Robert Karpe

Einige kombinatorische Identitäten

Archivum Mathematicum, Vol. 11 (1975), No. 1, 53--66

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104841

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XI: 53-66 1975

EINIGE KOMBINATORISCHE IDENTITÄTEN

ROBERT KARPE, Brno

(Eingegangen am 20. August 1973)

In dieser Behandlung suchen wir die Anzahl aller Variationen, bzw. Kombinationen, die eine gewählte Anzahl der verschiedenen Elemente enthalten. Bei der Lösung dieser Aufgabe entdecken wir neue kombinatorischen Identitäten.

Definition 1. n sei eine fest gewählte natürliche Zahl und $r \in [0, n]$ sei eine ganze Zahl.

Das Symbol M_n bezeichnet die Menge der n gegebenen Elemente, die voneinander verschieden sind:

(1) $$M_n = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Wir können aus dieser Menge $\binom{n}{r}$ verschiedene r-gliedrige Untermengen ausnehmen, und diese in die bekannte lexikographische Folge aneinanderreihen:

(2) $$(a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, a_r), (a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, a_{r+1}), \dots,$$
$$\dots, (a_{n-r+1}, a_{n-r+2}, \dots, a_n).$$

Das Symbol M_{rj} bezeichnet die j-te r-gliedrige Menge aus dieser Folge; $j = 1, 2, \dots, \dots, \binom{n}{r}$.

Für die leere Menge benützen wir das Symbol $\emptyset$ anstatt M_0, und $M_{n1} = M_n$.

Das Symbol $\overline{M}_{rj}$ bezeichnet das Komplement zur Menge M_{rj}, so dass gilt: $M_{rj} \cup \cup \overline{M}_{rj} = M_n$, $M_{rj} \cap \overline{M}_{rj} = \emptyset$.

Vereinbarung 1. Wir leiten hier die Formeln einesteils für die Variationen, anderteils für die Kombinationen ab. Deshalb, wie weit die Ableitung gemeinsam wird, wollen wir das Termin „*Komplexion*“ als ein stellvertretendes Termin für „*Variation*“ oder „*Kombination*“ benützen.

Definition 2. k, n, seien fest gewählte natürliche Zahlen und $r \in [0, n]$ sei eine ganze Zahl.

Das Symbol $A^k[M_{rj}]$, bzw. $A^k(r)$, bezeichnet die Menge, bzw. die Anzahl aller Komplexionen k-ter Klasse, die aus allen Elementen der Menge $N \subset \overline{M}_{rj}$, mit Wiederholung, hergestellt werden.

Das Symbol $B^k[M_{rj}]$, bzw. $B^k(r)$, bezeichnet die Menge, bzw. die Anzahl aller Komplexionen k-ter Klasse, die aus allen und nur aus allen Elementen der Menge $\bar{M}_{rj}$, mit eventueller Wiederholung, zusammengestellt werden.

Wenn $k < n - r$, gilt also: $B^k[M_{rj}] = \emptyset$.

Wenn $k = n - r$, sind die Komplexionen von $B^k[M_{rj}]$ ohne Wiederholung.

Wenn $k > n - r$, muss jede Komplexion von $B^k[M_{rj}]$ mit Wiederholung der Elemente a_i hergestellt werden.

Bemerkung 1. Die Menge $A^k[M_{rj}]$, bzw. $B^k[M_{rj}]$, kann auch als die Untermenge aller solcher Komplexionen $\in A^k[\emptyset]$ bezeichnet werden, bei welchen wenigstens, bzw. gerade die Elemente $a_i \in M_{rj}$ fehlen.

Es gilt offenbar:

$$(3)\quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad A^k[\emptyset] \supset A^k[M_{rj}] \supset B^k[M_{rj}],\\ &\text{b)} \quad A^k(0) \geqq A^k(r) \geqq B^k(r). \end{aligned}$$

Weiter, wie aus der elementaren Kombinatorik bekannt ist, gilt (bei der Anwendung der obigen Symbole):

$$(4)\qquad A^k(r) = (n - r)^k, \qquad 0 \leqq r \leqq n - 1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

wenn die Komplexionen die Variationen bedeuten.

$$(5)\qquad A^k(r) = \binom{n - r + k - 1}{k}, \qquad 0 \leqq r \leqq n - 1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

wenn die Komplexionen die Kombinationen bedeuten.

Definition 3. Das Symbol $\mathfrak{A}_n$ bezeichnet die Menge, derer Elemente sind gerade alle voneinander verschiedene Mengen $A^k[M_{rj}] \subset A^k[\emptyset]$, $r = 0, 1, \ldots, n - 1$; $j = 1, 2, \ldots, \binom{n}{r}$.

Das Symbol $\mathfrak{A}_n^*$ bezeichnet die Menge, derer Elemente sind alle Komplexionen von allen Mengen $A^k[M_{rj}] \in \mathfrak{A}_n$, so dass die Menge $\mathfrak{A}_n^*$ die innen ungetrennte Versammlung (weiter nur „Versammlung") aller (d.i. nicht immer voneinander verschiedener) Komplexionen der Menge $\mathfrak{A}_n$ bedeutet.

Das Symbol $(\mathfrak{A}_n^*)$ bezeichnet die Anzahl aller Komplexionen, die in der Menge $\mathfrak{A}_n^*$ enthalten werden.

Lemma 1. s, r, seien ganze Zahlen, die die Ungleichheit $0 \leqq s \leqq r \leqq n$ erfüllen. M_{re} sei eine fest erwählte Untermenge der Menge M_n.

Aus der Menge $A^k[\emptyset]$ können wir summarisch $\binom{r}{s}$ verschiedene Untermengen $A^k[M_{sj}]$ ausnehmen, von denen jede je eine Untermenge $B^k[M_{re}]$ enthält.

Beweis. 1. Die Menge M_{re} besteht aus r verschiedenen Elementen a_i. Man kann also aus der Menge M_n gerade $\binom{r}{s}$ verschiedene Untermengen M_{sp} ausnehmen, die immer s verschiedene Elemente $a_i \in M_{re}$ enthalten. Ein beliebiges Element der Menge $A^k[M_{sp}]$ ist eine Komplexion, in deren Aufstellung wenigstens die Elemente $a_i \in M_{sp}$ fehlen. Es gilt also $B^k[M_{re}] \subset A^k[M_{sp}]$.

2. Betrachten wir nun eine beliebige Menge $M_{sq} \subset M_n$, die wenigstens ein Element $a_x \notin M_{re}$ beinhaltet. Dann fehlt dieses Element a_x in jeder Komplexion $\in A^k[M_{sp}]$, dagegen aber fehlt dasselbe Element a_x in keiner Komplexion $\in B^k[M_{re}]$. Daraus geht unmittelbar hervor: $B^k[M_{re}] \not\subset A^k[M_{sq}]$.

Bemerkung 2. Aus der Menge $A^k[\emptyset]$ kann man summarisch $\binom{n}{s}$ verschiedene Mengen $A^k[M_{sj}]$ ausnehmen und von diesen erhalten immer gerade $\binom{r}{s}$ Mengen je eine fest gewählte Untermenge $B^k[M_{re}]$.

Lemma 2. m sei eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s \cdot \binom{m}{s} = 0. \tag{6}$$

Beweis — ist offenbar aus der Durchführung des Binoms $(x - y)^m$ nach dem Binomischen Satz, wenn $x = y = 1$ gilt.

Postulat α. 1. Jede Komplexion aus jeder Menge $A^k[M_{sj}] \in \mathfrak{A}_n$ soll mit dem Zeichen $(-1)^s$ versehen werden.

2. Zwei Komplexionen, die bis auf das Zeichen miteinander übereinstimmen, sollen sich gegenseitig aufheben, sobald sie (bei der Versammlung) in die gemeinsame Menge $\mathfrak{A}_n^*$ fallen.

Lemma 3. Lassen wir das Postulat α zu. Dann — durch die Versammlung in der Menge $\mathfrak{A}_n$ — bekommen wir die Menge $\mathfrak{A}_n^* = B^k[\emptyset]$.

Beweis. $r \in [1, n]$ sei ein fest gewählter Index. M_{re} sei eine willkürlich aber fest gewählte Untermenge der Menge M_n. Dann, nach dem Lemma 1, existieren für einen festen Index s, $(0 \leqq s \leqq r)$ gerade $\binom{r}{s}$ verschiedene Mengen $A^k[M_{sp}] \subset A^k[\emptyset]$, von denen jede je eine Untermenge $B^k[M_{re}]$ enthält. Wenn also s über alle Zahlen $0, 1, \ldots, n - 1$ durchläuft, dann sieht man, nach dem Lemma 2, dass eben so viele Mengen $A^k[M_{sp}] \subset A^k[\emptyset]$ mit geradem wie mit ungeradem Index s existieren, die je eine Menge $B^k[M_{re}]$ enthalten. Die Menge $\mathfrak{A}_n$ enthält — als ihre Elemente — alle verschiedenen Mengen $A^k[M_{sj}] \subset A^k[\emptyset]$, und zwar jede von diesen gerade einmal.

Wenn wir also die Versammlung der Menge $\mathfrak{A}_n$ durchführen und zugleich das Postulat α zulassen, dann zerstören sich gegenseitig alle Komplexionen der Menge $\mathfrak{A}_n^*$, die immer als Elemente irgendwelcher Menge $B^k[M_{re}]$ bevor der Versammlung existierten. Dabei $M_{re} \subset M_n$ wurde willkürlich ausgewählt; d.h. dies gilt für jede Menge $M_{rj} \subset M_n$, $1 \leqq r \leqq n - 1$. Nur jene Komplexionen in $\mathcal{U}_n^*$ bleiben, die von der Menge $B^k[\emptyset]$ stammen, weil es gilt: $B^k[\emptyset] \subset A^k[\emptyset]$ und zugleich für $r \geqq 1$ gilt: $B^k[\emptyset] \not\subset A^k[M_{rj}]$, siehe die Bemerkung 1.

Definition 4. n, k, seien beliebige natürliche Zahlen und $r \in [0, n - 1]$ sei eine ganze Zahl.

Das Symbol $V_{n,n-r}^k$, bzw. $C_{n.n-r}^k$, bezeichnet die Anzahl aller Variationen, bzw. Kombinationen, k-ter Klasse, die von n voneinander verschiedenen Elementen (mit event. Wiederholung) hergestellt werden und dabei gerade $n - r$ voneinander verschiedene Elemente enthalten.

Satz 1. *Es gelten folgende Formeln:*

$$V_{n,n}^k = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \cdot \binom{n}{s} \cdot (n - s)^k, \tag{7-a}$$

$$C_{n,n}^k = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \cdot \binom{n}{s} \cdot \binom{n - s + k - 1}{k}. \tag{7-b}$$

Beweis ad a). Die Komplexionen seien nun Variationen. Dann, nach der Definition 3 und nach der Relation (4), gilt: $(\mathfrak{A}_n^*) = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \cdot (n - s)^k$, weil für jeden Index $s \in [0, n - 1]$ immer $\binom{n}{s}$ verschiedene Mengen $M_{sj} \subset M_n$ existieren, also auch $\binom{n}{s}$ verschiedene Mengen $A^k[M_{sj}] \in \mathfrak{A}_n$. Jede von den Mengen $A^k[M_{sj}]$ beinhaltet dabei $A^k(s) = (n - s)^k$ Variationen. Wenn wir nun die Gültigkeit des Postulates α zulassen, dann – nach dem Lemma 3 – gilt: $(\mathfrak{A}_n^*) = B^k(0) = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \cdot \binom{n}{s} \cdot (n - s)^k$. Endlich, aus dem Verhältniss der Definition 2 und 4, gilt in diesem Falle: $B^k(0) = V_{n,n}^k$.

Beweis ad b). Die Komplexionen seien nun Kombinationen. Dann, nach der Definition 3 und nach der Relation (5), gilt: $(\mathfrak{A}_n^*) = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \cdot \binom{n - s + k - 1}{k}$. Das weitere Verfahren ist ganz ähnlich wie ad a).

Lemma 4. i, j, seien zwei verschiedene ganze Zahlen aus dem Interval $\left[1, \binom{n}{r}\right]$, wo die ganze Zahl $r \in [1, n - 1]$ ist. Dann gilt:

$$B^k[M_{ri}] \cap B^k[M_{rj}] = \emptyset. \tag{8}$$

Beweis. Es existiert offenbar wenigstens ein Element $a_x \in M_n$, für das gilt: $a_x \in M_{ri}$, $a_x \notin M_{rj}$. Das aber, nach der Definition 1, bedeutet: $a_x \notin \bar{M}_{ri}$, $a_x \in \bar{M}_{rj}$. Das Element a_x wird demnach beinhaltet in jeder Komplexion $\in B^k[M_{rj}]$ und zugleich in keiner Komplexion $\in B^k[M_{ri}]$. Es existiert also keine Komplexion, die den Mengen $B^k[M_{ri}]$, $B^k[M_{rj}]$ gemeinsam wäre.

Definitition 5. $r \in [1, n - 1]$, sei eine ganze Zahl.

Das Symbol $B_n^k[r]$, bzw. $B_n^k(r)$, bedeutet die Menge, bzw. die Anzahl aller Komplexionen, die man durch folgende Vereinigung bekommt:

$$B_n^k[r] = B^k[M_{r1}] \cup B^k[M_{r2}] \cup \ldots \cup B^k[M_{r\binom{n}{r}}]. \tag{9}$$

Bemerkung 3. Aus den Definitionen 2 und 5 geht, mit Hinsicht auf das Lemma 4, hervor:

$$B_n^k(r) = \binom{n}{r} . B^k(r), \qquad r = 0, 1, \ldots, n - 1. \tag{10}$$

Definition 6. $s \in [0, n - 1]$ sei eine fest gewählte ganze Zahl.

Das Symbol $A_n^k[s]$ bezeichnet die Menge, deren Elemente gerade alle voneinander verschiedenen Mengen $A^k[M_{si}]$ sind; $i = 1, 2, \ldots \binom{n}{s}$.

Das Symbol $A_n^k(s)$ bezeichnet die Anzahl aller (nicht immer voneinander verschiedener) Komplexionen, die die Versammlung in der Menge $A_n^k[s]$ bilden.

Bemerkung 4. Aus den Definitionen 2 und 6, geht sofort hervor: $A_n^k(s) = \binom{n}{s}$. $A^k(s)$, so dass mit Hinsicht auf die Formel (4), resp. (5), gilt

a) für Variationen:

$$A_n^k(s) = \binom{n}{s} . (n - s)^k, \qquad s = 0, 1, \ldots, n - 1. \tag{11}$$

b) für Kombinationen:

$$A_n^k(s) = \binom{n}{s} . \binom{n - s + k - 1}{k}, \qquad s = 0, 1, \ldots, n - 1. \tag{12}$$

Lemma 5. Es seien r, s, ganze Zahlen, die der Ungleichung $0 \leqq s \leqq r \leqq n - 1$ genügen.

Die Menge $A_n^k[s]$ beinhaltet $\binom{r}{s}$ wechselseitig übereinstimmende Mengen $B_n^k[r]$, oder mit anderen Worten: Die Menge $B_n^k[r]$ wird $\binom{r}{s}$-mal enthalten in der Menge $A_n^k[s]$.

Beweis. Betrachten wir eine beliebige Menge $B_n^k[M_{re}] \subset A^k[\emptyset]$. Diese wird – nach dem Lemma 1 – in der Menge $A_n^k[s]$ summarisch $\binom{r}{s}$-mal enthalten. Dasselbe gilt aber für jede Menge $B^k[M_{rj}| \subset A^k[\emptyset]$, $j = 1, 2, \ldots, \binom{n}{r}$, und diese Mengen sind – nach dem Lemma 4 – gegenseitig disjunkte Mengen. Daraus geht unseres Lemma sofort hervor.

Wir wollen nun eine schematische Darstellung anführen, die den Zusammenhang zwischen den einzelnen Mengen $A_n^k[s]$, $(s = 0, 1, \ldots, r)$ und $B_n^k[r]$, $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$ andeuten sollte.

Das angeführte Diagramm ist folgenderweise zu verstehen:

Die Nummer, die in der r-ten Reihe und s-ten Spalte liegt, zeigt uns, wievielmal die Menge $B_n^k[r]$ in der Menge $A_n^k[s]$ beinhaltet wird. Nach dem Lemma 5, befindet sich an dem erwähnten Ort die Nummer $\binom{r}{s}$. Mit Hinsicht zu dem Umfang der Indexen: $s = 0, 1, \ldots, r$; $r = 0, 1, \ldots, n-1$, bilden die Zahlen dieses Diagrammes, die wir in weiterem als „*Elemente des Diagrammes*" benennen wollen, das bekannte Pascal'sche System, das hier, freilich, mit der $(n-1)$-ten Reihe beendigt wird.

	s →	0	1	2	3	4
r		$A_n^k[0]$	$A_n^k[1]$	$A_n^k[2]$	$A_n^k[3]$	$A_n^k[4]$
↓						
0	$B_n^k[0]$	1				
1	$B_n^k[1]$	1	1			
2	$B_n^k[2]$	1	2	1		
3	$B_n^k[3]$	1	3	3	1	
4	$B_n^k[4]$	1	4	6	4	1

Definition 7. r sei eine fest gewählte natürliche Zahl, die die Ungleichheit $1 \leqq r \leqq n-1$ erfüllt. Es sei eine endliche Folge der nicht negativen Zahlen gegeben:

$$\{r_{a_s}\} = r_{a0}, r_{a1}, \ldots, r_{a_{n-1}}. \tag{14}$$

Das Symbol $\mathfrak{B}_n$ bezeichnet die Menge, deren Elemente die Mengen $A_n^k[s]$ sind; $s = 0, 1, \ldots, n-1$. Dabei gibt die Zahl ${}^r a_t$ immer an, wieviel derselben Elemente $A_n^k[t]$ die Menge $\mathfrak{B}_n$ beinhaltet.

Das Symbol $\mathfrak{B}_n^*$ bezeichnet die Menge, deren Elemente alle Komplexionen von allen (nicht immer verschiedenen) Mengen $A_n^k[s] \in \mathfrak{B}_n^*$ sind, so dass die Menge $\mathfrak{A}_n^*$ die Versammlung in derMenge $\mathfrak{B}_n$ bedeutet.

Das Symbol $(\mathfrak{B}_n^*)$ bezeichnet die Anzahl aller Elemente der Menge $\mathfrak{B}_n^*$.

Bemerkung 5. Wenn wir bei der Versammlung in der Menge $\mathfrak{B}_n$ die Gültigkeit des Postulates α nicht zulassen, dann gilt offenbar:

$$(\mathfrak{B}_n^*) = \sum_{s=0}^{n-1} {}^r a_s \,.\, A_n^k(s). \tag{15}$$

Wenn wir die Gültigkeit zulassen, dann gilt offenbar:

$$(\mathfrak{B}_n^*) = \left| \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \,.\, {}^r a_s \,.\, A_n^k(s) \right|, \tag{16}$$

In dem nächsten Satz werden wir gewisse Eigenschaft der Elemente von dem Pascal'schen Dreiecksystem einführen, die den prinzipiellen Zusammenhang mit unserem Problem hat.

Satz 2. *Wenn wir alle Elemente von der s-ten Spalte des Pascal'schen Dreiecksystems* $\left[\text{d. h. die Elemente } \binom{m}{s},\ m = s, s+1, s+2, \ldots\right]$ *mit dem Faktor*

$$(-1)^s \,.\, \left[1 + \binom{s}{r}\right] \tag{17}$$

multiplizieren, $\left[\text{wo } r \text{ eine fest gewählte natürliche Zahl ist und } \binom{s}{r} = 0, \text{ für } s < r \text{ ist}\right]$, *dann wird die Elementensumme in jeder Reihe des (neuen) Dreiecksystems gleich der Null, mit der Ausnahme der nullten und r-ten Geihe, wo die Summe gleich der Nummer* $(-1)^0$ *und* $(-1)^r$ *wird.*

Beweis. Nach dem erwähnten Multiplizieren wird sich in der m-ten Reihe und s-ten Spalte das Element $(-1)^s \,.\, \left[1 + \binom{s}{r}\right] \cdot \binom{m}{s}$ befinden. Mit Hinsicht auf die Zerlegung dieses Elementes: $(-1)^s \,.\, \left[1 + \binom{s}{r}\right] \cdot \binom{m}{s} = (-1)^s \,.\, \binom{m}{s} + (-1)^s \,.\, \binom{s}{r} \cdot \binom{m}{s}$, zerlegen wir das ganze System in zwei Bestandteile:

1. In dem ersten Bestandteil befindet sich in der m-ten Reihe und s-ten Spalte das Element $(-1)^s \,.\, \binom{m}{s}$. Die Summe aller Elemente in der m-ten Reihe, $m \geqq 1$, ist also die Null, siehe das Lemma 2. In der nullten Reihe, $(m = 0)$, befindet sich aber das Element $(-1)^0 \,.\, \binom{0}{0} = 1$.

2. In dem zweiten Bestandteil befindet sich in der m-ten Reihe und s-ten Spalte das Element $(-1)^s \,.\, \binom{s}{r} \cdot \binom{m}{s}$. Hier bedenken wir zuerst, dass folgende Identität

gilt:

$$(18) \qquad \binom{s}{r}\cdot\binom{m}{s} = \binom{m}{r}\cdot\binom{m-r}{s-r}, \qquad m \geqq s \geqq r,$$

weil offenbar gilt:

a) $\binom{s}{r}\cdot\binom{m}{s} = \frac{s!}{r!\,.\,(s-r)!}\cdot\frac{m!}{s!\,.\,(m-s)!}$,

b) $\binom{m}{r}\cdot\binom{m-r}{s-r} = \frac{m!}{(m-r)!\,.\,r!}\cdot\frac{(m-r)!}{(m-s)!\,.\,(s-r)!}$. Die Elemente von der m-ten Reihe geben hier also die Summe: $\sum_{s=r}^{m}(-1)^s\,.\binom{s}{r}\cdot\binom{m}{s} = \sum_{s=r}^{m}(-1)^s\,.\binom{m}{s}\cdot\binom{m-r}{s-r} = \binom{m}{r}\,.\sum_{s=r}^{m}(-1)^s\,.\binom{m-r}{s-r}$. Für $m > r$ wird aber die letztgeschriebene Summe – nach dem Lemma 2 – gleich der Null. Nur für $m = r$ wird diese Summe gleich der Grösse $(-1)^r$, wie ersichtlich.

Wenn wir nun die angeführten Bestandteile additiverweise verbinden, bekommen wir offenbar den Wortlaut unseres Satzes.

Lemma 6. r sei eine fest gewählte natürliche Zahl, die die Ungleichheit $1 \leqq r \leqq \leqq n-1$ erfüllt. Die Menge $\mathfrak{B}_n$ enthalte immer die Anzahl ${}^r a_s = 1 + \binom{s}{r}$ der wechselseitig übereinstimmenden Elemente $A_n^k[s]$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$.

Aus der Versammlung in der Menge $\mathfrak{B}_n$, wenn wir die Gültigkeit des Postulates α zulassen, bekommen wir:

$$(19) \qquad \mathfrak{B}_n^* = B_n^k[0] \cup B_n^k[r].$$

Beweis. Wählen wir den Index $m \in [0, n-1]$ und bedenken wir an wievielerlei wird die Menge $B_n^k[m]$ in einzelnen Mengen $A_n^k[s] \in \mathfrak{B}_n$ beinhaltet. Nach dem Lemma 5 enthält die Menge $A_n^k[s]$ summarisch $\binom{m}{s}$ gegenseitig übereinstimmende Mengen $B_n^k[m]$. Also $\left[1 + \binom{s}{r}\right]$ übereinstimmende Mengen $A_n^k[s]$ enthalten summarisch $\left[1 + \binom{s}{r}\right]\cdot\binom{m}{s}$ übereinstimmende Mengen $B_n^k[m]$. Dabei kann die Menge $B_n^k[m]$ als eine Untermenge der Menge $A_n^k[s]$ existieren nur wenn $s \leqq m$ ist, wie aus den Definitionen 2, 5, 6, hervorgeht. Also wird die Untermenge $B_n^k[m]$ in der Menge $\mathfrak{B}_n$ summarisch μ-mal beinhaltet, wo

$$\mu = \sum_{s=0}^{m}\left[1 + \binom{s}{r}\right]\cdot\binom{m}{s}.$$

Bilden wir nun die Versammlung in der Menge $\mathfrak{B}_n$ und lassen wir dabei die Gültigkeit des Postulates α zu. Die Komplexionen, die bis auf das Zeichen gleich sind, aufheben sich dann gegenseitig und die Anzahl der übereinstimmenden Mengen $B_n^k[m]$, die in $\mathfrak{B}_n^*$ zusammengesetzt werden, wird gleich der Nummer $|\nu|$, wo $\nu = \sum_{s=0}^{m}(-1)^s \cdot \left[1 + \binom{s}{r}\right] \cdot \binom{m}{s}$. Wir wissen aber, nach dem Satz 2, dass gilt: 1. $\nu = 1$ für $m = 0$, 2. $\nu = (-1)^r$ für $m = r$, 3. $\nu = 0$ für die übrigen Indexen $m \in [0, n-1]$. Weil jede Komplexion $\in \mathfrak{B}_n^*$ immer als ein Element in irgendwelche Menge $B_n^k[m]$ gehört, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, sieht man, dass die Menge $\mathfrak{B}_n^*$ bei der Gültigkeit des Postulates α gerade von jenen Komplexionen besteht, die die Mengen $B_n^k[0]$ und $B_n^k[r]$ bilden.

Satz 3. *Die Anzahl aller a) Variationen, b) Kombinationen, k-ter Klasse, die von n verschiedenen Elementen, mit event. Wiederholung, zusammengestellt werden und gerade $n-r$ verschiedene Elemente erhalten, wird durch folgende Formeln angegeben:*

$$V_{n,n-r}^k = \sum_{s=r}^{n-1}(-1)^{r+s} \cdot \binom{s}{r} \cdot \binom{n}{s} \cdot (n-s)^k, \tag{20-a}$$

$$C_{n,n-r}^k = \sum_{s=r}^{n-1}(-1)^{r+s}\binom{s}{r} \cdot \binom{n}{s} \cdot \binom{n-s+k-1}{k}. \tag{20-b}$$

Beweis. Erfordern wir nun, dass die Anzahl aller Komplexionen der Menge $\mathfrak{B}_n^*$, also die Zahl $(\mathfrak{B}_n^*)$, positiv bzw. negativ wäre, wenn in der Menge $\mathfrak{B}_n^*$ (bei der Gültigkeit des Postulates α) die Anzahl der positiven bzw. der negativen Komplexionen vorherrscht. Dann müssen wir die Relation (16) folgendermassen rektifizieren:

$$(\mathfrak{B}_n^*) = \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s \cdot {}^r a_s \cdot A_n^k(s). \tag{16*}$$

Wenn ${}^r a_s = 1 + \binom{s}{r}$, so gilt auch, nach (19) und nach dem Satz 2:

$$(\mathfrak{B}_n^*) = (-1)^0 \cdot B_n^k(0) + (-1)^r \cdot B_n^k(r). \tag{21}$$

Durch Verbindung der Gleichungen (16*) und (21) bekommen wir

$$B_n^k(0) + (-1)^r \cdot B_n^k(r) = \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s \cdot \left[1 + \binom{s}{r}\right] \cdot A_n^k(s). \tag{22}$$

Bedenken wir nun, dass nach den Definitionen 4 und 5 gilt: $B_n^k(r) = V_{n,n-r}^k$, bzw. $B_n^k(r) = C_{n,n-r}^k$, wenn die Komplexionen die Variationen, bzw. die Kombinationen vertreten. Dann geht aus der Gleichung (22), mit Hinsicht auf (11), bzw. (12), hervor:

$$V_{n,n}^k + (-1)^r \cdot V_{n,n-r}^k = \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\left[1 + \binom{s}{r}\right] \cdot \binom{n}{s} \cdot (n-s)^k, \tag{23-a}$$

$$C_{n,n}^k + (-1)^r \cdot C_{n,n-r}^k = \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s \cdot \left[1 + \binom{s}{r}\right] \cdot \binom{n}{s} \cdot \binom{n-s+k-1}{k}. \tag{23-b}$$

Daraus, mit Hinsicht auf die Gleichung (7-a), bzw. (7-b), nach kleiner Regelung, gehen die bewiesenen Formeln hervor.

Bemerkungen zu den Formeln (20-a, b).

1. *Wenn $k < n - r$ gilt, dannist die Menge $B_n[r]$ ersichtlich eine leere Menge, so dass auf der linken Seite in beiden Gleichungen eine Null zu setzen ist.*

2. *Wenn $k = n - r$ gilt, dann werden die Komplexionen $B_n^k[r]$ offenbar ohne Wiederholung der Elemente a_i gebildet, so dass auf der linken Seite in der Gleichung* (20-a), *bzw.* (20-b), *die Grösse $\frac{n!}{(n-k)!}$ bzw. $\binom{n}{k}$ zu setzen ist, wie aus der elementaren Kombinatorik wohl bekannt ist. Davon, nach kurzer Regelung, gewinnen wir folgende Formeln:*

$$(24\text{-a}) \qquad (-1)^{n-k} = \sum_{s=n-k}^{n-1} (-1)^s \cdot \frac{(n-s)^k}{(n-s)!\,.\,(s-n+k)!},$$

$$(24\text{-b}) \qquad (-1)^{n-k} = \sum_{s=n-k}^{n-1} (-1)^s \cdot \frac{(n-s+k-1)!}{(n-s)!\,.\,(s-n+k)!\,.\,(n-s-1)!}.$$

Bemerkung des Authors. Im Jahre 1969 verlangte das Biologische Institut bei der ärztlichen Fakultät in Brno die Lösung der am Anfang dieser Behandlung angeführten Aufgabe, u. z. nur für die Variationen. (Die entsprechende Formel wurde ihm im Frühlung 1969 geboten.)

Als literarische Anregung dieser Behandlung führe ich die Ergebnisse von *Lacroix* an, siehe [1], § 22, Seite 36, 37.

Nun wollen wir gewisse kombinatorischen Identitäten bilden, deren Prinzip der Existenz an die obige Theorie eng angeknüpft wird.

Definition 8. $\delta_s = \delta(s)$ sei ein Polynom im Argument s, von dem Körper der realen Zahlen. M sei eine willkürliche Menge der Komplexionen und $\mu \in M$ sei ihr willkürliches Element.

Das Symbol $\delta_s \,.\, \mu$, angedeutet mit einem dicken Punkt, benennen wir „*das abstrakte Element*".

Das abstrakte Element ist ein algebraisches Produkt zweier nicht homogenen Faktoren: eines Polynoms und einer Komplexion. Es gilt hier: $0 \,.\, \mu = \emptyset$, $\delta_s \,.\, \emptyset = \emptyset$.

Das abstrakte Element $\delta_s \,.\, \mu$ benennen wir auch „*das abstrakte δ_s-fache der Komplexion μ*. Den Faktor δ_s (im Zusammenhang mit dem abstrakten Element $\delta_s \,.\, \mu$) bennen wir „*der abstrakte Koeffizient der Komplexion μ*".

Das Symbol $\delta_s \,.\, M$, angedeutet mit einem dicken Punkt, bezeichnet die Menge, deren Elemente gerade die abstrakten δ_s-fachen von allen Elementen der Menge M sind.

Definition 9. Es sei eine endliche Folge der Polynomen gegeben:

$$\{\delta_t\} = \delta_0, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}. \tag{25}$$

Das Symbol $\mathfrak{N}_n$ bezeichnet die Menge, deren Elemente gerade alle Mengen $\delta_t \,.\, A_n^k[t]$ sind; $t = 0, 1, \dots, n-1$.

Das Symbol $\mathfrak{N}_n^*$ bezeichnet die Menge, deren Elemente alle abstrakten Elemente von allen Mengen $\delta_t \,.\, A_n^k[t] \in \mathfrak{N}_n$ sind, so dass $\mathfrak{N}_n^*$ die Versammlung in der Menge $\mathfrak{N}_n$ bedeutet.

Das Symbol $(\mathfrak{N}_n^*)$ bezeichnet die algebraische Summe der abstrakten Koeffizienten δ_t von allen Elementen der Menge $\mathfrak{N}_n^*$.

Bemerkung 6. Führen wir zuerst eine Illustration an:

Es sei z. B. $\mu = (a_1a_3a_2a_5) \in M$, $\delta_s = s^2 - 2s + 3$; dann gilt: $\delta_s \,.\, \mu = (s^2 - 2s + 3) \,.\, (a_1a_3a_2a_5) \in \delta_s \,.\, M$.

Die Realisation der abstr. Elemente wird folgenderweise durchgeführt: Wenn wir von der Menge $\mathfrak{N}_n$ zu der algebraischen Grösse $(\mathfrak{N}_n^*)$ übergehen, dann übernimmt das Polynom δ_s die Rolle eines spezifischen Faktors, während seine Komplexion μ die Rolle einer Einser d. h. die Komplexion verändert sich zu dem kvantitativen Faktor ihres Polynoms.

Postulat β. 1. Jedes (abstrakte) Element der Menge $\delta_s \,.\, A_n^k[s] \in \mathfrak{N}_n$ soll mit dem Zeichen $(-1)^s$ versehen werden; $s = 0, 1, \dots, n-1$.

2. Alle abstrakten Elemente von allen Mengen $\delta_s \,.\, A_n^k[s]$, $s = 0, 1, \dots, n-1$, deren zweite Faktoren (d. h. die Komplexionen) wechselseitig übereinstimmen, sollen miteinander vereinigt werden nach der Regel $\delta_p \,.\, \mu_a \cup \delta_q \,.\, \mu_a = (\delta_p + \delta_q) \,.\, \mu_a = \delta_{p,q} \,.\, \mu_a$, sobald sie (bei der Versammlung) in die gemeinsame Menge $\mathfrak{N}_n^*$ fallen.

Bemerkung 7. Wenn wir die Versammlung in der Menge $\mathfrak{N}_n$ durchführen und dabei die Gültigkeit des Postulates β zulassen, bekommen wir ersichtlich:

$$(\mathfrak{N}_n^*) = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \,.\, \delta_s \,.\, A_n^k(s). \tag{26}$$

Definition 10. Das Dreiecksystem der Elemente ist eine Menge der Zahlen a_{ms}, die in die Reihen und Spalten einer Ebene so angeordnet werden, dass immer die Zahl a_{ms} in der m-ten Reihe (von oben) und der s-ten Spalte (von links) liegt; dabei gilt für den Indexenbereich: $s = 0, 1, \dots, m$; $m = 0, 1, \dots, n-1$. (Die Bedeutung der Zahl n wird in der Def. 1 gegeben). Eine willkürliche Zahl a_{ms} heisst hier *„das Element des Dreiecksystems"*.

Das Symbol P_Δ bezeichnet das Dreiecksystem der Elemente $a_{ms} = \binom{m}{s}$. (Dies ist das wohlbekannte Pascal'sche Dreiecksystem.)

Das symbol P_Δ^r, wo $r \in [0, n-2]$ eine ganze Zahl ist, bezeichnet das Dreiecksystem der Elemente $a_{ms} = (-1)^s \cdot \binom{s}{r} \cdot \binom{m}{s}$, wo $\binom{s}{r} = 0$ für $s < r$.

Das Symbol $A_r \cdot P_\Delta^r$, wo $A_r \neq 0$ eine reale Konstante ist, bezeichnet das Dreiecksystem der Elemente $a_{ms} = (-1)^s \cdot A_r \cdot \binom{s}{r} \cdot \binom{m}{s}$.

Das Symbol π_Δ^p, wo $p \in [1, n-2]$ eine ganze Zahl ist, bezeichnet das Dreiecksystem der Elemente

$$a_{ms} = (-1)^s \cdot \left[A_0\binom{s}{0} + A_1\binom{s}{1} + \ldots + A_p\binom{s}{p}\right] \cdot \binom{m}{s}, \tag{27}$$

wo A_r reale Konstanten sind; $A_p \neq 0$.

Das Symbol $\delta_s = \delta(s)$ bezeichnet hier den Ausdruck in den eckigen Klammern, aus der Relation (27):

$$\delta_s = A_0\binom{s}{0} + A_1\binom{s}{1} + \ldots + A_p\binom{s}{p}, \tag{28}$$

mit Worten: δ_s ist ein Polynom im Argument s, p-ten Grades, mit den Koeffizienten A_i aus dem Körper der realen Zahlen. Diese Koeffizienten verstehen wir hier als unbestimmte Konstanten; $A_p \neq 0$.

Den Zusammenhang zwischen (27) und (28) bezeichnen wir folgendermassen:

$$a_{ms} = (-1)^s \cdot \delta_s \cdot \binom{m}{s}, \qquad a_{ms} \in \pi_\Delta^p. \tag{29}$$

Lemma 7. Es sei ein Dreiecksystem π_Δ^p gegeben. Dann gilt für $m > p$:

$$\sum_{s=0}^{m} a_{ms} = 0, \qquad a_{ms} \in \pi_\Delta^p. \tag{30}$$

B e w e i s. Aus dem Beweis des Satzes 2 sieht man, dass die Gleichung (30) für die Elemente $a_{ms} \in P_\Delta^r$ gilt, wenn $m > r$ ist. Dieselbe Gleichung gilt also auch für die Elemente $a_{ms} \in A_r \cdot P_\Delta^r$, wenn $m > r$ ist. Das System π_Δ^p ist aber eine lineare Kombination der Systeme P_Δ^r, $r = 0, 1, \ldots, p$, wie aus der Definition 10 ersichtlich ist, d. h. es gilt: $\pi_\Delta^p = \sum_{r=0}^{p} A_r \cdot P_\Delta^r$. Daraus sieht man, dass die Gleichung (30) für die Elemente $a_{ms} \in \pi_\Delta^p$ gilt, wenn alle folgenden Ungleichheiten gelten: $[m > r;\ r = 0, 1, \ldots, p]$. Dies entsteht aber ersichtlich für $m > p$.

Lemma 8. $p \in [1, n-2]$ sei eine natürliche Zahl. Es sei eine Menge $\mathfrak{R}_n$ gegeben, für deren Elemente $\delta_s \cdot A_n^k[s]$, $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$, die Polynome δ_s durch die Relation (28) angegeben sind. Es gelte $n > k + p$.

Dann, wenn wir die Versammlung in der Menge $\mathfrak{R}_n$ durchführen und dabei die Gültigkeit des Postulates β zulassen, bekommen wir:

$$\mathfrak{R}_n^* = \emptyset. \tag{31}$$

Beweis. Wählen wir einen Index $m \in [0, n - 1]$. Nach dem Lemma 5 wird die Menge $B_n^k[m]$ in der Menge $A_n^k[s]$ summarisch $\binom{m}{s}$-fach enthalten und also ebenso die Menge $\delta_s \,.\, B_n^k[m]$ in der Menge $\delta_s \,.\, A_n^k[s]$. Dies gilt gerade für $s = 0, 1, \ldots, m$, wie es aus den Definitionen 2, 5, 6 ersichtlich ist. Wenn wir also die Versammlung in der Menge $\mathfrak{R}_n$ durchführen und das Postulat β zulassen, wird die Menge $\mathfrak{R}_n^*$ immer einzige Menge $\gamma_m \,.\, B_n^k[m]$ enthalten, $m = 0, 1, \ldots, n - 1$, wo für den abstrakten Koeffizient γ_m, mit Hinsicht auf die Relation (29), gilt: $\gamma_m = \sum_{s=0}^{m} (-1)_p \,.\, \delta_s \,.\, \binom{m}{s} = \sum_{s=0}^{m} a_{ms}$, $a_{ms} \in \pi_\Delta^p$. Aber für die Elemente $a_{ms} \in \pi_\Delta^p$, nach dem Lemma 7, gilt $\sum_{s=0}^{m} a_{ms} = 0$, wenn $m > p$. Dies bedeutet, dass $\gamma_m = 0$ für $m > p$, und da nach der Definition 8, $\gamma_m \,.\, \mu = \emptyset$ gilt, wenn $\gamma_m = 0$, gilt auch $\gamma_m \,.\, B_n^k[m] = \emptyset$, wenn $m > p$. Bedenken wir noch, dass jedes abstrakte Element $\in \mathfrak{R}_n^*$ immer als ein Element in irgendwelche Menge $\delta_s \,.\, B_n^k[m]$ gehört; $s = 0, 1, \ldots, m$; $m = 0, 1, \ldots, n - 1$. Es gilt also:

$$\mathfrak{R}_n^* = \gamma_0 \,.\, B_n^k[0] \cup \gamma_1 \,.\, B_n^k[1] \cup \ldots \cup \gamma_p \,.\, B_n^k[p]. \tag{32}$$

Leicht aber ermessen wir, dass diese Menge leer ist: Vor allem, aus der Definition 8 geht hervor, dass $\gamma \,.\, M = \emptyset$, wenn $M = \emptyset$. Weiter, aus den Definitionen 2 und 5 sieht man, dass $B_n^k[r] = \emptyset$, wenn $n - r > k$, d. h. die Menge (32) wird leer, wenn alle folgenden Ungleichheiten erfüllt werden: $[n > k + r;\ r = 0, 1, \ldots, p]$. Dies aber entsteht, wenn die Ungleichheit $n > k + p$ gilt, und das eben ist unsere Voraussetzung.

Lemma 9. $p \in [1, n - 2]$ sei eine natürliche Zahl; das Polynom δ_s sei durch die Relation (28) gegeben und es gelte $n > k + p$. Dann gilt:

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \,.\, \delta_s \,.\, A_n^k(s) = 0. \tag{33}$$

Beweis. Aus der Relation (31) geht sofort hervor: $(\mathfrak{R}_n^*) = 0$. Aus dieser und aus der Gleichung (26) bekommen wir unmittelbar die Gleichung (33).

In weiterem betrachten wir folgendes Polynom im Argument s:

$$\mathrm{D}_p(s) = C_0 + C_1 \,.\, s + \ldots + C_p \,.\, s^p. \tag{34}$$

Satz 4. *Die Koeffizienten des Polynoms* $\mathbf{D}_p(s)$ *seien willkürlich, aber fest gewählte reale Konstanten;* $C_p \neq 0$, *und es gelte die Ungleichheit* $n > k + p$. *Dann gelten folgende kombinatorischen Identitäten:*

$$\text{(35-a)} \qquad \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \,.\, \mathbf{D}_p(s) \,.\, \binom{n}{s} \,.\, (n-s)^k = 0,$$

$$\text{(35-b)} \qquad \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \,.\, \mathbf{D}_p(s) \,.\, \binom{n}{s} \,.\, \binom{n-s+k-1}{k} = 0.$$

Beweis. In die Gleichung (33) setzen wir nach (11), bzw. nach (12). Bedenken wir weiter, dass die Koeffizienten A_t des Polynoms (28) als unbestimmte Konstanten angegeben sind, ($A_p \neq 0$). Dies berechtigt uns die Bedingung zu stellen, damit das gegebene Polynom $\mathbf{D}_p(s)$ identisch gleich dem Polynom (28) wäre. Wirklich, aus dieser Identität kann man die Koeffizienten des Polynoms (28) eindeutig bestimmen.

Bemerkung 8. Wenn der Index n genug gross ist im Verhältniss zu dem Index k, dann kann man erwarten, dass (bei der Gültigkeit der Bedingung $n > k + p$) die Zahl p so weit gross werden kann, damit das Polynom $\mathbf{D}_p(s)$ gewisse Funktion $\mathbf{f}(s)$ (mit verlangter Genauigkeit) approximieren könnte – d. h. in den Gleichungen (35a, b).

Die Funktion $\mathbf{f}(s)$ müsste in diesem Falle wenigstens in dem Interval $[0, n-1]$ in eine Potenzreihe entwickelbar sein.

LITERATUR

[1] E. Netto, Lehrbuch der Combinatorik, Berlin, 1901.

R. Karpe
602 00 Brno, Gorkého 13
Tschechoslowakei