen Faktor ρ^2 eindeutig bestimmt. Ist noch P positiv semidefinit, so ist P_o vom Typ $\tilde{g}$. Kann darüber hinaus der Vektor y (durch geeignete Wahl eines Faktors) positiv gemacht werden, so ist P_0 vom Typ $\mathfrak{g}$ dann und nur dann, wenn $p_0' y < 0$ ist, was durch geeignete Wahl des Vorzeichens von ρ erreicht werden kann.

Beweis. 1. Die Existenz von p_0 und p_{00}: Es seien $y_1, y_2, \ldots, y_m$ die Koordinaten von y. Bezeichnen wir mit Y die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $y_1, y_2, \ldots, y_m$, so hat die Matrix $A = YPY$ wieder den Rang $m-1$, wobei $Ab_0 = 0$ gilt, wo sämtliche Koordinaten von b_0 gleich 1 sind. Laut (3,12) existiert eine Matrix $B_0 = (b_{rs}), r,s = 0,1,\ldots,m)$ und Zahlen $a_{00}, a_{0i} = a_{i0} (i = 1,\ldots,m)$ und $c \neq 0$ derart, dass

$$\begin{pmatrix} a_{00}, & a_0' \\ a_0, & A \end{pmatrix} B_0 = c\, I_{m+1}$$

gilt, wo a_0 der Spaltenvektor mit den Koordinaten a_{0i} ist. Dabei sind alle Diagonalelemente von B_0 gleich Null. Also ist die Matrix

$$A_0 \begin{pmatrix} a_{00}, & a_0' \\ a_0, & A \end{pmatrix}$$

regulär und (B_0 ist zu A_0^{-1}, also auch zu der zu A_0 adjungierten Matrix, proportional) sämtliche Hauptminoren der Ordnung $m-1$ in A_0 sind gleich Null. Es genügt jetzt $p_0 = Ya_0$, $p_{00} = a_{00}$ zu wählen, denn dann gilt

$$\begin{pmatrix} p_{00}, & p_0' \\ p_0, & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & Y \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & Y \end{pmatrix}.$$

Da das skalare Produkt der ersten Zeile von A_0 mit der ersten Spalte von B_0 gleich $c \neq 0$ ist und $b_{00} = 0$ gilt, ist a_0, also auch p_0, von Null verschieden, und der erste Teil ist bewiesen.

2. Um die Eindeutigkeit im angegebenen Sinne zu beweisen, nehmen wir an, dass

$$P_0 = \begin{pmatrix} p_{00}, & p_0' \\ p_0, & P \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \begin{pmatrix} q_{00}, & q_0' \\ q_0, & P \end{pmatrix}$$

$p_0 \neq 0$, $q_0 \neq 0$, reguläre Matrizen sind, deren sämtliche Hauptminoren der Ordnung m gleich Null sind. Wir werden beweisen, dass für eine Zahl $\rho \neq 0$ $p_0 = \rho q_0$ und $p_{00} = \rho^2 q_{00}$ gilt. Für $m = 1$ ist diese Tatsache klar, einschliesslich der übrigbleibenden Behauptung des Satzes. Also sei $m \geq 2$ und sei

$$U_0 = (u_{rs}) = \begin{pmatrix} u_{00}, & u_0' \\ u_0, & U \end{pmatrix} = P_0^{-1},$$

$$V_0 = (v_{rs}) = \begin{pmatrix} v_{00}, & v_0' \\ v_0, & V \end{pmatrix} = Q_0^{-1},$$

$r, s = 0, 1, \ldots, m$. Dann ist $u_{rr} = v_{rr} = 0\ (r = 0, 1, \ldots, m)$ und

(13a) $p_0' u_0 = 1,$

(13b) $p_{00} u_0' + p_0' U = 0,$

(13c) $P u_0 = 0,$

(13d) $p_0 u_0' + PU = I_m;$

(14a) $q_0' v_0 = 1,$

(14b) $q_{00} v_0' + q_0' V = 0,$

(14c) $P v_0 = 0,$

(14d) $q_0 v_0' + PV = I_m.$

Da P den Rang $m-1$ hat, ist laut (13c) und (14c) $u_0 = \alpha y$, $v_0 = \beta y$ und wegen (13a) und (14a) ist $\alpha\beta \neq 0$. Aus (1,1) folgt nun für $i \neq j, i,j \in N = \{1, 2, \ldots, m\}$ und $p = \det P_0$

$$2 u_{0i} u_{0j} u_{ij} = \det \begin{pmatrix} u_{00}, & u_{0i}, & u_{0j} \\ u_{0i}, & u_{ii}, & u_{ij} \\ u_{0j}, & u_{ij}, & u_{jj} \end{pmatrix} = \frac{1}{p} \det P(N-i-j, N-i-j)$$

und analogisch, wenn $q = \det Q_0$,

$$2 v_{0i} v_{0j} v_{ij} = \frac{1}{q} \det P(N-i-j, N-i-j).$$

Wegen $u_0 = \frac{\alpha}{\beta} v_0$ ist also

$$v_{0i} v_{0j} v_{ij} = \frac{p}{q} u_{0i} u_{0j} u_{ij} = \frac{p}{q} \frac{\alpha^2}{\beta^2} v_{0i} v_{0j} u_{ij}.$$

Nach der Voraussetzung sind aber sämtliche Koordinaten von y von Null verschieden. Also gibt für $\sigma = \frac{p}{q} \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ und $\rho = \frac{\beta}{\alpha} \neq 0$ $V = \sigma U$ und $v_0 = \rho u_0$.

Aus (14d) folgt nun

$$\rho q_0 u_0' + \sigma P U = I_m,$$

also wegen (13d)

$$(\rho q_0 - \sigma p_0) u_0' = (1 - \sigma) I_m.$$

Da $m \geqq 2$ ist und auf der linken Seite eine Matrix von Range höchstens 1 steht, ist $\sigma = 1$, $p_o = \rho q_o$ (wegen $u_o \neq 0$) und aus (14b) und (13b) folgt,

$\rho q_{oo} u_o' = -q_o' U = -\frac{1}{\rho} p_o' U = \frac{1}{\rho} p_{oo} u_o'$. Somit gilt

$p_{oo} = \rho^2 q_{oo}$.

Es bleibt nun übrig, die letzten zwei Behauptungen zu beweisen. Zu diesem Zweck zeigen wir zunächst, dass $\det P_o < 0$ ist. Ist nämlich $(v_{\varkappa s})$, $\varkappa, s = 0, \dots, m$ die inverse Matrix zu P_o, so gilt laut (1,1)

$0 \neq -u_{o1}^2 = \det\begin{pmatrix} u_{oo}, u_{o1} \\ u_{o1}, u_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det P_o} \det P(N-\{1\}, N-\{1\})$

mit $N = \{1, \dots, m\}$, wo $\det P(N-\{1\}, N-\{1\}) \geqq 0$ wegen der positiven Semidefinitheit von P. Hieraus folgt auch, dass $P(N-\{1\}, N-\{1\})$ schon positiv definit ist. Also ist P_o laut der Anmerkung in (3,5) vom Typ $\tilde{g}$. Ist noch der Vektor y positiv, so ist die erste Zeile von $-P_o^{-1}$

$$(C, -u_{o1}, \dots, -u_{om})$$

wegen $u_o = \alpha y$ dann und nur dann nichtnegativ, falls $\alpha < 0$ ist, also (wegen (13a)), falls $p_o' y < 0$ ist. Somit ist in diesem Fall $-P_o^{-1}$ dann und nur dann vom Typ e, wenn $p_o' y < 0$ ist. Der Satz ist somit vollkommen bewiesen.

4. Erweiterte Graphen der Simplexe.

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass erweiterte Graphen der Simplexe genau die entgegengesetzten Vorzeichengraphen von Matrizen vom Typ $\hat{g}$ sind. Auch werden die wichtigsten Eigenschaften dieser Graphen untersucht und ihre geometrische Deutung gefunden.

(4,1) Sind $e_{ij} = e_{ji}$ $(i \neq j;\ i,j = 1, \dots, n+1)$ die Quadrate der Kantenlängen eines n-Simplexes $(n \geqq 1)$, und gilt $e_{ii} = 0$, $e_{io} = e_{oi} = 1$ $(i = 1, \dots, n+1)$, $e_{oo} = 0$, so ist die Matrix $E = (e_{\varkappa s})$, $\varkappa, s = 0, 1, \dots, n+1$ vom Typ e. Ist umgekehrt $B = (b_{\varkappa s})$, $\varkappa, s = 0, 1, \dots, n+1$ eine Matrix vom Typ e, so existiert eine Diagonalmatrix D mit positiven Elementen in der Hauptdiagonale derart, dass

$DBD = E = (e_{rs})$ die Eigenschaft besitzt, dass $e_{oo} = D$, $e_{oi} = e_{io} = 1$, $e_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n+1)$, wobei die Zahlen $e_{ij} = e_{ji}$ $i \neq j$, $i,j = 1, \dots, n+1$. Quadrate von Kantenlängen irgendeines n-Simplexes sind.

Beweis. Da die diagonalen Elemente von E gleich Null sind und E nichtnegativ ist, genügt es zum Beweis des ersten Teiles zu zeigen, dass E elliptisch ist. Das folgt aber aus (19) und (3,2): Ist nämlich y der $(n+2)$-gliedrige Spaltenvektor mit den Koordinaten
$y_o = 1$, $y_i = 0$, $i = 1, \dots, n+1$, so gilt

$$y'Ey = e_{oo} = 0, \quad y'Ex = \sum_{s=0}^{n+1} e_{os} x_s = \sum_{i=1}^{n+1} x_i$$

für jeden Spaltenvektor x mit Koordinaten $x_o, x_1, \dots, x_{n+1}$.

Falls x ein Spaltenvektor ist, der nicht von y linear abhängt, und falls $y'Ex = 0$ gilt, so ist $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ und $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \neq 0$. Laut (1,9) gilt dann

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j < 0,$$

also, wie man leicht nachrechnen kann, $x'Ex < 0$. Aus (3,2) folgt somit die Elliptizität von E.

Um den zweiten Teil zu beweisen, wählen wir $d_o = 1$, $d_i = b_{oi}^{-1}$, $i = 1, \dots, n+1$ als Diagonalelemente von D ($b_{oi} \neq 0$ wegen (3,6)). Dann gilt
$e_{ij} = b_{ij} b_{oi}^{-1} b_{oj}^{-1}$, $i,j = 1, \dots, n+1$, $e_{ii} = 0$, $e_{oi} = e_{io} = 1$, $e_{oo} = 0$.
Für den Vektor y mit $y_o = 1$, $y_i = 0$ $(i = 1, \dots, n+1)$ gilt $y'Ey = 0$. Es sei nun $x_1, \dots, x_{n+1}$ eine beliebige Gruppe von Zahlen, die nicht alle gleich Null sind, wobei $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ gilt. Aus der Elliptizität von B und somit von E folgt aus (2,2) für den Vektor x mit den Koordinaten $0, x_1, \dots, x_{n+1}$, da x nicht linear von y abhängt, wobei $y'Ex = \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ ist, dass
$x'Ex = \sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j < 0$
gilt. Laut (1,9) bedeutet dies, dass ein n-Simplex mit den Kantenlängenquadraten e_{ij} existiert. Der Satz ist somit bewiesen.

(4,2) Satz. Ein Vorzeichengraph ist dann und nur dann erweiterter Graph irgendeines Simplexes, wenn er entgegengesetzter Vorzeichengraph einer Matrix vom Typ g ist.

Beweis. Sei zuerst ein Vorzeichengraph G erweiterter Graph eines Simplexes. Laut (1,11) ist G der Vorzeichengraph der Matrix E^{-1}, wo E die zu diesem Simplex zugehörige Matrix (1) ist. Nach (4,1) ist E vom Typ e, also ist $-E^{-1}$ vom Typ g, und der erste Teil ist bewiesen.

Sei umgekehrt G der entgegengesetzte Vorzeichengraph irgendeiner Matrix U vom Typ g (also der Ordnung $m \geqq 2$). Dann ist $-U^{-1}$ eine Matrix vom Typ e. Nach (4,1) existiert eine Diagonalmatrix D mit positiven Diagonalelementen so, dass $-DU^{-1}D = E$ die Matrix (1) irgendeines Simplexes ist. Der erweiterte Graph dieses Simplexes ist nach (1,11) gleich dem Vorzeichengraphen von $E^{-1} = -D^{-1}UD^{-1}$, also dem entgegengesetzten Vorzeichengraphen von U, und der Satz ist vollkommen bewiesen.

Anmerkung. Dieser Satz ermöglicht es, anstatt der erweiterten Graphen der Simplexe entgegengesetzte Vorzeichengraphen von Matrizen vom Typ g zu untersuchen.

(4,3) Folgerung. Im erweiterten Graphen hat der dem Mittelpunkt der Umkugel entsprechende Knotenpunkt O im folgenden Sinne keine Sonderstellung: Ist G ein erweiterter Graph eines n-Simplexes Σ, wobei der Knotenpunkt O dem Mittelpunkt der Umkugel entspricht, und ist u ein beliebiger Knotenpunkt aus G, so existiert ein n-Simplex Σ', dessen erweiterter Graph wieder G ist, wobei der Knotenpunkt u dem Mittelpunkt der Umkugel von Σ' entspricht.

Der Beweis folgt sogleich aus (4,2) und (3,11).

Anmerkung. Den Simplex Σ' aus (4,3) kann man leicht auch geometrisch erzeugen: Nehmen wir an, dass $u \neq O$ ist und dass u einer $(n-1)$-dimensionalen Seite ω_ℓ von Σ mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ entspricht, wobei ω_ℓ der zu A_ℓ gegenüberliegende Eckpunkt von Σ ist. Definieren wir die Eckpunkte

$A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n+1}$ von Σ' folgendermassen: $A'_\ell = A_\ell$; für $i \neq \ell$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ sei A'_i der zu A_i konjugierte Punkt in der Inversion, die durch die Hyperkugel mit dem Mittelpunkt A_ℓ und dem Halbmesser 1 bestimmt ist. Man sieht leicht, dass Σ' die Kantenlängenquadrate $e'_{ij} = \frac{e_{ij}}{e_{i\ell}\, e_{j\ell}}$ für $i \neq \ell \neq j \neq i$, $e'_{i\ell} = \frac{1}{e_{i\ell}}$ für $i \neq \ell$ besitzt, wo e_{ij} die zugehörigen Quadrate von Σ sind. Also bekommt man die Matrix (1) von Σ' aus E von Σ durch Umtauschen der Zeilen und Spalten mit den Indexen 0 und ℓ und durch Multiplikation von links und rechts mit einer Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen. Also sind auch die inversen Matrizen an diese beiden Matrizen in dieser Weise gebunden und die erweiterten Graphen von Σ und Σ' unterscheiden sich nur dadurch, dass im ersten der Knotenpunkt 0, im zweiten der Knotenpunkt ℓ dem Mittelpunkt der Umkugel entspricht.

(4,4) <u>Definition</u>. Wir werden einen Vorzeichengraphen einen e-Graphen nennen, falls er - bei irgendeiner Wahl des Knotenpunktes 0 - erweiterter Graph irgendeines n-Simplexes $(n \geq 1)$ ist, oder, was dasselbe bedeutet, falls er der entgegengesetzte Vorzeichengraph einer Matrix vom Typ g ist.

(4,5) Satz. Sei G ein e-Graph. Dann hat sein positiver Teil G^+ den Zusammenhangsgrad mindestens 2.

<u>Beweis</u>. Nehmen wir an, dass G^+ den Zusammenhangsgrad kleiner als 2 hat. Dann gibt es in G einen Knotenpunkt u mit der Eigenschaft, dass der positive Teil des aus G durch Wegnehmen von u und der mit u inzidenten Kanten entstandenen Graphen G' nicht mehr zusammenhängend ist. Dagegen ist nach (4,3) und nach der Definition des erweiterten Graphen G' (gewöhnlicher) Graph eines Simplexes, dessen positiver Teil laut dem Hauptsatz über gewöhnliche Graphen der Simplexe (s. Einleitung) zusammenhängend ist. Dieser Widerspruch beweist den Satz.

<u>Anmerkung</u>. Wir werden sehen, dass die Eigenschaft eines Vorzeichengraphen, den positiven Teil mit dem Zusammenhangsgrad wenigstens 2 zu besitzen, nicht dazu

hinreicht, dass er ein e-Graph ist. Dagegen zeigt der Satz (4,7), dass dies im Falle der sog. transitiven Graphen eintritt.

(4,6) <u>Definition</u>. Ein Vorzeichengraph (oder Graph) G heisst transitiv, wenn zu jeden zwei Knotenpunkten u, v von G ein Automorphismus von G existiert, der u in v überführt.

(4,7) Satz. Sei G ein transitiver Vorzeichengraph, dessen positiver Teil G^+ den Zusammenhangsgrad wenigstens 2 hat. Dann ist G ein e-Graph.

<u>Beweis</u>. Bezeichnen wir mit $1, 2, \ldots, m$ $(m \geqq 3)$ die Knotenpunkte von G und definieren wir die Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$, $i, j \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$ folgendermassen: $a_{ij} = 1$, falls $i \neq j$ und falls es in G eine <u>positive</u> Kante ij gibt; sonst ist $a_{ij} = 0$; $b_{ij} = 1$, falls $i \neq j$ und falls es in G eine <u>negative</u> Kante ij gibt; sonst ist $b_{ij} = 0$. Die Matrizen A und $A_o = A(M - \{m\}, M - \{m\})$ sind symmetrisch, nichtnegativ und wegen (1,8) unzerlegbar. Laut (1,6) existiert ein positiver einfacher Eigenwert c von A, der grösser ist als jeder andere Eigenwert von A (Eigenwerte von A sind reell) und dem ein positiver Eigenvektor y entspricht. Es gibt auch einen positiven einfachen Eigenwert c_o von A_o, dem ein positiver Eigenvektor y_o (mit $m-1$ Koordinaten) entspricht. Wir werden beweisen, dass, falls d der zweitgrösste Eigenwert von A ist,

$$c > c_o > d$$

gilt.

Die Ungleichheiten $c \geqq c_o \geqq d$ folgen aus allgemeinen Sätzen über Eigenwerte symmetrischer Matrizen ([5], S. 262, Satz 14). Um die Beziehungen $c \neq c_o$, $c_o \neq d$ zu beweisen, bemerken wir, dass für jede symmetrische singuläre Matrix $C = (c_{ij})$, $i, j \in N = \{1, \ldots, n\}$, für welche $C_o = C(N - \{n\}, N - \{n\})$ den Rang $n-2$ hat, wobei $C_o y_o = 0$, $y = \begin{pmatrix} y_o \\ 0 \end{pmatrix}$ die Eigenschaft besitzt, dass $Cy = 0$ ist:

Wenn nämlich $C = \begin{pmatrix} C_o , c \\ c' , \gamma \end{pmatrix}$ gilt, so ist $Cy = \begin{pmatrix} 0 \\ c' y_o \end{pmatrix}$.
Falls $c' y_o = \rho \neq 0$, so gilt wegen der Singularität von C $Cz = 0$, $z = \begin{pmatrix} z_o \\ \sigma \end{pmatrix} \neq 0$, also

$$C_o z_o + c\sigma = 0 ,$$

$$c' z_o + \gamma \sigma = 0 .$$

Hieraus folgt $y_o' C_o z_o + y_o' c \sigma = 0$, also $\rho \sigma = 0, \sigma = 0$.
Somit ist $C_o z_o = 0$, d.h. $z_o = \mu y_o$, denn $y_o \neq 0$ ist der bis auf einen Faktor eindeutig bestimmte Vektor x_o, für den $C_o x_o = 0$ ist. Nun gilt aber $0 = c' z_o + \gamma \sigma = \mu c' y_o = \mu \rho$, also $\mu = 0$, was einen Widerspruch mit $z \neq 0$ ergibt. Wäre nun $c = c_o$, so wären die beiden Matrizen $C = c I_m - A$ und $C_o = c I_{m-1} - A_o$ singulär von den Rangen $m-1$ und $m-2$ und $\begin{pmatrix} y_o \\ 0 \end{pmatrix}$ wäre ein vom Vektor y linear unabhängiger Eigenvektor von A, was unmöglich ist. Wäre $c_o = d$, so wäre wieder $\begin{pmatrix} y_o \\ 0 \end{pmatrix}$ ein zu d zugehöriger Eigenvektor von A, was wegen 4^o von (1,6) unmöglich ist. Also ist wirklich $c > c_o > d$. Es existiert somit ein $\varepsilon > 0$ so klein, dass für die zwei grössten Eigenwerte $\tilde{c}, \tilde{d}$ von $\tilde{C} = A - \varepsilon B$ und für den grössten Eigenwert $\tilde{c}_o$ von
$\tilde{C}_o = A_o - \varepsilon B_o$, $B(M - \{m\}, M - \{m\})$, wieder

$$\tilde{c} > \tilde{c}_o > d$$

gilt, wobei der zu $\tilde{c}_o$ zugehörige Eigenvektor x_o von $\tilde{C}_o$ positiv ist. Dann ist die Matrix $\tilde{c}_o I_m - \tilde{C}$ symmetrisch regulär mit negativer Determinante, wobei ihre Hauptmatrix $\tilde{c}_o I_{m-1} - \tilde{C}_o$ singulär vom Rang $m-2$, positiv semidefinit mit dem zu Null zugehörigen positiven Eigenvektor ist. Aus der Transitivität von G folgt leicht, dass sämtliche Hauptminoren der Ordnung $m-1$ von $\tilde{c}_o I_m - \tilde{C}$ gleich Null sind. Also ist diese Matrix wegen (3,13) und der Anmerkung in (3,9) vom Typ $\tilde{g}$. Ihre inverse Matrix hat in der letzten Spalte den Vektor $\begin{pmatrix} k x_o \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei x_o positiv ist. Aus der Transitivität folgt, dass jede Spalte von dieser inversen Matrix entweder nichtnegativ oder nichtpositiv ist, Aus der Symmetrie und aus der Tatsache, dass die nichtdiagonalen Elemente von Null verschieden sind, sowie daraus, dass die Hauptminoren dritten Grades negativ sind, folgt, dass diese Matrix negativ genommen vom Typ $\mathcal{E}$ ist, also $\tilde{c}_0 I_{nn} - \tilde{C}$ vom Typ $\mathcal{G}$.

Da G ihr entgegengesetzter Vorzeichengraph ist, ist laut (4,2) G ein $\mathcal{E}$-Graph. Der Satz ist somit bewiesen.

(4,8) Sei G ein $\mathcal{E}$-Graph; weiter gebe es einen Vorzeichengraphen $\tilde{G} \supset G$ mit denselben Knotenpunkten wie G, der nicht ein $\mathcal{E}$-Graph ist. Es sei $A = (a_{ij}), i, j \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ eine Matrix vom Typ $\mathcal{E}$, deren Inverse den entgegengesetzten Vorzeichengraphen G hat. Sei K die Menge derjenigen nichtgeordneten Paare $(s, t), s, t \in N$, für die entweder $s \neq t$ gilt und st Kante von G ist, oder $s = t$ gilt. Dann hat die Matrix $U = (\gamma_{i\alpha})$, $i \in N$, $\alpha \in K$, $\gamma_{i\alpha} = a_{is} a_{it}$, wo $\alpha = (s, t) \in K$ ist, einen kleineren Rang als n.

<u>Beweis</u>. Nehmen wir an, dass U den Rang n hat, und bezeichnen wir mit $\bar{K}$ die Menge von denjenigen nichtgeordneten Paaren $(s, t), s, t \in N$, die in K nicht liegen. Sei $A^{-1} = B = (b_{ij})$, also $b_{ij} = 0$ für $(i, j) \in \bar{K}, i, j \in N$. Betrachten wir eine Matrix $X = (x_{ij}), i, j \in N$, deren Elemente $x_{ij} = x_{ji}$ $\binom{n+1}{2}$ unabhängige Veränderliche sind, in einer festen symmetrischen Umgebung Ω von B. Ist X regulär, so sei $F_i(X)$ das i-te diagonale Element von X^{-1}. Wegen $a_{ii} = 0$ gilt somit $F_i(B) = 0$ für alle $i \in N$. Wir werden zeigen, dass es eine symmetrische Umgebung Ω_1 von B gibt, in der X regulär ist und in der für die durch $F_i(X) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ bestimmte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ gilt, dass $x_{ij} = x_{ji}$ mit $(i, j) \in K$ als unabhängige Parameter für $\mathfrak{M}$ genommen werden können. Laut dem Satz über implizite Funktionen ist dazu hinreichend, dass die Jacobische Matrix

$$J = \left(\frac{\partial F_i(X)}{\partial x_{k\ell}}\right)_B, \ i \in N, \ (k, \ell) \in K,$$

im Punkte $B = (b_{ij})$ den Rang n besitzt. Um die Matrix J kurz zu bestimmen, bemerken wir, dass für das

Differential dX^{-1}

$$dX^{-1} = X^{-1}(dX)X^{-1}$$

gilt. Also ist

$$\sum_{(k,\ell)\in K\cup K} \frac{\partial F_i}{\partial x_{k\ell}} dx_{k\ell} = -\sum_{k\in N,\ell\in N} x_{ik} x_{i\ell} dx_{k\ell} = -\sum_{k\in N} x_{ik} x_{ik} dx_{kk} -$$

$$-2\sum_{\substack{(k,\ell)\in K\cup K,\\ k<\ell}} x_{ik} x_{i\ell} dx_{k\ell}$$, also das Element $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{k\ell}}\right)_B = -\sigma_{k\ell} a_{ik} a_{i\ell}$,

wo $\sigma_{k\ell} = 1$ für $k = \ell$, $\sigma_{k\ell} = 2$ für $k \neq \ell$ gilt. Somit ist J bis auf die Faktoren -1 in den Spalten (k,ℓ) mit $k = \ell$ und -2 in den Spalten mit $k \neq \ell$ mit U identisch und besitzt wirklich den Rang n. Mann kann also in einer Umgebung $\Omega_2 \subset \Omega_1$ von B, in der X elliptisch ist und $-X^{-1}$ ausserhalb der Diagonale nichtnegativ ist, die Elemente $x_{ij} = x_{ji}$ mit $(i,j) \in \overline{K}$ so absolut klein wählen, dass $x_{ij} > 0, < 0$ oder $= 0$ gilt, je nachdem ij eine negative, eine positive oder keine Kante in $\widetilde{G}$ ist. Dann ist nämlich die zugehörige Matrix X, die in $\mathfrak{M}$ liegt, vom Typ g, wobei $\widetilde{G}$ ihr entgegengesetzter Vorzeichen-graph ist. Der Widerspruch, dass $\widetilde{G}$ ein e-Graph ist, beweist den Satz.

(4,9) Satz. Ist ein Knotenpunkt eines e-Graphen G satt, so ist jeder Obergraph $\widetilde{G} \supset G$ mit denselben Knotenpunkten wie G wieder ein e-Graph.

<u>Beweis</u>. Folgt aus (4,8), da die Teilmatrix $U_1 = (\gamma_{i\alpha_k})$ von U, $i \in N$, $k \in N$, $\alpha_k = (j,k)$ für $k \neq j$, $\alpha_j = (\ell,\ell)$, wo j dem satten Knotenpunkt entspricht und $\ell \neq j$ beliebig ist, regulär ist: Die Determinante von U_1 ist nämlich (bis auf das Vorzeichen) gleich

$$\prod_{k\neq j} e_{jk} \cdot e_{j\ell}^2 \cdot \det(e_{uv}),\ u,v \in N - \{j\},$$

also infolge der Elliptizität von A von Null verschieden.

(4,10) Sei G ein e-Graph mit der Knotenpunktmenge $U(G)$; weiter gebe es für $U_0 \subset U(G)$ den Gaussschen Graphen $G(U_0)$ von G bezüglich U_0. Hat $U(G) - U_0$ wenigstens drei Knotenpunkte, ist $G(U_0)$ wieder ein

$\mathfrak{e}$ -Graph.

Beweis. Laut (4,2) existiert eine Matrix B vom Typ $\mathfrak{g}$, deren entgegengesetzter Vorzeichengraph G ist. Die Gausssche Matrix von B bezüglich U_0 hat eine Ordnung $\geqq 3$ und ist nach (3,11) wieder vom Typ $\mathfrak{g}$. Nach (4,2) ist also ihr entgegengesetzter Vorzeichengraph G' wieder ein $\mathfrak{e}$ -Graph. Aus (2,7) folgt nun $G' = G(U_0)$, und der Satz ist bewiesen.

Dieser Satz hat folgende geometrische Deutung:

(4,11) Satz. Sei Σ ein n-Simplex mit den $(n-1)$-dimensionalen Seiten ω_i, $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$. Sei $M \subset N$, $M \neq N$, und Σ_1 sei diejenige p-dimensionale ($p \geqq 1$, $p = n - m$, wo m die Anzahl von Elementen in M ist) Seite von Σ, die Durchschnitt von ω_i für $i \in M$ ist. Sei G der erweiterte Graph von Σ mit den Knotenpunkten $i \in N$ (die den Seiten ω_i entsprechen) und 0 (der dem Mittelpunkt der Umkugel entspricht). Sei G $\mathfrak{g}$-definit bezüglich M. Dann ist der Gausssche Graph $G(M)$ der erweiterte Graph von Σ_1, wobei der Knotenpunkt 0 wieder dem Mittelpunkt der Umkugel von Σ_1 entspricht und $j \in N - M$ derjenigen $(p-1)$-dimensionalen Seite von Σ entspricht, die der Durchschnitt von Σ_1 mit ω_j ist.

Beweis. Dem n-Simplex Σ entspricht die Matrix E aus (1), die nach (4,1) vom Typ $\mathfrak{e}$ ist. Der Seite Σ_1 entspricht in demselben Sinne die Hauptuntermatrix $E_1 = E(0 \cup \underline{N-M}, 0 \cup \underline{N-M})$. Dabei ist G nach (1,11) der Vorzeichengraph von E^{-1}, $G(M)$ ist nach (1,3) und (2,7) der Vorzeichengraph von E_1^{-1}, also nach (1,11) der erweiterte Graph von Σ_1. Die übrigen Behauptungen des Satzes sind klar.

(4,12) Sei $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $N_0 = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $n \geqq 2$. Ein Vorzeichengraph G_0 mit der Knotenpunktmenge N_0 ist dann und nur dann ein $\mathfrak{e}$ -Graph, wenn es Zahlen $u_{rs} = u_{sr}$, $r \neq s$, $r, s \in N_0$, gibt derart, dass für

$$u_{ii} = -\sum_{j \neq i, j \in N} u_{ij}, \quad i \in N$$

(u_{00} beliebig) gilt:

1° G_0 ist der Vorzeichengraph von $U_0 = (u_{\varkappa s}), \varkappa, s \in N_0$;

2° $A = (-u_{ik}), i, k \in N$, ist positiv semidefinit vom Range $n-1$;

3° falls G der auf N induzierte Teilgraph von G_0 ist, so gilt für jedes $i \in N$

$$u_{0i} = \sum_{K \in S_1} [2 - s_i(K)] \, \pi(K),$$

wo S_1 die Menge sämtlicher Gerüste von G bedeutet, $\pi(K)$ das Produkt der Zahlen $u_{k\ell}$ für sämtliche Kanten $k\ell$ von K und $s_i(K)$ der Grad des Knotenpunktes i in K.

Beweis. Existiert U_0 , so erfüllt die Matrix A die Voraussetzungen des Satzes (3,12). Also hat bei einer geeigneten Wahl von a_{oc} und $a_{oi} = a_{io} = -u_{oi}$ die Matrix

$$A_c = (a_{\varkappa s}), \varkappa, s \in N_0,$$

die wegen $c \neq 0$ aus (3,12) regulär ist, alle Hauptminoren der Ordnung n gleich Null. Laut dem Satz (3,13) ist A vom Typ $\tilde{g}$. Da noch $\sum_{i \in N} a_{oi} = c$ und wegen (12) und (1,10) $c < 0$ gilt, ist nach (3,13) A vom Typ g . Somit ist laut (4,2) G_0 ein e-Graph.

Ist umgekehrt G_0 ein e-Graph mit $m \geq 3$ Knotenpunkten, so existiert wegen (4,2) eine Matrix

$$C_0 = (c_{\varkappa s}), \varkappa, s = 0, 1, \ldots, m-1,$$

vom Typ g , deren entgegengesetzter Vorzeichengraph G_0 ist. Die Matrix $C = (c_{ij}), i, j = 1, \ldots, m-1$ ist also singulär, positiv semidefinit und vom Rang $m-2$. Dabei ist für einen positiven Vektor z $Cz = 0$. Sei Z die diagonale Matrix, deren diagonale Elemente die Koordinaten (in derselben Anordnung) von z sind, und sei $A = ZCZ$. Dann hat die Matrix $A = (a_{ik})$ die Eigenschaft der Matrix in 2° (für $n = m-1$). Laut (3,13) gibt es bis auf einen Faktor ρ genau einen Vektor a_0 , der, zusammen mit einer geeigneten Zahl a_{oo} , A zur Matrix A_0 vom Typ $\tilde{g}$ ergänzt. Da aber nach (3,12) unsere Wahl der Zahlen $u_{ik} = -a_{ik}$ für $i, k = 1, \ldots, m-1, u_{oi} = u_{io}$ aus 3°, diese Bedingung erfüllt, sowie auch jede Matrix

(15) $\begin{pmatrix}\sigma, 0\\ 0, \tau\end{pmatrix} C_0 \begin{pmatrix}\sigma, 0\\ 0, \tau\end{pmatrix}$

mit $\sigma > 0$, die sogar vom Typ $\mathfrak{g}$ ist, so gilt für ein $\sigma > 0$ wegen (3,13) dass U_0 (mit geeignetem u_{00}) von der Form (15) ist und deswegen die Bedingungen 1^0, 2^0, 3^0 erfüllt. Der Satz ist bewiesen.

(4,13) Folgerung. Ist der Graph G_0 aus dem vorigen Satz ein e-Graph, so gilt:

1^0 Kein Knotenpunkt zweiten Grades im Graphen G, der zugleich eine Artikulation in G ist, ist mit O durch eine Kante verbunden.

2^0 Jeder Knotenpunkt, der in G den Grad 1 hat, ist mit O durch eine positive Kante verbunden.

Ist G positiv, so gilt ferner:

3^0 Jeder Knotenpunkt zweiten Grades, der keine Artikulation ist, ist mit O durch eine positive Kante verbunden.

4^0 Jeder Knotenpunkt von G, der in G eine Artikulation ist und der in G den Grad $\geqq 3$ hat, ist mit O durch eine negative Kante verbunden.

Beweis. Sei i der betrachtete Knotenpunkt von G. Die erste Behauptung folgt aus 3^0 von (4,12), denn in diesem Fall ist $s_i(K) = 2$ für jedes $K \in S_1$. Die zweite Behauptung ist klar wegen (4,5). Die dritte Behauptung folgt auch aus 3^0 von (4,12) und daraus, dass $\pi(K) > 0$ für jedes $K \in S_1$ und dass $s_i(K) \leqq 2$, wobei für irgendein $K \in S_1$ $s_i(K) = 1$ gilt. Die letzte Behauptung folgt daraus, dass für jedes $K \in S_1$ in 3^0 von (4,12) $s_i(K) \geqq 2$ ist, wobei für irgendein $K \in S_1$ $s_i(K) > 2$ gilt.

(4,14) Der positive Kreis (mit $m \geqq 3$ Knotenpunkten) ist ein e-Graph.

Beweis. Folgt aus (4,7).

Anmerkung. Dieser Graph entspricht demjenigen rechtwinkligen Simplex, dessen sämtliche zweidimensionale Seiten rechtwinklige Dreiecke sind. Dieses Simplex hat die

Eigenschaft, dass der Mittelpunkt der Umkugel im Mittelpunkt der längsten Kante liegt (vgl. [3], Satz 11).

(4,15) Satz. Ist G ein Vorzeichengraph mit der Knotenpunktmenge $\{1, 2, \ldots, m\}$, $m \geqq 2$, und ist sein positiver Teil zusammenhängend, so existiert mindestens ein e-Graph G_0 mit der Knotenpunktmenge $\{0, 1, \ldots, m\}$, dessen induzierter Teilgraph G ist.

Beweis. Folgt aus dem Hauptsatz über gewöhnliche Graphen der Simplexe und aus (4,2) und (4,4).

(4,16) Satz. Ist im vorigen Satz G ein (positiver) Baum, so ist G_0 eindeutig bestimmt. Dabei ist 0 mit dem Knotenpunkt i aus G durch eine positive bzw. negative Kante in G_0 dann und nur dann verbunden, falls i in G den Grad 1 bzw. >2 hat (mit den Knotenpunkten zweiten Grades ist 0 nicht verbunden).

Beweis. Folgt aus (4,12) oder aus dem Satz 10 in [3], denn wir können G als den gewöhnlichen Graphen eines rechtwinkligen Simplexes ansehen.

(4,17) Satz. Ist G aus dem Satz (4,15) ein positiver Kreis, so ist der zugehörige Graph G_0 eindeutig bestimmt; der Knotenpunkt 0 ist in G_0 mit allen anderen Knotenpunkten durch positive Kanten verbunden.

Beweis. Folgt aus (4,13).

(4,18) Satz. Ist G aus (4,15) ein Kreis mit genau einer negativen Kante $1m$, so ist G_0 eindeutig bestimmt: 0 ist mit 1 und m durch positive Kanten, mit allen anderen Knotenpunkten von G durch negative Kanten verbunden.

Beweis. Folgt aus 3^0 von (4,12), da genau zwei Gerüste K die Eigenschaft haben, dass ein fester Knotenpunkt i aus G in K den Grad 1 hat (sonst hat er den Grad 2). Dabei ist für genau ein Gerüst K_0 (in dem die Kante $1m$ fehlt) $\pi(K_0) > 0$. Also sind $u_{02}, u_{03}, \ldots, u_{0,m-1}$ negativ, denn sie sind Summe von je zwei $\pi(K)$, wobei diese K von K_0 verschieden sind. Die Kanten 01 und $0m$ sind positiv wegen 2^0 aus (4,13).

5. Total nichtstumpfwinklige n-Simplexe.

(5,1) Definition. Ein n-Simplex heisst nichtstumpfwinklig, falls keiner der Innenwinkel der $(n-1)$-dimensionalen Seiten stumpf ist. Ein n-Simplex heisst total nichtstumpfwinklig, falls es nichtstumpfwinklig ist und falls der Mittelpunkt der Umkugel ein innerer Punkt des Simplexes oder ein innerer Punkt irgendeiner Seite des Simplexes ist.

Anmerkung. Ein n-Simplex ist also genau dann nicht - stumpfwinklig. bzw. total nichtstumpfwinklig, wenn sein gewöhnlicher bzw. erweiterter Graph lauter positive Kanten hat.

In [3] wurde bewiesen (Satz 5), dass jede k-dimensionale Seite eines nichtstumpfwinkligen n-Simplexes $(2 \leqq k \leqq n-1)$ wieder nichtstumpfwinklig ist und dass ihr Graph durch den Graphen des n-Simplexes eindeutig bestimmt ist. Im folgenden Satz werden ähnliche Eigenschaften für total nichtstumpfwinklige Simplexe formuliert.

(5,2) Satz. Jede k-dimensionale Seite eines total nichtstumpfwinkligen n-Simplexes Σ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ ist wiederum ein total nichtstumpfwinkliger Simplex. Sein erweiterter Graph ist durch den erweiterten Graphen G von Σ eindeutig bestimmt und ist gleich dem Gaussschen Graphen $G(M)$ von G bezüglich derjenigen Menge M von seinen Knotenpunkten, die den $(n-1)$-dimensionalen, jene Seite enthaltenden Seiten von Σ entsprechen.

Beweis. Folgt aus (4,11) und (2,3).

Im Falle der total nichtstumpfwinkligen Simplexe (d.i. der positiven e-Graphen) kann der Satz (4,5) und (4,14) folgendermassen verstärkt werden:

(5,3) Satz. Ein positiver e-Graph ist entweder ein Kreis, oder sein Zusammenhangsgrad beträgt mindestens 3.

Beweis. Laut (4,5) hat dieser Graph G_0 den Zusammenhangsgrad mindestens 2. Hat G_0 drei Knotenpunkte, so ist alles klar. Nehmen wir an, dass G_0 mindestens 4 Knotenpunkte und den Zusammenhangsgrad 2 hat. Es seien nun u, v zwei Knotenpunkte von G_0, die einen Schnitt von G_0 bilden. Wir werden beweisen, dass der Grad von v in G_0 gleich 2 ist. Hieraus wird schon leicht folgen, dass jeder Nachbarknotenpunkt von v entweder zusammen mit u wieder einen Schnitt bildet und wieder den Grad 2 hat, oder ein Nachbar von u ist. Da G_0 zusammenhängend ist, wird hieraus schon folgen, dass G_0 ein Kreis ist.

Zum Beweis der ausgesprochenen Tatsache wählen wir den Knotenpunkt u als 0 aus dem Satz (4,12). Da G_0 positiv ist, ist in (4,12) $u_{rs} \geq 0$ für $r \neq s$ und $\pi(K) > 0$ für jedes $K \in S_1$. Entspricht der Knotenpunkt v dem Index j, ist j Artikulation desjenigen Graphen G, der aus G_0 durch Wegnehmen von 0 und der mit 0 inzidenten Kanten entsteht, also auch Artikulation jedes Gerüstes K von G. Somit beträgt der Grad $s_j(K)$ von j in K mindestens 2, sodass nach 3^0 in (4,12) $u_{0j} \leq 0$ gilt. Dagegen ist $u_{0j} \geq 0$, sodass $u_{0j} = 0$ gilt und $s_j(K) = 2$ für jedes Gerüst K von G. Da es in G wegen (1,7) mindestens ein Gerüst mit $s_j(K) = s_j(G)$ gibt, ist der Grad von j in G und wegen $u_{0j} = 0$ auch in G_0 gleich 2 und der Satz ist vollkommen bewiesen.

(5,4) Folgerung. Hat ein positiver e-Graph einen Knotenpunkt vom Grade 2, so ist er ein Kreis.

Anmerkung. Dieser Satz hat folgende geometrische Deutung: Liegt der Mittelpunkt der Umkugel eines nichtstumpfwinkligen n-Simplexes auf einer Kante, so ist dieses n-Simplex (für $n \geq 2$) rechtwinklig, vom Typ aus der Anmerkung (4,14).

(5,5) Satz. Zweidimensionale Seiten eines total nichtstumpfwinkligen n-Simplexes ($n \geq 2$) sind entweder alle rechtwinklig oder alle spitzwinklig.

Beweis. Folgt aus (5,3), (4,14) und (2,7).

(5,6) Satz. Sei G_0 ein positiver e-Graph. Wenn wir von G_0 k Knotenpunkte und die mit ihnen inzidenten Kanten wegnehmen, besitzt der entstandene Graph G_1 höchstens k Komponenten. Hat er genau k Komponenten, so ~~ist G_0~~ entweder ein Kreis oder ist die Anzahl der

Knotenpunkte von G_0 gleich $n = 2k$ und zwischen je zwei der gegebenen k Knotenpunkte sowie zwischen je zwei der übrigen k Knotenpunkte gibt es keine Kante in G_0.

Beweis. Sei $N = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ die Knotenpunktmenge von G_0 und $N_1 \subset N$ enthalte $k \geqq 1$ Knotenpunkte. Da für $k = 1$ der Satz wegen (4,5) richtig ist, sei $k \geqq 2$. Wir können annehmen, dass $0 \in N_1$ ist; sei $N_2 = N_1 - \{0\}$. Wegen (4,12) gibt es nichtnegative Zahlen u_{rs} $(r, s \in N, r \neq s)$ so, dass u.a. 3^0 in (4,12) gilt, wobei wegen der Positivität von G_0 $\pi(K) > 0$ für $K \in S_1$ ist. Ist ℓ die Anzahl der Komponenten von G_1 und $K \in S_1$, so ist die analogische Anzahl der Komponenten für K: $\ell(K) \geqq \ell$. Sei noch $h(K)$ die Anzahl von Kanten in K, die zwischen den Knotenpunkten aus N_2 in K vorhanden sind. Wegen (1,9) gilt nun in (4,12), 3^0

$$0 \leqq \sum_{i \in N_2} u_{0i} = \sum_{K \in S_1} \Big(\sum_{i \in N_2} [2 - s_i(K)]\Big) \pi(K) =$$

$$= \sum_{K \in S_1} [2(k-1) - (k-1) - \ell(K) - h(K) + 1] \pi(K) \leqq (k - \ell) \sum_{K \in S_1} \pi(K).$$

Also ist $k \geqq \ell$. Falls $k = \ell$ gilt, so ist $u_{0i} = 0$ für $i \in N_2$ und ferner $\ell(K) = \ell$ und $h(K) = 0$ für jedes $K \in S_1$, sodass wirklich zwischen je zwei Knotenpunkten aus N_1 keine Kante in G_0 existiert. Nehmen wir an, dass G_0 kein Kreis ist. Dann hat G_0 nach (5,3) den Zusammenhangsgrad mindestens 3 und der auf $N - \{0\}$ induzierte Graph G ist ohne Artikulation. Setzen wir voraus, dass in irgendeiner Komponente von G_1 zwei verschiedene Knotenpunkte u_1, u_2 vorhanden sind. Ist $v \in N_2$ so gibt es wegen (1,8) einen Weg $W = u_1 \dots v \dots u_2$ in G, der nach (1,7) zu einem Gerüst K von G ergänzt werden kann. Doch u_1 und u_2 liegen jetzt in verschiedenen Komponenten des Graphen, der aus K durch Wegnehmen der Knotenpunkte (und der zugehörigen Kanten) von N_2 entsteht, sodass $\ell(K) \geqq \ell + 1$ gilt. Dieser Widerspruch gegen $\ell(K) = \ell$ für $K \in S_1$ beweist, dass jede Komponente von G_1 ein isolierter Knotenpunkt ist, sodass $n = 2k$ gilt.

Wenn wir die Menge $N - N_1$ der übrigen

k Knotenpunkte mit den zugehörigen Kanten von G_0 wegnehmen, so hat der erhaltene Graph wieder k Komponenten, sodass nach dem Bewiesenen auch zwischen zwei Knotenpunkten aus $N - N_1$ keine Kante in G_0 existiert. Der Satz ist vollkommen bewiesen.

(5,7) Satz. Sei $k \geqq 2$ eine natürliche Zahl. Bilden wir einen positiven Graphen $G(k,k)$ folgendermassen: seine Knotenpunktmenge sei
$N = \{1, 2, \dots, k, k+1, \dots, 2k\}$; ij, $i<j$, $i, j \in N$
is dann und nur dann (positive) Kante in $G(k,k)$, falls $1 \leqq i \leqq k$, $k+1 \leqq j \leqq 2k$ gilt. Dann ist $G(k,k)$ ein e-Graph; falls wir zu $G(k,k)$ genau eine positive Kante hinzufügen, so ist der erhaltene Graph kein e-Graph.

Beweis. Dass $G(k,k)$ ein e-Graph ist, folgt aus (4,7). Wenn wir zu $G(k,k)$ genau eine positive Kante hinzufügen, so ist es entweder eine Kante zwischen zwei der ersten k Knotenpunkte, oder eine Kante zwischen zwei der letzten k Knotenpunkte. Wenn wir aber im ersten Fall die Menge der ersten k Knotenpunkte (und der zugehörigen Kanten) wegnehmen, erhalten wir k Komponenten, sodass der neue Graph wegen (5,6) kein e-Graph sein kann; analogisch im zweiten Falle.

Anmerkung. Dieses Beispiel zeigt, dass es positive Graphen mit $2k$ $(k \geqq 2)$ Knotenpunkten mit dem Zusammenhangsgrad k gibt, die keine e-Graphen sind. Es ist ein Problem, ob ein positiver Graph, für welchen jede Untermenge der Knotenpunktmenge die Eigenschaft aus (5,6) besitzt, schon ein e-Graph ist.

6. Erweiterte Graphen von Dreiecken und Tetraedern.

(6,1) Satz. Es gibt drei e-Graphen mit vier Knotenpunkten:

A_4, B_4, C_4 (Fig, 1) x)

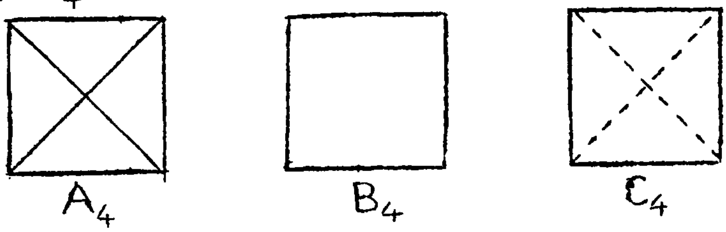


Fig. 1

die dem spitzwinkligen, rechtwinkligen und stumpfwinkligen Dreieck entsprechen.

Beweis klar.

Anmerkung. Somit ist der Graph P_4 (Fig. 2)

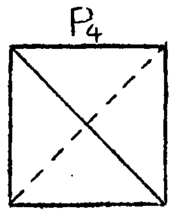


Fig. 2

kein e-Graph, was auch von allen seinen Teilgraphen mit vier Knotenpunkten mit Ausnahme von B_4 gilt. Dagegen sieht man leicht, dass alle übrigen Graphen mit vier Knotenpunkten, deren positiver Teil den Zusammenhangsgrad $\geqq 2$ hat, e-Graphen sind.

(6,2) Sei G_0 ein e-Graph mit fünf Knotenpunkten 0, 1, 2, 3, 4. Gibt es im induzierten Graphen G über 1, 2, 3, 4 genau eine negative Kante i, j, so ist $0i$ in G_0 positiv.

Beweis. Sei z.B. 1 2 negativ. Nach (4,12) gibt es Zahlen $u_{rs} = u_{sr}$ $(r \neq s,\ r, s = 0, 1, 2, 3, 4)$ so, dass für

$$(i, j = 1, 2, 3, 4)\ u_{ii} = -\sum_{j \neq i} u_{ij}$$

die Matrix $-U = (-u_{ij})$ positiv semidefinit vom Rang 3 ist und $u_{12} < 0, u_{ij} \geqq 0$ für die übrigen Paare gilt. Aus der positiven Semidefinitheit folgt, dass $-u_{11} = u_{12} + u_{13} + u_{14} > 0$ ist (falls $u_{11} = 0$, so ist

---

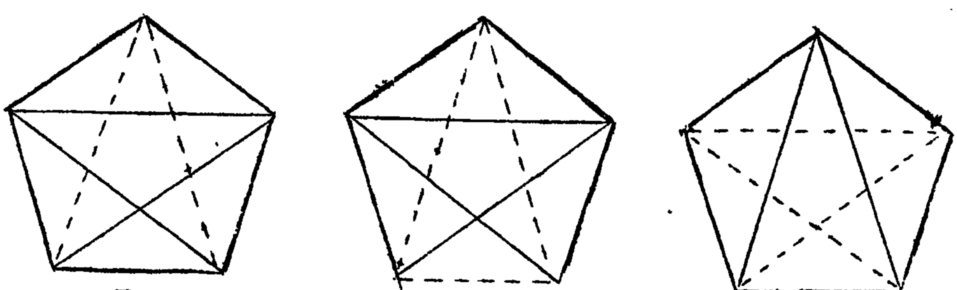
x) Durch Volllinien werden positive, durch Strichlinien negative Kanten gezeichnet.

für den Vektor v mit den Koordinaten 1, 0, 0, 0 $Uv = 0$ und der Rang von U ist < 3. Nach 3^0 von (4,12) ist

$$u_{01} = -u_{12}u_{13}u_{14} + (u_{12}+u_{13}+u_{14})(\text{[illegible]}) - u_{34} \geqq 0$$

denn beide Summanden sind nichtnegativ. Dabei sieht man leicht, dass mindestens einer von ihnen positiv sein muss, denn der positive Teil von G ist zusammenhängend.

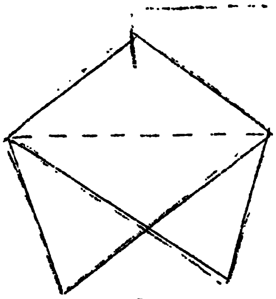
(6,3) Satz. Keiner der Graphen P_5, Q_5 und R_5 in Fig. 3 sowie keiner von ihren Teilgraphen mit fünf Knotenpunkten, mit Ausnahme des positiven Kreises, ist ein $\mathfrak{e}$-Graph. Alle übrigen Graphen mit fünf Knotenpunkten, deren positive Teil den Zusammenhangsgrad $\geqq 2$ hat, sind $\mathfrak{e}$-Graphen.



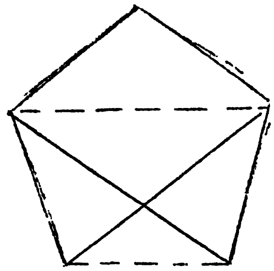
P_5 Q_5 R_5

Fig. 3

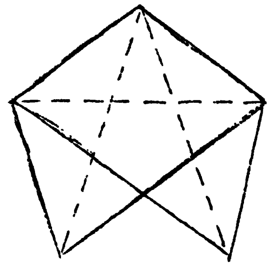
<u>Beweis</u>. Für P_5, Q_5 und R_5 sowie für ihre Teilgraphen mit wenigstens einer negativen Kante folgt der erste Teil aus (6,2). Die positiven Teilgraphen von P_5, Q_5 und R_5 haben den Zusammenhangsgrad $\leqq 2$, sodass die Behauptung wegen (5,3) richtig ist. Um den zweiten Teil zu beweisen, bilden wir alle übrigen Graphen, deren positiver Teil den Zusammenhangsgrad $\geqq 2$ hat, in der Fig. 4 ab (dass es alle sind, kann man daraus sehen, dass jeder positive Graph mit 5 Knotenpunkten, der den Zusammenhangsgrad $\geqq 2$ hat, den positiven Teil des Graphen 1 oder den Graphen 5 als Teilgraphen enthalten muss):



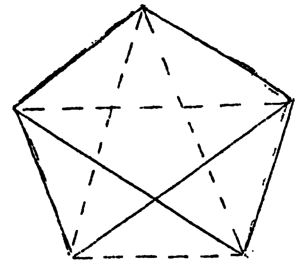
1



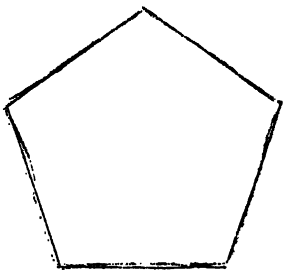
2



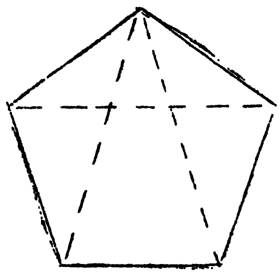
3



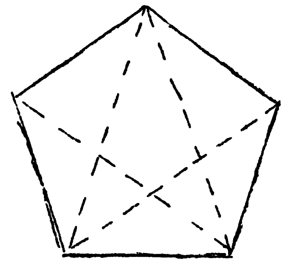
4



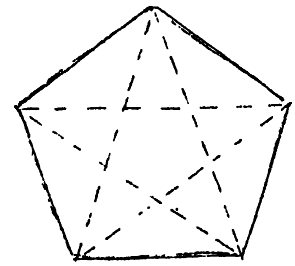
5



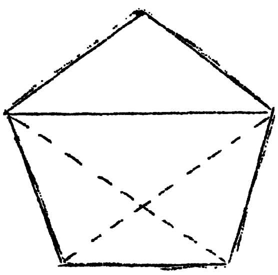
6



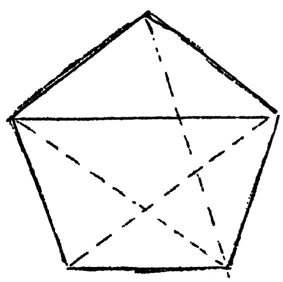
7



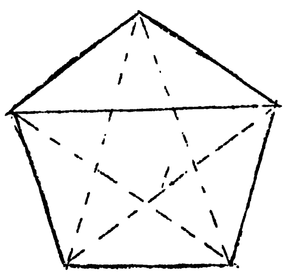
8



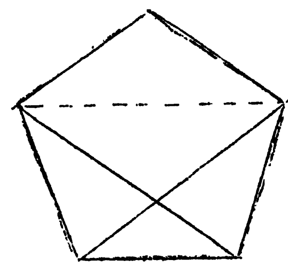
9



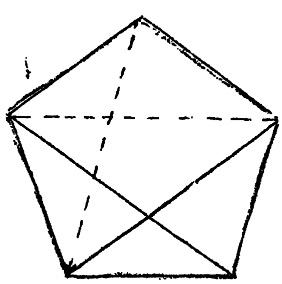
10



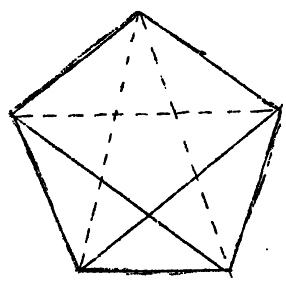
11



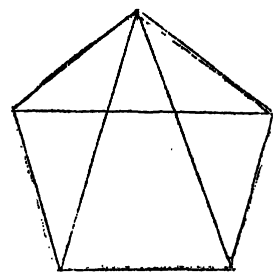
12



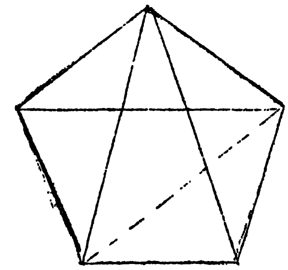
13



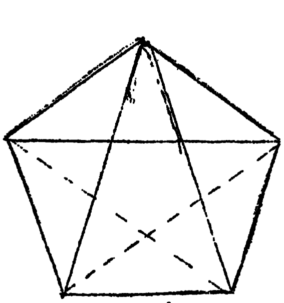
14



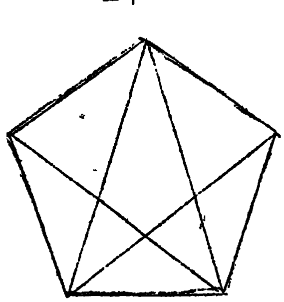
15



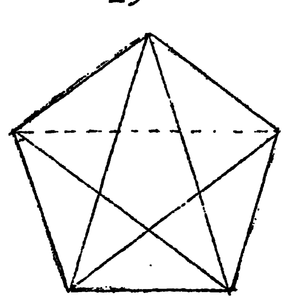
16



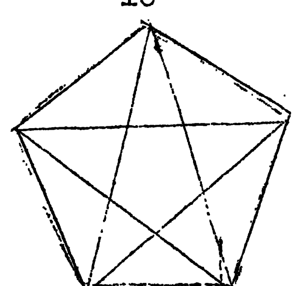
17



18



19



20

Um zu zeigen, dass diese Graphen $\mathcal{E}$-Graphen sind, beweisen wir es zunächst bei dem Graphen 9 : den Graphen in Fig. 5 kann man nach (4,15) zu einem $\mathcal{E}$-Graphen G_0 ergänzen.

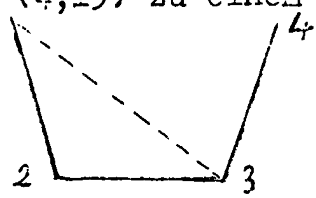


Fig. 5

G_0 muss laut (4,13) positive Kanten 01 und 04 haben und wegen (6,2) auch positive Kante 03 . Nehmen wir an, dass 02 positiv ist bzw. fehlt. Dann müsste wegen 4^0 von (4,13)(wenn wir den Knotenpunkt 3 wegnehmen) die Kante 03 negativ sein bzw. müsste 03 wegen 1^0 von (4,13) fehlen. Also ist 02 negativ und 9 ist ein $\mathcal{E}$-Graph. Ferner sind 1 und 5 Graphen der beiden rechtwinkligen Tetraeder (vgl. (4,16)). Da 2, 3, 4, 12, 13 und 14 den $\mathcal{E}$-Graphen 1 mit wenigstens einem satten Knotenpunkt enthalten, sind sie nach (4,9) $\mathcal{E}$-Graphen. In ähnlicher Weise folgt das über 7 und 8 , die den $\mathcal{E}$-Graphen (nach (4,18)) 6 enthalten, und 10, 11 die 9 enthalten, sowie über 16, 17, 18, 19 und 20 , die den (nach 4,17)) $\mathcal{E}$-Graphen 15 enthalten. Damit ist alles bewiesen.

(Fortsetzung: CMUC 2,2 1961)

LITERATUR

[1] BERGE C., Théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris 1958.

[2] FIEDLER M., Geometrie simplexu v E_n , I., Čas.pro pěst. mat. 79 (1954), 297 -320.

[3] FIEDLER M., Über qualitative Winkeleigenschaften der Simplexe, Čech. mat. žurnal 7 (1957), 463 - 478.

[4] FIEDLER M., SEDLÁČEK J., O W-basích orientovaných grafů, Čas. pro pěst. mat. 83 (1958), 214 - 225.

[5] GANTMACHER F.R., Těorija matric, Moskva 1953.

[6] HARARY F., On the notion of balance of a signed graph, Michigan Math. J. 2 (1954), 143 - 146.

[7] KÖNIG D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[8] KOTZIG A., Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov, Bratislava 1956.

[9] SCHWERDTFEGER H., On the discriminant $x'Ax \cdot y'Ay - (x'Ay)^2$, Canad. Math. Bull. 1 (1958), 175 - 179.

[10] WHITNEY H., Congruent graphs and connectivity of graphs, Amer.J. Math. 54 (1932), 150 - 168.