Eduard Čech

Propriétés projectives du contact. III

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 1 (1960), No. 1, 1–19

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104861`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
1, 1 (1960)

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DU CONTACT III

Eduard ČECH, Praha

Le problème de l'élévation de l'ordre de contact $s-1$ de deux courbes C_1, C_2 par moyen de projection des courbes faite d'un centre commun C appartient à la phase la plus ancienne de géométrie projective différentielle, car dejà en Halhpen (Sur les invariants différentiels des courbes gauches, Journal de l'Ecole Polytechnique t. 27) a montré que si deux courbes C_1, C_2 de l'espace ordinaire S_3 se touchent au point commun de A, alors les points O qui, en tant que centres de projection, élèvent l'ordre du contact remplissent un plan tangent commun de C_1, C_2 en que Halphen appela plan tangent principal. En 1897 Berzolari (Sugli invarianti differenziali projettivi delle curve di un iperspazio, Annali di Matematica t. 26 (2)) a montré que le résultat de Halphen subsiste dans les hyperspaces.

C'était en 1925 que Bompiani [Sul contatto di due curve sghembe, Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna t. 3 (8)] a montré que l'ordre de contact $s-1$ $(s \geqq 2)$ de deux courbes C_1, C_2 de l'espace ordinaire S_3 peut être élevé par projection en général de trois unités au plus ; si C_1, C_2 sont situées sur une surface donnée W et que le centre de projection O appartienne au plan tangent à W au point de contact A de C_1, C_2 l'ordre de contact des projections est général s, s'éleve à $s+1$ pour O situé sur la tangente de W conjuguée á la tangente commune de C_1, C_2 en A et, si l'on a $s \geqq 3$, il s'élève en général à $s+2$ si O est l'image du plan osculateur commun de C_1, C_2 en A dans la correspondance bien connue de C. Serge relative à la surface W et au point A.

Au Mémoire Propriétés projectives du contact I (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, année 1928,

n^o 91) j'ai considéré le cas général de deux courbes C_1 , C_2 situées dans l'espace projectif S_r à r dimensions et ayant en un point commun A un contact d'ordre précisément $s-1$ $(s \geq 2)$ et j'ai prouvé un théorème simple et intuitif qui, en supposant que l'on a

$$\sigma \leqq s, \tag{1}$$

donne la condition nécessaire et suffisante pour que le sous--espace linéaire O de S_r pris comme centre de projection élève l'ordre de contact de σ unités au moins ; l'inégalité (1) est d'ailleurs indispensable pour la validité de mon théorème de 1928 qui contient celui de Bompiani (énoncé plus haut) comme conséquence immédiate. Il est inutile de répéter ici l'énoncé de mon théorème de 1928 car c'est le cas particulier $n = 1$ du théorème plus général qui sera énonce et prouvé plus loin. Mais il convient de préciser d'abord quelques définitions. Les points de l'espace projectif S_r sont déterminés par leurs <u>coordonnées homogènes</u>; autrement dit le point x de S_r est déterminé analytiquement par un vecteur $x \neq 0$ à $r+1$ coordonnées (nombres réels), ce vecteur x pouvant encore être multiplié par un scalaire $\lambda \neq 0$ arbitraire. Pour la validité de notre théorème de 1928 il est essentiel de remplacer la notion vague de courbe par celle d'une <u>courbe régulière</u>. Une courbe régulière C de S_r est donnée en exprimant les coordonnées homogènes du point mobile x de C en fonctions de classe différentielle infinie (manifestement, cette hypothèse peut être affaiblie) d'un <u>paramètre u régulier</u> ce qui veut dire que pour chaque valeur de u les deux vecteurs

$$x, \frac{dx}{du} \tag{2}$$

sont linéairement indépendants ; la droite qui joint les deux points (2) est la <u>tangente</u> à la courbe C au point qui correspond à la valeur envisagée u du paramètre. Dans notre cas de deux courbes C_1 , C_2 en contact il suffit que la condition de régularité (indépendance linéaire de (2)) soit remplie (pour la courbe C_1 et pour la courbe C_2) pour la valeur $\mathring{u}$ du paramètre u qui correspond au point de contact parce qu'il est manifeste qu'elle est alors remplie aussi pour toutes les valeurs de u suffisamment voisines à $\mathring{u}$. Les deux courbes C_1, C_2 ont alors (si $s \geq 2$) au point A la même tangente t. Or outre la régularité des deux courbes données C_1, C_2 il est essentiel de supposer aussi celle des courbes projetées ; on voit sans peine que ceci est exprimé par la condition que le centre de projection O ne contienne aucun point de la tangente t. Cela exige que la dimension de O soit $\leqq r-2$; pour $r=3$ est un point, pour $r=4$ un point ou une droite etc.

La notion de régularité se transporte aisément du cas de courbes à celui de variétés de dimension supérieure. Une variété régulière V^m de dimension m de l'espace projectif S_r est donnée en exprimant les coordonnées homogènes de son point mobile x en fonctions infiniment différentiables d'un système de paramètres réguliers $u_1, u_2, \dots, u_m$ qui est un système tel que les vecteurs (ou points de S_r)

$$(3) \qquad x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_m}$$

sont linéairement indépendants pour chaque choix $u_1 = \mathring{u}_1, \dots, u_m = \mathring{u}_m$; les points (3) déterminent alors l'espace tangent (à m dimensions) à la variété régulière V^m au point qui correspond aux valeurs choisies $\mathring{u}_1, \dots, \mathring{u}_m$ des paramètres. Tout comme pour $m=1$, l'indépendance linéaire des points (3) pour un choix particulier $u_1 = \mathring{u}_1, \dots\dots, u_m = \mathring{u}_m$ implique celle relative à tout choix tel que les quantités $|u_1 - \mathring{u}_1|, \dots, |u_m - \mathring{u}_m|$ soient suffisamment petites.

Rappelons encore la notion de l'ordre de contact. On dit que deux variétés régulieres V_1^m, V_2^m de dimension m de l'espace S_r ont un contact d'ordre $s-1$ au moins $(s \geq 2)$ en un point commun A si pour un choix convenable

$$(4) \qquad x(u_1, \dots, u_m), \quad y(u_1, \dots, u_m)$$

de paramétrisations régulières et des facteurs scalaires de coordonnées homogènes on ait

$$(5) \qquad \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n} x}{\partial u_1^{j_1} \ldots \partial u_n^{j_n}} = \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n} y}{\partial u_1^{j_1} \ldots \partial u_n^{j_n}}$$

$$(j_1 \geqq 0, \ldots, j_n \geqq 0, \quad j_1+\cdots+j_n \leqq s-1)$$

pour les valeurs de $u_1, \ldots, u_n$ qui correspondent au point de contact A ; il en résulte en particulier que l'espace tangent à V_1^n en A y est tangent aussi à V_2^n. Supposons que le point A corresponde à $u_1 = \cdots = u_n = 0$ mais à part cela partons de paramétrisations quelconques $x(u_1, \ldots, u_n)$, $z(u_1, \ldots, u_n)$; la condition pour le contact d'ordre $s-1$ est qu'il existe des fonctions infiniment différentiables $\lambda, U_1, \ldots, U_n$ de $u_1, \ldots, u_n$ telles que

$$\lambda \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial u_1}, & \ldots, & \frac{\partial U_1}{\partial u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial U_n}{\partial u_1}, & \ldots, & \frac{\partial U_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad U_1 = \cdots = U_n = 0$$

pour $u_1 = \cdots = u_n = 0$ et que (5) ait lieu pour $u_1 = \cdots = u_n = 0$ en y posant

$$y(u_1, \ldots, u_n) = \lambda(u_1, \ldots, u_n)\, z(U_1, \ldots, U_n).$$

Le but de ce Mémoire est de commencer l'étude généralisée de l'élévation de l'ordre de contact par projection en considérant au lieu de deux courbes C_1, C_2 deux variétés régulières V_1^n, V_2^n de dimension n arbitraire. Comme pour les courbes nous sommes intéressés au cas où, l'ordre de contact de V_1^n, V_2^n au point commun A étant précisément $s-1$ $(s \geq 2)$, l'ordre de contact des projections est au moins $s+\sigma-1$ où le nombre σ satisfait à l'inégalité (1). Remarquons tout de suite qu'il y a une différence essentielle entre le cas $n=1$ de courbes et les cas supérieurs : tandis que par deux courbes régulières on peut toujours faire passer une surface régulière, la plus petite dimension m d'une variété régulière $W \subset S_r$ contenant V_1^n et V_2^n peut avoir une valeur quelconque $m \leq r$ telle que $n+1 \leq m \leq 2n$.

Dans ce Mémoire je me borne à considérer le cas $m = n+1$ où l'énoncé du résultat ne diffère guère de mon théorème principal de 1928 traitant le cas $n=1$ de deux courbes. Du reste la démonstration qui vas suivre, spécialisée au cas $n=1$, est peut-être préférable à celle donnée en 1928 qui était un peu artificielle.

Voici l'énoncé précis du théorème que nous voulons prouver. Dans l'espace projectif S_r soit W^{n+1} une variété régulière de dimension $n+1$ contenant deux variétés V_1^n, V_2^n de dimension n qui ont en un point commun A un contact d'ordre précisément $s-1$ $(s \geq 2)$. On peut alors supposer donnée une paramétrisation régulière

$$X(u_1, \ldots, u_n, v) \tag{6}$$

de W^{n+1} telle que $u_1 = \cdots = u_n = v = 0$ au point A. On peut aussi supposer qu'il existe deux fonctions scalaires

$$\varphi_1(u_1, \ldots, u_n) = \varphi_1, \quad \varphi_2(u_1, \ldots, u_n) = \varphi_2$$

infiniment différentiables et telles que

$$X(u_1, \ldots, u_n, \varphi_1), \quad X(u_1, \ldots, u_n, \varphi_2)$$

soient des paramétrisations régulières de V_1^n, V_2^n et que

(7) $$\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}\varphi_1}{\partial u_1^{j_1}\cdots\partial u_n^{j_n}}=\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}\varphi_2}{\partial u_1^{j_1}\cdots\partial u_n^{j_n}}$$

$$(j_1\geqq 0,\ldots,j_n\geqq 0,\ j_1+\cdots+j_n\leq s-1)$$

au point A . On peut encore supposer que, σ étant un entier positif satisfaisant à (1),

(8) $$\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}\varphi_i}{\partial u_1^{j_1}\cdots\partial u_n^{j_n}}=0$$

$$(i=1,2\,;\ j_1\geqq 0,\ldots,j_n\geqq 0\,;\ 0\leqq j_1+\cdots+j_n\leqq \sigma-1)$$

pour $u_1=\cdots=u_n=0$ d'où il résulte en particulier que l'espace $t\subset S_k$ à n dimensions passant par les points

(9) $$X,\ \frac{\partial X}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial X}{\partial u_n}\quad (u_1=\cdots=u_n=v=0)$$

soit l'espace tangent commun à V_1^n , V_2^n en A . Soit enfin $O\subset S_k$ un espace linéaire sans point commun à t de manière que les projections ${}^*V_1^n$, ${}^*V_2^n$ du centre O soient des variétés régulières à n dimensions ayant un contact d'ordre au moins $s-1$ au point A^* qui est la projection du point A . Ceci étant, condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre de contact en A^* de ${}^*V_1^n$, ${}^*V_2^n$ soit au moins $s+\sigma-1$ est qu'il existe des fonctions $f=f(u_1,\ldots,u_n)$, $g_i=g_i(u_1,\ldots,u_n)$ $(i=1,\ldots,n)$ infiniment différentiables telles qu'on ait

(10) $$\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}}{\partial u_1^{j_1}\cdots\partial u_n^{j_n}}\left(f.X+\sum_{i=1}^{n}g_i\frac{\partial X}{\partial u_i}+\frac{\partial X}{\partial v}\right)\equiv 0$$

$$(j_1\geqq 0,\ldots,j_n\geqq 0,\ 0\leqq j_1+\cdots+j_n\leqq\sigma-1)$$

où $X = X(u_1,\dots,u_n,v)$ [v. (6)] et $z(u_1,\dots,u_n,v) \equiv 0$ veut dire que le vecteur $z(0,\dots,0,0)$ est soit zéro soit un vecteur répresentatif d'un point situé dans l'espace O.

Remarque 1. Comme dans le cas particulier $n=1$ traité en 1928, ce qui est remarquable est que le nombre s n'entre dans les conditions (10) que moyennant l'inégalité (1). Plus précisément, la variété W étant donnée et le centre de projection O étant tel que le passage aux variétés projetées élève l'ordre de contact $s-1$ de V_1^n, V_2^n en A de σ unités au moins, alors le même centre de projection O a la même propriété si on remplace le couple V_1^n, V_2^n par un autre couple $'V_1^n$, $'V_2^n$ ayant contact d'ordre $s'-1$ en A pourvu que $s \geqq \sigma$, $s' \geqq \sigma$ et que V_1^n, $'V_1^n$ aient contact d'ordre $\sigma - 1$ au moins en A.

Remarque 2. Il est évident qu'on peut supposer que les fonctions f, g_i qui apparaissent en (10) sont des polynômes.

Dans ce qui suit, le symbole $\Omega_p(u)$ $(p=1,2,3,\dots)$ désigne chaque fonction H scalaire ou vectorielle infiniment différentiable de $u_1,\dots,u_n$ telle que

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n} H}{\partial u_1^{j_1}\dots\partial u_n^{j_n}} = 0$$

$$(j_1 \geqq 0,\dots, j_n \geqq 0, \quad 0 \leqq j_1+\dots+j_n \leqq p-1)$$

pour $u_1 = \dots = u_n = 0$ de sorte que, d'après (7) et (8),

$$\varphi_1 = \Omega_\sigma(u), \quad \varphi_2 = \Omega_\sigma(u), \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \Omega_s(u).$$

On peut poser

$$(11) \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \sum_{k=0}^{\sigma-1} C_k(u_1,\dots,u_n) + \Omega_{s+\sigma}(u)$$

où

$$(12) \qquad C_k(u_1,\dots,u_n) = \sum_{|h|=s+k} \gamma^k_{h_1\dots h_n} u_1^{h_1}\dots u_n^{h_n};$$

dans la sommation à droite, $h_1, \dots, h_n$ parcourent des entiers non négatifs dont la somme

(13) $$|h| = h_1 + \dots + h_n$$

a la valeur indiquée ; les coefficients $\gamma^k_{h_1 \dots h_n}$ dépendent symétriquement des indices inférieurs.

Si $\lambda, U_1, \dots, U_n$ sont des fonctions infiniment différentiables de $u_1, \dots, u_n$ et que

$$\Phi_2 = \Phi_2(u_1, \dots, u_n) = \varphi_2(U_1, \dots, U_n),$$

on voit sans peine que condition nécessaire et suffisante pour que

$$\lambda . X(U_1, \dots, U_n, \Phi_2) - X(u_1, \dots, u_n, \varphi_1) = \Omega_s(u)$$

est que l'on ait

$$\lambda = 1 + \Omega_s(u), \quad U_i = u_i + \Omega_s(u) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

ce qui permet de poser

$$\lambda = 1 + \sum_{k=0}^{\sigma-1} B_k(u_1, \dots, u_n) + \Omega_{s+\sigma}(u),$$

(14) $$U_i = u_i + \sum_{k=0}^{\sigma-1} A^i_k(u_1, \dots, u_n) + \Omega_{s+\sigma}(u)$$

$$(1 \leqq i \leqq n)$$

où

$$B_k(u_1, \dots, u_n) = \sum_{|h|=s+k} \beta^k_{h_1 \dots h_n} u_1^{h_1} \dots u_n^{h_n},$$

(15)

$$A^i_k(u_1, \dots, u_n) = \sum_{|h|=s+k} \alpha^{ik}_{h_1 \dots h_n} u_1^{h_1} \dots u_n^{h_n} \qquad (1 \leqq i \leqq n);$$

les coefficients $\beta_{h_1 \dots h_n}$, $\alpha^{ik}_{h_1 \dots h_n}$ dépendent symétriques des indices inférieurs. Maintenant on déduit sans difficulté, ayant égard à l'inégalité (1), que

(16) $$\lambda . X(U_1,\dots,U_m,\Phi_2) - X(u_1,\dots,u_m,\varphi_1) = \sum_{k=0}^{\sigma-1} M_k + \Omega_{s+\sigma}(u),$$

où on a, les indices $i, i_1, i_2, \dots$ parcourent (indépendamment l'un de l'autre) les valeurs $1, 2, \dots, n,$

$$M_k = B_k x + \sum_i A_k^i \frac{\partial x}{\partial u_i} + C_k \frac{\partial x}{\partial v} +$$

$$+ \frac{1}{1!} \sum_{i_1} u_{i_1} \left(B_{k-1} \frac{\partial x}{\partial u_{i_1}} + \sum_i A_{k-1}^i \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_{i_1}} + C_{k-1} \frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_1} \partial v} \right) +$$

(17) $$+ \frac{1}{2!} \sum_{i_1, i_2} u_{i_1} u_{i_2} \left(B_{k-2} \frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_1} \partial u_{i_2}} + \sum_i A_{k-2}^i \frac{\partial^3 x}{\partial u_i \partial u_{i_1} \partial u_{i_2}} + \right.$$

$$\left. + C_{k-2} \frac{\partial^3 x}{\partial u_{i_1} \partial u_{i_2} \partial v} \right) + \dots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k} u_{i_1} \dots u_{i_k} .$$

$$. \left(B_0 \frac{\partial^k x}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}} + \sum_i A_0^i \frac{\partial^{k+1} x}{\partial u_i \partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}} + C_0 \frac{\partial^{k+1} x}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k} \partial v} \right);$$

par

(18) $$x, \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_{i_1}}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_1} \partial v}, \dots$$

il faut entendre les valeurs de

$$X, \frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_{i_1}}, \frac{\partial^2 X}{\partial u_{i_1} \partial v}, \dots$$

pour $u_1 = \dots = u_m = v = 0.$

En particulier

$$\lambda X(U_1,\dots,U_m,\Phi_2) = X(u_1,\dots,u_m,\varphi_1) = M_0 + \Omega_{s+1}(u) =$$

$$= B_0 x + \sum_i A_0^i \frac{\partial x}{\partial u_i} + C_0 \frac{\partial x}{\partial v} + \Omega_{s+1}(u);$$

or les points $x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_m}, \frac{\partial x}{\partial v}$ sont linéairement indépendants et l'ordre de contact de V_1^m, V_2^m en A n'est pas $\geq s$; par suite

(19) $$C_0 \neq 0$$

(c'est-à-dire la forme algébrique C_0 n'est pas identiquement zéro).

Or soit $O \subset S_r$ un espace linéaire sans point commun avec l'espace t tangent en A à V_1^m et à V_2^m ; nous sommes intéressés en l'ordre de contact au point A^* des projections ${}^*V_1^m$ et ${}^*V_2^m$ de V_1^m et V_2^m du centre O, A^* étant la projection de A ; on sait que la position de l'espace complémentaire $\overline{O} \subset S_r$ dans lequel on projete est irrélévante. On peut supposer que le repère de coordonnées dans l'espace S_r soit choisi de manière que, d étant la dimension de O, les points de O soient ceux dont les $r-d$ premières coordonnées soient toutes égales à zero, tandis que pour les points de $\overline{O}$ (dont la dimension est $r-d-1$) ce sont les $d+1$ dernières coordonnées qui sont zéro. Si pour chaque vecteur y à $r+1$ coordonnées on désigne par $\{y\}$ l'ensemble des $r-d$ premières de ces coordonnées, on obtient un repère dans l'espace projectif $\overline{O}$: si un point de $\overline{O}$ est représenté par le vecteur y en tant que point de S_r, il est représenté dans le nouveau repère par le vecteur $\{y\}$. Pour un point quelconque de S_r représenté par le vecteur y, on a $\{y\}=0$ si le point appartient à l'espace O et, dans le cas sontraire, $\{y\}$ désigne le point projeté en $\overline{O}$, le centre de projection étant O. Evidemment

$$\{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots\} = a_1\{y_1\} + a_2\{y_2\} + \cdots .$$

Dans la notation introduite en (18), l'espace t tangent commun de V_1^m et V_2^m au point A est engendré par les points linéairement indépendants x, $\frac{\partial x}{\partial u_i}$ $(1 \leq i \leq m)$. Pour que les projections ${}^*V_1^m$, ${}^*V_2^m$ soient régulières, on doit choisir O de telle manière que O ne contienne aucun point de t ce qui signifie évidemment que les points

(20) $$\{x\}, \ \left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} \quad (1 \leq i \leq m)$$

sont linéairement indépendants.

De (16) on déduit par projection

(21) $$\lambda\{X(U_1,\dots,U_m,\phi_2)\} - \{X(u_1,\dots,u_m,\varphi_1)\} = $$
$$= \sum_{k=0}^{\sigma-1}\{M_k\} + \Omega_{s+\sigma}(u)$$

et de la définition de l'ordre du contact il s'ensuit que, pour que l'ordre de contact en A^* de ${}^*V_1^m$ et ${}^*V_2^m$ soit au moins $s+\sigma-1$ il faut et il suffit qu'on puisse choisir les coefficients des formes algébriques (15) $(0 \leqq k \leqq \sigma-1)$ de telle manière que, identiquement en $u_1,\dots,u_m$, $\sum_{k=0}^{\sigma-1}\{M_k\}=0$, ce qui peut aussi s'écrire

$$\{M_k\}=0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq k \leqq \sigma-1$$

puisque chaque M_k est une combinaison linéaire de points fixes (indépendants de $u_1,\dots,u_m$) ayant pour coefficients des formes algébriques en $u_1,\dots,u_m$ homogènes de degré $s+k$.

En particulier, pour que l'ordre de contact en A^* des projections ${}^*V_1^m$, ${}^*V_2^m$ soit $\geqq s$ il faut et il suffit qu'on puisse choisir les formes algébriques B_0 et A_0^i $(1 \leqq i \leqq m)$ de telle manière qu'on ait identiquement en $u_1,\dots,u_m$, $\{M_0\}=0$, c'est-à-dire

(22) $$B_0\{x\} + \sum_i A_0^i\left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} + C_0\left\{\frac{\partial x}{\partial v}\right\} = 0$$

ou bien qu'on ait

$$\beta^0_{h_1\dots h_m}\{x\} + \sum_i \alpha^{i0}_{h_1\dots h_m}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} + \gamma_{h_1\dots h_m}\left\{\frac{\partial x}{\partial v}\right\} = 0$$

pour chaque choix d'indices $h_1,\dots,h_m$ tel que $h_1 \geqq 0,\dots, h_m \geqq 0$, $h_1+\dots+h_m = s$. L'inégalité (19) permet de conclure qu'il existe des nombres b^0, a^{i0} $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que

$$b^0\{x\} + \sum_i a^{i0}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} + \left\{\frac{\partial x}{\partial v}\right\} = 0;$$

de l'indépendance linéaire des points (20) on déduit alors que

$$B_0 = b^0 C_0, \quad A_0^i = a^{i0} C_0 \qquad (1 \leqq i \leqq m).$$

Pour $\sigma = 1$ notre théorème est déjà démontré. Dans le cas général remarquons d'abord que, en conséquence de l'indépendance linéaire des points (20) on a le <u>lemme</u> : <u>Soit</u>

$$Q\{x\} + \sum_i P^i\left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} + C_0 \sum_j R^j y_j = 0$$

(<u>identiquement en</u> $u_1, \ldots, u_m$) <u>où l'indice</u> j <u>parcourt un ensemble fini et non vide quelconque</u>, Q, P^i, R^j <u>sont des formes algébriques en</u> $u_1, \ldots, u_m$ <u>et</u> y_j <u>sont des points fixes de</u> S_r ; <u>alors les formes</u> Q <u>et</u> P^i <u>sont divisibles par</u> C_0 . Soit D le plus grand commun diviseur des formes Q, P^i, C_0 ,

$$Q = KD, \quad P^i = H^i D, \quad C_0 = ED;$$

on a (identiquement en $u_1, \ldots, u_m$)

$$K\{x\} + \sum_i H^i\left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} + E\sum_j R^j y_j = 0$$

On voit sans peine que, si le lemme n'était pas vrai, on pourrait trouver des valeurs numériques de $u_1, \ldots, u_m$ pour lesquelles on aurait $E = 0$,sans avoir $K = H^1 = \ldots = H^m = 0$; or ceci est impossible, vu l'indépendance linéaire des points (20).

Ceci étant, nous allons procéder par induction. <u>Pour une certaine valeur de</u> k $(1 \leqq k \leqq \sigma - 2)$ <u>supposons que nous avons déjà prouvé</u> (ce qui est vrai pour $k = 1$) <u>que, pour qu'on ait</u> (identiquement en $u_1, \ldots, u_m$)

(23) $$\{M_0\} = \{M_1\} = \ldots = \{M_{k-1}\} = 0,$$

<u>il faut et il suffit qu'il existe des nombres</u>

(24) $$b^0, \; b^1_{i_1}, \ldots, b^{k-1}_{i_1 \ldots i_{k-1}}$$

$$a^{i0},\ a^{i1}_{i_1},\ \dots,\ a^{i,k-1}_{i_1\dots i_{k-1}}$$

dépendant symmétriquement des indices inférieurs et tels qu'on ait identiquement en $u_1, \dots, u_n$

(25)
$$B_0 = b^0 C_0, \quad B_1 = b^0 C_1 + \sum_{i_1} b^1_{i_1} u_{i_1} . C_0,$$
$$B_2 = b^0 C_2 + \sum_{i_1} b^1_{i_1} . u_{i_1} . C_1 + \frac{1}{2} \sum_{i_1 i_2} b^2_{i_1 i_2} . u_{i_1} u_{i_2} . C_0,$$
$$\dots\dots$$
$$B_{k-1} = b^0 C_{k-1} + \sum_{i_1} b^1_{i_1} u_{i_1} . C_{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{i_1 i_2} b^2_{i_1 i_2} u_{i_1} u_{i_2} C_{k-3} + \dots +$$
$$\dots + \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i_1 \dots i_{k-1}} b^{k-1}_{i_1 \dots i_{k-1}} u_{i_1} \dots u_{i_{k-1}} . C_0,$$

(26)
$$A^i_0 = a^i_0 C_0, \quad A^i_1 = a^{i0} C_1 + \sum_{i_1} a^{i1}_{i_1} u_{i_1} . C_0,$$
$$\dots$$
$$A^i_{k-1} = a^{i0} C_{k-1} + \sum_{i_1} a^{i1}_{i_1} u_{i_1} . C_{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{i_1 i_2} a^{i2}_{i_1 i_2} u_{i_1} u_{i_2} C_{k-3} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i_1 \dots i_{k-1}} a^{i,k-1}_{i_1 \dots i_{k-1}} u_{i_1} \dots u_{i_{k-1}} . C_0$$

et que les équations (23) sont alors équivalentes aux équations (aussi identiques) en $u_1, \dots, u_n$

(27)
$$b^0\{x\} + \sum_i a^{i0}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} + \left\{\frac{\partial x}{\partial v}\right\} = 0,$$
$$\sum_{i_1} u_{i_1}\left[b^1_{i_1}\{x\} + \sum_i a^{i1}_{i_1}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} + b^0\left\{\frac{\partial x}{\partial u_{i_1}}\right\} + \sum_i a^{i0}\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_{i_1}}\right\} + \left\{\frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_1} \partial v}\right\}\right] = 0,$$
$$\sum_{i_1 i_2} u_{i_1} u_{i_2}\Big[b^2_{i_1 i_2}\{x\} + \sum_i a^{i2}_{i_1 i_2}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} + 2\Big(b^1_{i_1}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_{i_2}}\right\} + \sum_i a^{i1}_{i_1}\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial u_{i} \partial u_{i_2}}\right\} +$$
$$+ b^0\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_1} \partial u_{i_2}}\right\} + \sum_i a^{i0}\left\{\frac{\partial^3 x}{\partial u_i \partial u_{i_1} \partial u_{i_2}}\right\} + \left\{\frac{\partial^3 x}{\partial u_{i_1} \partial u_{i_2} \partial v}\right\}\Big]= 0$$
$$\dots\dots$$
$$\sum_{i_1 \dots i_{k-1}} u_{i_1} \dots u_{i_{k-1}}\left[b^{k-1}_{i_1 \dots i_{k-1}}\{x\} + \sum_i a^{i,k-1}_{i_1 \dots i_{k-1}}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} + \right.$$

$$+(k-1)\Big(b^{k-2}_{i_1\dots i_{k-2}}\Big\{\frac{\partial x}{\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}+\sum_i a^{i,k-2}_{i_1\dots i_{k-2}}\Big\{\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}\Big)+$$

$$+\binom{k-1}{2}\Big(b^{k-3}_{i_1\dots i_{k-3}}\Big\{\frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_{k-2}}\,\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}+\sum_i a^{i,k-3}_{i_1\dots i_{k-3}}\,.$$

$$.\Big\{\frac{\partial^3 x}{\partial u_i\,\partial u_{i_{k-2}}\,\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}\Big)+\;\cdots\;+\;b^0\Big\{\frac{\partial^{k-1} x}{\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}+$$

$$+\sum_i a^{i0}\Big\{\frac{\partial^k x}{\partial u_i\,\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}+\Big\{\frac{\partial^k x}{\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_{k-1}}\,\partial v}\Big\}\Big]=0.$$

Nous allons prouver que, sous de telles conditions, <u>pour la validité du système (23) augmenté de l'équation (elle aussi identique en</u> $u_1,\dots,u_m$)

(28) $$\{M_k\}=0,$$

<u>il faut et il suffit que, outre les nombres (24), il existe encore des nombres</u>

(29) $$b^k_{i_1\dots i_k}\,,\quad a^{ik}_{i_1\dots i_k}$$

<u>dépendant symmétriquement des indices inférieurs et tels que</u> (<u>identiquement en</u> $u_1,\dots,u_m$)

(30)
$$B_k=b^0C_k+\sum_{i_1}b^1_{i_1}u_{i_1}\,.\,C_{k-1}+\frac{1}{2}\sum_{i_1i_2}b^2_{i_1i_2}\,.\,u_{i_1}u_{i_2}\,C_{k-2}+\dots$$
$$+\frac{1}{k!}\sum_{i_1\dots i_k}b^k_{i_1\dots i_k}u_{i_1}\dots u_{i_k}\,C_0\,,$$
$$A^i_k=a^{i0}C_k+\sum_{i_1}a^{i1}_{i_1}u_{i_1}\,C_{k-1}+\frac{1}{2}\sum_{i_1i_2}a^{i2}_{i_1i_2}u_{i_1}u_{i_2}\,C_{k-2}+\dots$$
$$+\frac{1}{k!}\sum_{i_1\dots i_k}a^{ik}_{i_1\dots i_k}u_{i_1}\dots u_{i_k}\,C_0\,;$$

les équations (23) + (28) sont alors équivalentes au système qui s'obtient en ajoutant au système (27) l'équation (aussi identique en $u_1, \dots, u_m$)

$$\sum_{i_1 \dots i_k} u_{i_1} \dots u_{i_k} \Big[b^k_{i_1 \dots i_k} \{x\} + \sum_i a^{ik}_{i_1 \dots i_k} \Big\{ \frac{\partial x}{\partial u_i} \Big\} +$$

(31)
$$+ k \Big(b^{k-1}_{i_1 \dots i_{k-1}} \Big\{ \frac{\partial x}{\partial u_{i_k}} \Big\} + \sum_i a^{i, k-1}_{i_1 \dots i_{k-1}} \Big\{ \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_{i_{k-1}}} \Big\} \Big) +$$

$$+ \binom{k}{2} \Big(b^{k-2}_{i_1 \dots i_{k-2}} \Big\{ \frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_{k-1}} \partial u_{i_k}} \Big\} + \sum_i a^{i, k-2}_{i_1 \dots i_{k-2}} \Big\{ \frac{\partial^3 x}{\partial u_i \partial u_{i_{k-1}} \partial u_{i_k}} \Big\} \Big) +$$

$$\dots + b^0 \Big\{ \frac{\partial^k x}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}} \Big\} + \sum_i a^{i0} \Big\{ \frac{\partial^{k+1} x}{\partial u_i \partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}} \Big\} +$$

$$+ \Big\{ \frac{\partial^{k+1} x}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k} \partial v} \Big\} \Big] = 0 .$$

Pour vérifier cet énoncé, remarquons d'abord qu'en vertu de (25) et 26) et de la définition (17) de M_k l'équation (28) prend la forme

$$B_k \{x\} + \sum_i A^i_k \Big\{ \frac{\partial x}{\partial u_i} \Big\} + C_k \Big\{ \frac{\partial x}{\partial v} \Big\} + C_{k-1} \sum_{i_1} u_{i_1} \Big[b^0 \Big\{ \frac{\partial x}{\partial u_{i_1}} \Big\} +$$

$$+ \sum_i a^{i0} \Big\{ \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_{i_1}} \Big\} + \Big\{ \frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_1} \partial v} \Big\} \Big] + \frac{1}{2!} C_{k-2} \sum_{i_1 i_2} u_{i_1} u_{i_2} \Big[2 .$$

$$\cdot \Big(b^1_{i_1} \Big\{ \frac{\partial x}{\partial u_{i_2}} \Big\} + \sum_i a^{i1}_{i_1} \Big\{ \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_{i_2}} \Big\} \Big) + b_0 \Big\{ \frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_1} \partial u_{i_2}} \Big\} + \sum_i a^{i0} .$$

$$\cdot \Big\{ \frac{\partial^3 x}{\partial u_i \partial u_{i_1} \partial u_{i_2}} \Big\} + \Big\{ \frac{\partial^3 x}{\partial u_{i_1} \partial u_{i_2} \partial v} \Big\} \Big] + \dots + \frac{1}{(k-1)!} C_1 .$$

$$\cdot \sum_{i_1 \dots i_{k-1}} u_{i_1} \dots u_{i_{k-1}} \Big[(k-1) \Big(b^{k-2}_{i_1 \dots i_{k-2}} \Big\{ \frac{\partial x}{\partial u_{i_{k-1}}} \Big\} + \sum_i a^{i, k-2}_{i_1 \dots i_{k-2}} .$$

$$\cdot \Big\{ \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_{i_{k-1}}} \Big\} \Big) + \binom{k-1}{2} \Big(b^{k-3}_{i_1 \dots i_{k-3}} \Big\{ \frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_{k-2}} \partial u_{i_{k-1}}} \Big\} +$$

$$+ \sum_i a^{i, k-3}_{i_1 \dots i_{k-3}} \Big\{ \frac{\partial^3 x}{\partial u_i \partial u_{i_{k-2}} \partial u_{i_{k-1}}} \Big\} \Big) + \dots + \binom{k-1}{k-2} .$$

$$\Big(b^1_{i_1}\Big\{\frac{\partial^{k-2}x}{\partial u_{i_2}\dots\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}+\sum_i a^{i1}_{i_1}\Big\{\frac{\partial^{k-1}x}{\partial u_i\partial u_{i_2}\dots\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}\Big)+$$

$$+\,b^0\Big\{\frac{\partial^{k-1}x}{\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}+\sum_i a^{i0}\Big\{\frac{\partial^k x}{\partial u_i\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}+\Big\{\frac{\partial^k x}{\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_{k-1}}\partial v}\Big\}\Big]+$$

$$+\frac{1}{k!}C_0\sum_{i_1\dots i_k}u_{i_1}\dots u_{i_k}\Big[k\Big(b^{k-1}_{i_1\dots i_{k-1}}\Big\{\frac{\partial x}{\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}+\sum_i a^{i,k-1}_{i_1\dots i_{k-1}}\cdot$$

$$\cdot\Big\{\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}\Big)+\binom{k}{2}\Big(b^{k-2}_{i_1\dots i_{k-2}}\Big\{\frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_{k-1}}\partial u_{i_k}}\Big\}+\sum_i a^{i,k-2}_{i_1,\dots,i_{k-2}}\cdot$$

$$\cdot\Big\{\frac{\partial^3 x}{\partial u_1\partial u_{i_{k-1}}\partial u_{i_k}}\Big\}\Big)+\dots+\binom{k}{k-1}\Big(b^1_{i_1}\Big\{\frac{\partial^{k-1}x}{\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_k}}\Big\}+$$

$$+\sum_i a^{i1}_{i_1}\Big\{\frac{\partial^k x}{\partial u_i\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_{k-1}}}\Big\}\Big)+b^0\Big\{\frac{\partial^k x}{\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_k}}\Big\}+$$

$$+\sum_i a^{i0}\Big\{\frac{\partial^{k+1}x}{\partial u_i\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_k}}\Big\}+$$

$$+\Big\{\frac{\partial^{k+1}x}{\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_k}\partial v}\Big\}\Big]=0.$$

De l'équation (28) ainsi transformée on peut, faisant usage des équations (27) que nous savons être équivalentes à (23), éliminer

$$\Big\{\frac{\partial x}{\partial v}\Big\},\ \Big\{\frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_1}\partial v}\Big\},\dots,\Big\{\frac{\partial^k x}{\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_{k-1}}\partial v}\Big\}$$

et remplacer (28) par

$$Q\{x\} + \sum_i P^i\left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} + C_0 \sum_j R^j y_j = 0$$

où

$$Q = B_k - b^0 C_k - \sum_{i_1} b^1_{i_1} u_{i_1} C_{k-1} - \frac{1}{2!}\sum_{i_1 i_2} b^2_{i_1 i_2} u_{i_1} u_{i_2} C_{k-2} -$$

$$\dots - \frac{1}{(k-1)!}\sum_{i_1\dots i_{k-1}} b^{k-1}_{i_1\dots i_{k-1}} u_{i_1}\dots u_{i_{k-1}} C_1 ,$$

$$P_i = A^i_k - a^i_0 C_k - \sum_{i_1} a^{i1}_{i_1} u_{i_1} C_{k-1} - \frac{1}{2!}\sum_{i_1 i_2} a^{i2}_{i_1 i_2} u_{i_1} u_{i_2} C_{k-2} -$$

$$\dots - \frac{1}{(k-1)!}\sum_{i_1\dots i_{k-1}} a^{i,k-1}_{i_1\dots i_{k-1}} u_{i_1}\dots u_{i_{k-1}} C_1 ,$$

y_j sont des points fixes de S_r et R_j sont des formes algébriques en $u_1, \dots, u_n$. Alors le lemme donne que les formes Q, P_i sont des multiples de C_0 ou, ce qui est la même chose, qu'il existe des constantes $b^k_{i_1\dots i_k}$, $a^{ik}_{i_1\dots i_k}$ dépendant symmétriquement des indices inférieurs et telles qu'on ait (30) ; en écrivant la valeur explicite de $\sum_j R^j y_j$ et en se rappelant l'inégalité (19) on obtient (31). Enfin, il est aisé de voir qu'inversement le système (25) + (26) + (27) + (30) + (31) implique (23) + (28).

Nous avons ainsi prouvé, par induction, que pour que l'ordre de contact en A^* des variétés projetées ${}^*V_1^m$, ${}^*V_2^m$ soit au moins $s+\sigma-1$ il est nécessaire et suffisant qu'il existe des nombres b^0, $b^1_{i_1}$, $b^2_{i_1 i_2}, \dots, b^{\sigma-1}_{i_1 i_2\dots i_{\sigma-1}}$, a^{i0}, $a^{i1}_{i_1}$, $a^{i2}_{i_1 i_2}, \dots, a^{i,\sigma-1}_{i_1 i_2\dots i_{\sigma-1}}$ tels qu'on ait (27), où maintenant $k=\sigma$. Pour achever la démonstration du théorème il suffit de montrer que les équations $(27)_{k=\sigma}$ sont équivalentes à (10) si

$$f(u_1,\dots,u_n) = b^0 + b^1 + \frac{1}{2!} b^2 + \dots + \frac{1}{(\sigma-1)!} b^{\sigma-1},$$

$$g_i(u_1,\dots,u_n) = a^{i0} + a^{i1} + \frac{1}{2!} a^{i2} + \dots + \frac{1}{(\sigma-1)!} a^{i,\sigma-1}$$

où

$$b^1 = \sum_{i_1} b^1_{i_1} u_{i_1}, \quad b^2 = \sum_{i_1 i_2} b^2_{i_1 i_2} u_{i_1} u_{i_2}, \dots,$$

$$b^{\sigma-1} = \sum_{i_1\dots i_{\sigma-1}} b^{\sigma-1}_{i_1\dots i_{\sigma-1}} u_{i_1}\dots u_{i_{\sigma-1}},$$

$$a^{i1} = \sum_{i_1} a^{i1}_{i_1} u_{i_1}, \quad a^{i2} = \sum_{i_1 i_2} a^{i2}_{i_1 i_2} u_{i_1} u_{i_2}, \dots,$$

$$a^{i,\sigma-1} = \sum_{i_1\dots i_{\sigma-1}} a^{i,\sigma-1}_{i_1\dots i_{\sigma-1}} u_{i_1}\dots u_{i_{\sigma-1}}$$

de manière que les équations $(27)_{k=\sigma}$ peuvent s'écrire

$$b^0\{x\} + \sum_i a^{i0}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} + \left\{\frac{\partial x}{\partial v}\right\} = 0,$$

(32)

$$b^k\{x\} + \sum_i a^{ik}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\} + k\sum_{i_k} u_{i_k}\left(b^{k-1}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_{i_k}}\right\} + \sum_i a^{i,k-1}\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_{i_k}}\right\}\right) + \binom{k}{2}\sum_{i_{k-1} i_k} u_{i_{k-1}} u_{i_k}\left(b^{k-2}\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_{k-1}}\partial u_{i_k}}\right\} + \sum_i a^{i,k-2}\left\{\frac{\partial^3 x}{\partial u_i \partial u_{i_{k-1}}\partial u_{i_k}}\right\}\right) + \dots + \sum_{i_1\dots i_k} u_{i_1}\dots u_{i_k} \cdot \left(b^0\left\{\frac{\partial^k x}{\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_k}}\right\} + \sum_i a^{i0}\left\{\frac{\partial^{k+1} x}{\partial u_i \partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_k}}\right\} + \left\{\frac{\partial^{k+1} x}{\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_k}\partial v}\right\}\right) = 0$$

$$(1 \le k \le \sigma-1)$$

Or il est aisé de voir que, si $[\dots]_0$ indique qu'on doit poser $u_1 = \dots = u_n = 0$, on a pour $k = 1, 2, \dots, \sigma - 1$

$$\sum_{i_1 \dots i_k} u_{i_1} \dots u_{i_k} \left[\frac{\partial^k}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}} (fX)\right]_0 = b^k x + k b^{k-1} \sum_{i_k} u_{i_k} \frac{\partial x}{\partial u_{i_k}} +$$

$$+ \binom{k}{2} b^{k-2} \sum_{i_{k-1} i_k} u_{i_{k-1}} u_{i_k} \frac{\partial^2 x}{\partial u_{i_{k-1}} \partial u_{i_k}} + \dots + b^0 \sum_{i_1 \dots i_k} u_{i_1} \dots u_{i_k} \frac{\partial^k x}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}},$$

$$\sum_{i_1 \dots i_k} u_{i_1} \dots u_{i_k} \left[\frac{\partial^k}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}} \left(g_i \frac{\partial X}{\partial u_i}\right)\right]_0 = a^{ik} \frac{\partial x}{\partial u_i} + k a^{i,k-1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i_k} u_{i_k} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_{i_k}} + \binom{k}{2} a^{i,k-2} \sum_{i_{k-1} i_k} u_{i_{k-1}} u_{i_k} \frac{\partial^3 x}{\partial u_i \partial u_{i_{k-1}} \partial u_{i_k}} +$$

$$\dots + a^{i0} \sum_{i_1 \dots i_k} u_{i_1} \dots u_{i_k} \frac{\partial^{k+1} x}{\partial u_i \partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}}$$

ce qui permet de remplacer le système d'équations (32) par le système

$$\left\{\left[fX + \sum_i g_i \frac{\partial X}{\partial u_i} + \frac{\partial X}{\partial v}\right]_0\right\} = 0,$$

$$\sum_{i_1 \dots i_k} u_{i_1} \dots u_{i_k} \left\{\left[\frac{\partial^k}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}} \left(fX + \sum_i g_i \frac{\partial X}{\partial u_i} + \frac{\partial X}{\partial v}\right)\right]_0\right\} = 0$$

$$(1 \leqq k \leqq \sigma - 1)$$

évidemment équivalent au système

$$\left\{\left[\frac{\partial^{j_1 + \dots + j_n}}{\partial u_1^{j_1} \dots \partial u_n^{j_n}} \left(fX + \sum_i g_i \frac{\partial X}{\partial u_i} + \frac{\partial X}{\partial v}\right)\right]_0\right\} = 0$$

qui ne diffère que formellement du système (10).