Robert Karpe

Die Kombinationen gegebenen Profils. III

Archivum Mathematicum, Vol. 10 (1974), No. 4, 199--220

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104833

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
X: 199—220, 1974

DIE KOMBINATIONEN GEGEBENEN PROFILS III

ROBERT KARPE, Brno

(Eingegangen am 2. Juli 1973)

Dieser Aufsatz knüpft an meine zwei Aufsätze [1] und [2] an.

In diesem Aufsatz werden wir die Funktion $\varphi_n(x)$, bzw. $f_n(x)$ in eine gerade und ungerade Komponente zerlegen und werden uns mit verschiedenen dadurch entstandenen Aufgaben beschäftigen.

Satz 1.

Für die Zahlen A_n^k gilt folgende Rekursionsformel:

$$A_n^{2k+1+j} = \sum_{i=0} (-1)^i . A_n^{2(k-i)} . \binom{n+j+i}{1+j+2i}; \qquad n \geqq 1, \tag{1}$$

wo $A_n^0 = 1$, $A_n^1 = n$; $j = 0$ oder 1; $k > 0$.

Den *Beweis* führen wir mittels der strengen Induktion.

a) Setzen wir voraus, dass es gilt:

$$A_n^{2k} = \sum_{i=0} (-1)^i . A_n^{2(k-1-i)} . \binom{n+1+i}{2+2i}.$$

Weiter, nach der Vereinb. II-18-a, halten wir hier das Zeichen $\leqq$, bzw. $\geqq$ für das Zeichen der Grundrichtung, bzw. der inversen Richtung. Also zwischen den Indexen i_{2k}, i_{2k+1} liegt das Inversionszeichen $\geqq$. Nun, nach dem Korolar I-23 sollen sich die Elemente der $2k$-ten Spalte vollständig verzweigen, so dass es in der $(2k+1)$-ten Spalte $A_n^{2k} . \binom{n}{1}$ Elemente geben wird. Von dieser Elementenfolge der $(2k+1)$-ten Spalte ziehen wir aber diejenige Folge ab, die aus der $2k$-ten Spalte durch die Verzweigung nach dem Ergänzungszeichen $<$ entstehen würde. So bekommen wir in der $(2k+1)$-ten Spalte summarisch folgende Anzahl der Elemente:

$$A_n^{2k+1} = A_n^{2k} . \binom{n}{1} - \sum_{j=0} (-1)^j . A_n^{2(k-1-j)} . \binom{n+1+j}{3+2j},$$

und nach der Substitution $j = i - 1$

$$A_n^{2k+1} = A_n^{2k} . \binom{n}{1} + \sum_{i=1} (-1)^i . A_n^{2(k-i)} . \binom{n+i}{1+2i},$$

oder:

(2) $$A_n^{2k+1} = \sum_{i=0} (-1)^i \cdot A_n^{2(k-i)} \cdot \binom{n+i}{1+2i}$$

b) Gilt (2), so gilt auch

(3) $$A_n^{2k+2} = \sum_{i=0} (-1)^i \cdot A_n^{2(k-i)} \cdot \binom{n+1+i}{2+2i}_n$$

Zwischen den Indexen i_{2k+1}, i_{2k+2} liegt nämlich das Zeichen der Grundrichtung, $\leqq$, so dass die oberen und die unteren Zeiger in den Kombinationszahlen in der Gl. (2) um eins anwachsen, wodurch (3) entsteht.

c) Wir beweisen, dass (2) für $k = 0$ gilt: $A_n^1 = \sum_{i=0} (-1)^i \cdot A_n^{2(-i)} \cdot \binom{n+i}{1+2i}$. Hier existiert nur das Glied für $i = 0$, also $A_n^1 = (-1)^\circ \cdot A_n^0 \cdot \binom{n}{1} = n$, was der Wirklichkeit entspricht, w. z. b. w.

Definition 2. In der Potenzreihe I-(27) bilden wir die Zerlegung in eine gerade und eine ungerade Komponente:

$\varphi_n(x) = A_n^0 + A_n^1 \cdot x + A_n^2 \cdot x^2 + \ldots = [A_n^0 + A_n^2 \cdot x^2 + \ldots + A_n^{2k} \cdot x^{2k} + \ldots] +$ $+ x \cdot [A_n^1 + A_n^3 \cdot x^2 + \ldots + A_n^{2k+1} \cdot x^{2k} + \ldots]$, was wir bezeichnen:

(4) $$\varphi_n(x) = \varphi_n^a(x) + x \cdot \varphi_n^b(x), \qquad n \geqq 1,$$

wo gilt:

(5) $$\varphi_n^a(x) = \sum_{i=0} A_n^{2i} \cdot x^{2i}, \qquad n \geqq 1,$$

(6) $$\varphi_n^b(x) = \sum_{i=0} A_n^{2i+1} \cdot x^{2i}, \qquad n \geqq 1.$$

Bemerkung: Der Termin „*gerade*") bzw. „*ungerade*" Komponente bezieht sich bloss auf die oberen Zeiger der Zahlen A_n^j, nicht auf das Argument x.

Definition 3. Das Polynom $f_n(x)$, siehe I-(35), zerlegen wir in eine gerade und eine ungerade Komponente:

$f_n(x) = D_n^0 - D_n^1 \cdot x - D_n^2 \cdot x^2 + D_n^3 \cdot x^3 + \ldots = [D_n^0 - D_n^2 \cdot x^2 + \ldots +$ $+ (-1)^k \cdot D_n^{2k} \cdot x^{2k} + \ldots] - x \cdot [D_n^1 - D_n^3 \cdot x^2 + \ldots + (-1)^k \cdot D_n^{2k+1} \cdot x^{2k} + \ldots]$,

was wir bezeichnen:

(7) $$f_n(x) = f_n^a(x) - x \cdot f_n^b(x), \qquad n \geqq 0,$$

wo gilt:

(8) $$f_{2n}^a(x) = f_{2n+1}^a(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n+i}{2i} \cdot x^{2i}, \qquad n \geqq 0,$$

(9) $$f^b_{2n}(x) = f^b_{2n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \cdot \binom{n+i}{1+2i} \cdot x^{2i}, \qquad n \geqq 1.$$

Bemerkung: Der Termin „*gerade*", bzw. „*ungerade*" Komponente bezieht sich bloss auf die unteren Zeiger der Zahlen $\binom{r}{m}$, nicht auf das Argument.

Satz 4.

(10) $$f^a_{2n}(x) \cdot \varphi^a_n(x) = 1$$
(11) $$f^b_{2n}(x) \cdot \varphi^a_n(x) = \varphi^b_n(x)$$
für den Index $n \geqq 1$.

a) *Beweis der Relation* (**10**). Führen wir das Cauchy-sche Produkt der Potenzreihen $f^a_{2n}(x)$, $\varphi^a_n(x)$ durch (weil man das Polynom $f^a_{2n}(x)$ als eine Potenzreihe mit endlicher Anzahl von Nichtnullkoeffizienten betrachten kann): wir bekommen dadurch die Potenzreihe $\sum_{r=0} C_{2r} \cdot x^{2r}$, wo es für jeden nichtnegativen Index r gilt:

(A) $$C_{2r} = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i \cdot A_n^{2(r-i)} \cdot \binom{n+i}{2i}.$$

Aber wenn wir in die Formel (1) einsetzen: $2k + 1 + j = 2r$, das ist: $j = 1$, $k = r - 1$, und dann die Gleichung annulieren, bekommen wir die mit der rechten Seite der Gleichung (A) identische Gestalt; die Formel (1) setzt allerdings $r \neq 0$ voraus. Wenn wir in (A) die Grösse $r = 0$ einsetzen, so bekommen wir $C_0 = A_n^0 \cdot \binom{n}{0} = 1$, siehe die Def. I-27.

Es gilt also im Ganzen: 1) $C_{2r} = 0$ für $r \neq 0$, 2) $C_0 = 1$. w. z. b. w.

b) Beweis der Relation (11). Führen wir das Cauchy-sche Produkt vom Polynom $f^b_{2n}(x)$ und der Potenzreihe $\varphi^a_n(x)$ durch. Die so entstandene Potenzreihe wird mit der Reihe $\varphi^b_n(x)$ dann und nur dann identisch sein, wenn es für einen beliebigen nichtnegativen Index k gelten wird:

(B) $$A_n^{2k+1} = \sum_{i=0}(-1)^i \cdot \binom{n+i}{1+2i} \cdot A_n^{2(k-i)}.$$

Aber in dieser Relation erkennen wir die oben zitierte Formel (1), die für den ungeraden oberen Index der linken Gleichungsseite, d. h. für $j = 0$ umgeformt worden ist. Weil diese Relation für alle ganzen nichtnegativen Indexe k gilt, ist damit die Relation (11) bewiesen.

Korolar 5.

Aus den Formeln (10), (11) folgen sofort neue erzeugende Funktionen für die Zahlen A_n^k:

(12) $$\varphi^a_n(x) = \frac{1}{f^a_{2n}(x)}, \qquad \varphi^b_n(x) = \frac{f^b_{2n}(x)}{f^a_{2n}(x)}, \qquad n \geqq 1.$$

Lemma 6.

Es gelten die Rekursionsformeln:

(13) $$f_n^a(x) = f_{n-2}^a(x) - x^2 \,.\, f_{n-1}^b(x); \qquad n \geqq 2,$$

(14) $$f_n^b(x) = f_{n-2}^b(x) + f_{n-1}^a(x); \qquad n \geqq 1.$$

Dabei gelten ersichtlich diese Anfangswerte:

(15) $$f_0^a(x) = f_1^a(x) = 1, \qquad f_2^b(x) = f_1^b(x) = 1,$$

Der Beweis der Formel (13): Nach der Definition 3 gilt für $n \geqq 2$:

$$f_{n-2}^a(x) = \sum_{j=0} (-1)^j \,.\, D_{n-2}^{2j} \,.\, x^{2j}, \qquad f_{n-1}^b(x) = \sum_{i=0} (-1)^i \,.\, D_{n-1}^{2i+1} \,.\, x^{2i},$$

so dass

$$f_{n-2}^a(x) - x^2 \,.\, f_{n-1}^b(x) = \sum_{j=0} (-1)^j \,.\, D_{n-2}^{2j} \,.\, x^{2j} +$$
$$+ \sum_{i=0} (-1)^{i+1} \,.\, D_{n-1}^{2i+1} \,.\, x^{2(i+1)} = (-1)^0 \,.\, D_{n-2}^0 \,.\, x^0 + \sum_{j=1} (-1)^j \,.\, D_{n-2}^{2j} \,.\, x^{2j} +$$
$$+ \sum_{j=1} (-1)^j \,.\, D_{n-1}^{2j-1} \,.\, x^{2j} = \quad \text{[mit Rücksicht auf die Formeln I-(32), (34)]}$$
$$= (-1)^0 \,.\, D_n^0 \,.\, x^0 + \sum_{j=1} (-1)^j \,.\, (D_{n-2}^{2j} + D_{n-1}^{2j-1}) \,.\, x^{2j} = (-1)^0 \,.\, D_n^0 \,.\, x^0 +$$
$$+ \sum_{j=1} (-1)^j \,.\, D_n^{2j} \,.\, x^{2j} = \sum_{j=0} (-1)^j \,.\, D_n^{2j} \,.\, x^{2j} = f_n^a(x); \qquad n \geqq 2.$$

Der Beweis der Formel (14). Es gilt nach der Definition 3:

$$\left.\begin{aligned} f_{n-2}^b(x) &= \sum_{i=0} (-1)^i \,.\, D_{n-2}^{2i+1} \,.\, x^{2i}, & n > 2,\\ f_{n-1}^a(x) &= \sum_{i=0} (-1)^i \,.\, D_{n-1}^{2i} \,.\, x^{2i}, & n \geqq 1. \end{aligned}\right\} \text{ und daraus;}$$

$$f_{n-2}^b(x) + f_{n-1}^a(x) = \sum_{i=0} (-1)^i \,.\, (D_{n-2}^{2i+1} + D_{n-1}^{2i}) \,.\, x^{2i} =$$
$$= \sum_{i=0} (-1)^i \,.\, D_n^{2i+1} \,.\, x^{2i} = f_n^b(x); \qquad n \geqq 1. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Lemma 7.

Es gilt die Rekursionsformel:

(16) $$\begin{cases} f_{2n}^a(x) = (2 - x^2) \,.\, f_{2n-2}^a(x) - f_{2n-4}^a(x); & n \geqq 2,\\ \text{wo} \quad f_2^a(x) = 1 - x^2, \quad f_0^a(x) \geqq 1. \end{cases}$$

Beweis. Der Kürze halber bezeichnen wir f_m^a statt $f_m^a(x)$. Es gilt nach dem Lemma 6: a) $f_m^a = f_{m-2}^a - x^2 \,.\, f_{m-1}^b$, $m \geqq \mathbf{2}$, b) $f_m^b = f_{m-2}^b + f_{m-1}^a$, $m \geqq 1$, so dass nach a) gilt: $f_{m+1}^a = f_{m-1}^a - x^2 \,.\, f_m^b$, $m \geqq 1$, und daraus, mit Rücksicht auf b): $f_{m+1}^a = f_{m-1}^a - x^2 \,.\, (f_{m-2}^b + f_{m-1}^a)$, oder: $x^2 \,.\, f_{m-2}^b = (1 - x^2) \,.\, f_{m-1}^a - f_{m+1}^a$, $m \geqq 1$, so dass auch gilt: c) $x^2 \,.\, f_{m-1}^b = (1 - x^2) \,.\, f_m^a - f_{m+2}^a$, $m \geqq 0$. Nach dem Einsetzen von c) in *a*) bekommen wir: $f_m^a = f_{m-2}^a + (x^2 - 1) . f_m^a + f_{m+2}^a$, oder $f_{m+2}^a = (2 - x^2) . f_m^a - f_{m-2}^a$, $m \geqq 2$. Daraus, nach der Transformation $m + 2 = 2n$, wo $m \geqq 2 \Rightarrow n \geqq 2$, gilt: $f_{2n}^a = (2 - x^2) . f_{2n-2}^a - f_{2n-4}^a$.

Definition 8.

$W_n(x)$ bezeichnet die Determinante n-ter Ordnung, $n \geqq 1$, wenn es für die Elemente $a_{ik} = a_{i,k}$ dieser Determinante gilt: a) $a_{nn} = 1 - x^2$, b) $a_{kk} = 2 - x^2$ für $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. c) $a_{k-1,k} = -1$ für $k = 2, 3, \ldots, n$. d) $a_{k+1,k} = -1$ für $k \approx 1, 2, \ldots, n - 1$. *e*) Die übrigen Elemente sind Nullen.

Weiter definieren wir:

$$W_0(x) = 1.$$

Lemma 9.

Es gilt die Rekursionsformel:

$$W_n(x) = (2 - x^2) . W_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \qquad n \geqq 2, \tag{17}$$
$$\text{wo} \quad W_1(x) = 1 - x^2, \qquad W_0(x) = 1.$$

Beweis. Entwickeln wir die Determinante $W_n(x)$ nach den Elementen ihrer ersten Spalte. Wir erhalten:

$$W_n(x) = (2 - x^2) . W_{n-1}(x) + A_{2,1},$$

wo $A_{2,1}$ die Bezeichnung für die dem Element $a_{2,1}$ entsprechende Subdeterminante sei. Entwickeln wir $A_{2,1}$ nach den Elementen ihrer ersten Zeile, so gilt es ersichtlich:

$$A_{2,1} = -W_{n-2}(x).$$

Satz 10.

Es gilt die Identität:

$$f_{2n}^a(x) = W_n(x), \qquad n \geqq 0. \tag{18}$$

Bewies. Bei der Abbildung $f_{2k}^s(x) \to W_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, bekommen wir aus der Formel (16) die Formel (17) und umgehehrt. Ausserdem gilt: $f_2^a(x) = W_1(x) = 1 - x^2$, $f_0^a(x) = W_0(x) = 1$, siehe die Relationen (16), (17).

Definition 11. T_n bezeichnet die Determinante n-ter Ordnung, $n \geqq 1$, wenn es für die Elemente $a_{ik} = a_{i,k}$ dieser Determinante gilt: a) $a_{kk} = 1 - x^2$, $k = 1, 2, \ldots, n$. b) $a_{k-1,k} = -1$, $k = 2, 3, \ldots, n$. c) $a_{ik} = -x^2$ für $i > $ k; $k = 1, 2, \ldots, n$. d) $a_{ik} = 0$ für $i < k - 1$; $k = 2, 3, \ldots, n$.

Satz 12.

Es gilt die Identität:

$$f_n(x) . f_n(-x) = f_{2n}^a(x), \qquad n \geqq 0. \tag{19}$$

Beweis.

a) Wir nehmen in Betracht, dass es nach dem Satz II-30 gilt:

$$f_n(x) \,.\, f_n(-x) = D_n(x) \,.\, D_n(-x).$$

b) Wir bestimmen die Bedingungen für die Elemente der Determinante $Q_n(x)$, die durch die Relation $Q_n(x) = D_n(x) \,.\, D_n(-x)$ gegeben ist: Mit Rücksicht auf die Formel II-(21), -(22), -(24), kann man $Q_n(x)$ mit Anwendung der Matrixrechnung, d. h. durch das Produkt der den Determinanten $D_n(x)$, $D_n(-x)$ entsprechenden Matrizen, bestimmen.

$(x \,.\, \mathbf{F}_n - \mathbf{E}_n) \,.\, (-x \,.\, \mathbf{F}_n - \mathbf{E}_n) = -x^2 \,.\, \mathbf{F}_n^2 + x \,.\, \mathbf{E}_n \,.\, \mathbf{F}_n - x \,.\, \mathbf{F}_n \,.\, \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_n \,.\, \mathbf{E}_n =$
$= -x^2 \,.\, \mathbf{F}_n^2 + \mathbf{E}_n$. Es gilt also:

$$Q_n(x) = |\, -x^2 \,.\, \mathbf{F}_n^2 + \mathbf{E}_n \,| \,, \qquad n \geqq 1. \tag{20}$$

Es bleibt übrig, die Matrix $\mathbf{F}_n^2$ zu bestimmen. Nehmen wir in Betracht, dass sich in der i-ten Zeile, bzw. in der i-ten Spalte der Matrix $\mathbf{F}_n$, wenn wir von links nach rechts, bzw. von oben nach unten lesen, zuerst $n + 1 - i$ Einser befinden und $i - 1$ Nullen folgen.

Bezeichnen wir a_{ik}, bzw. b_{ik} das Element der Matrix $\mathbf{F}_n$, bzw. der Matrix $\mathbf{F}_n^2$.

Weil es, wie bekannt, $b_{ik} = a_{i1} \,.\, a_{1k} + a_{i2} \,.\, a_{2k} + \ldots + a_{in} \,.\, a_{nk}$ gilt, so folgt es aus dem Angeführten:

$$b_{ik} = min\,\{(n + 1 - i), (n + 1 - k)\} \tag{21}$$

Daraus folgt weiter, (wenn wir $b_{ij} = b_{i,\,j}$ bezeichnen):

$$\begin{aligned} n + 1 - r = b_{1,r} = b_{2,r} = \ldots = b_{r,r} = b_{r,r-1} = b_{r,r-2} = \ldots = \\ = b_{r,1}; \qquad r = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{22}$$

Summarisch: die Determinante $Q_n(x)$ ist durch die Relationen (20), (22) vollständig bestimmt.

c) *Algorithmus R*: In der Determinante $Q_n(x)$ ziehen wir die n-te Zeile von allen vorangehenden ab. In der so gewonnenen Determinante ziehen wir ab die $(n - 1)$-te Zeile von allen Zeilen vom niedrigeren Index. In der so gewonnenen Determinante ziehen wir ab die $(n - 2)$-te Zeile von allen Zeilen vom niedrigeren Index. U. s. fort.

$$\begin{array}{|c|cccc|} \hline & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ Q_{n-k}(x) & -1 & 0 & & 0 \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \multicolumn{5}{|c|}{} \\ \multicolumn{5}{|c|}{} \\ \hline \end{array}$$

Die Entwicklungsregel: Nach dem k-ten Schritt des *Algorithmus R* bekommen wir eine Determinante, in deren nordwestlichem Quadrat sich die Subdeterminante $Q_{n-k}(x)$ befindet; das ihm anliegende nordöstliche Rechteck hat in seiner ersten Spalte die negativen Einser und in seinen weiteren Spalten Nullen. Das südliche Rechteck, d. i. die $(n - k + 1)$-te bis die n-te Zeile der ganzen Determinante, identifiziert sich mit dem gleichen Teil der Determinante $T_n(x)$, siehe die Def. 11.

Diese Entwickelungsregel kann man durch die Induktion beweisen.

Es folgt aus dem Angeführten:

$$(23) \qquad Q_n(x) = T_n(x), \qquad n \geqq 1.$$

d) *Algorithmus S.* In der Determinante $T_n(x)$ ziehen wir die n-te Spalte von allen vorangehenden Spalten ab. In der so entstandenen Determinante ziehen wir die $(n - 1)$-te Spalte von allen Spalten vom niedrigeren Index ab. In der so entstandenen Determinante ziehen wir die $(n - 2)$-te Spalte von allen Spalten vom niedrigeren Index ab. U. s. f.

Die Entwickelungsregel: Nach dem k-ten Schritt des *Algoorithmus S* bekommen wir eine Determinante, in deren nordwestlichem Quadrat sich die Subdeterminante $T_{n-k-1}(x)$ befindet. Das ihm anliegende südwestliche Rechteck hat in seiner ersten Zeile zu seinen Elementen die Binome $1 - x^2$, in seiner zweiten Zeile hat es zu seinen Elementen die negativen Einser und in weiteren Zeilen hat es die Nullen. Das östliche Rechteck, d. i. die $(n - k)$-te bis n-te Spalte der ganzen Determinante stimmt mit dem gleichen Teil der Determinante $W_n(x)$ überein, siehe die Def. 8.

$T_{n-k-1}(x)$	
$..1 - x^2..$ $..\ -1\ ..$ $..\ 0\ ..$ $\vdots$ $..\ 0\ ..$	

Diese Entwicklungsregel kann man wieder durch die Induktion beweisen.

Aus dem Angeführten folgt es:

$$(24) \qquad T_n(x) = W_n(x), \qquad n \geqq 1.$$

e) Wir haben bewiesen: $f_n(x) \,.\, f_n(-x) = D_n(x) \,.\, D_n(-x) = Q_n(x) = T_n(x) = W_n(x)$. Aber es gilt nach dem Satz 10: $W_n(x) = f^a_{2n}(x)$. W. z. b. w.

Satz 13.

Es gilt die Identität:

$$(25) \qquad f_n(x) \,.\, f_n(-x) = (-1)^{\binom{n+1}{2}} \,.\, f_n[(-1)^n \,.\, (x^2 - 2)]; \qquad n \geqq 0.$$

Beweis. Es sei eine Funktion $P_n[t_n(x)]$ gegeben, die für alle Indexe $n \geqq 0$ definiert wird. Es sei $t_n(x) = (-1)^n \,.\, (x^2 - 2)$, $x \in R$.

Es gelte für diese Funktion die Rekursionsformel:

$$(26)\qquad (-1)^{\binom{n+1}{2}} \cdot P_n[(-1)^n \cdot (x^2 - 2)] =$$
$$= (2 - x^2) \cdot (-1)^{\binom{n}{2}} \cdot P_{n-1}[(-1)^{n-1} \cdot (x^2 - 2)] -$$
$$- (-1)^{\binom{n-1}{2}} \cdot P_{n-2}[(-1)^{n-2} \cdot (x^2 - 2)],$$

mit den Anfangsgrössen:

$$(27)\qquad P_1[t_1(x)] = -f_2^a(x) = x^2 - 1, \qquad P_0[t_0(x)] = f_0^a(x) = 1.$$

Dann gilt die Identität:

$$(28)\qquad \ldots f_{2n}^a(x) = (-1)^{\binom{n+1}{2}} \cdot P_n[(-1)^n \cdot (x^2 - 2)]; \qquad n \geqq 0,$$

weil die Rekursionsformeln (16), (26) formal gleich sind und ausserdem (27) gilt.

a) Wenn wir die Gleichung (26) mit dem Faktor $(-1)^{\binom{n+1}{2}}$ multiplizieren, so bekommen wir nach kleiner Umformung:

$$(29)\qquad P_n[(-1)^n \cdot (x^2 - 2)] = (2 - x^2) \cdot [(-1)^{n^2} \cdot P_{n-1}[(-1)^{n-1} \cdot (x^2 - 2)]] -$$
$$- [(-1)^{(n-1)^2+n} \cdot P_{n-2}[(-1)^{n-2} \cdot (x^2 - 2)]].$$

b) Es sei k eine beliebige ganze nichtnegative Zahl. Dann gilt:

$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2$; $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$; daraus folgt weiter, dass der Ausdruck $[(n - 1)^2 + n]$ eine ungerade Zahl für jedes natürliche n, und für $n = 0$ ist.

c) Mit Rücksicht auf den Absazt b) kann man die Relation (29) zerlegen in folgende zwei Gleichungen:

$$(30)\qquad P_n(x^2 - 2) = (2 - x^2) \cdot P_{n-1}(2 - x^2) + P_{n-2}(x^2 - 2) \ldots \text{ für } n = 2k,$$
$$(31)\qquad P_n(2 - x^2) = (x^2 - 2) \cdot P_{n-1}(x^2 - 2) + P_{n-2}(2 - x^2) \ldots \text{ für } n = 2k + 1.$$

d) Das angeführte Vorgehen kann man ersichtlich umkehren: setzen wir voraus, dass eine für alle Indexe $n \geqq 0$ definierte Funktion $P_n[t_n(x)]$ existiert. Es sollen für diese Funktion die Gleichungen (30), (31), (27) gelten. Für eine solche Funktion muss die Identität (28) gelten.

e) Wenn wir in der für das Argument t aufgeschriebenen Relation I-(36) die Substitution 1. $t = x^2 - 2$, 2. $t = \mathbf{2} - x^2$ durchführen, so bekommen wir:

$$(32)\qquad f_n(x^2 - 2) = (2 - x^2) \cdot f_{n-1}(2 - x^2) + f_{n-2}(x^2 - 2) \ldots \text{ für } n \geqq 2,$$
$$(33)\qquad f_n(2 - x^2) = (x^2 - 2) \cdot f_{n-1}(x^2 - 2) + f_{n-2}(2 - x^2) \ldots \text{ für } n \geqq 2.$$

f) Aus der formalen Übereinstimmung der Relationen (30), (32), bzw. (31), (33), wobei die Relation (32) bzw. (33) (auch) für alle geraden, bzw. ungeraden Indexe gilt, und weiter daraus, dass gilt: $f_0(t) = 1$, $f_1(2 - x^2) = x^2 - 1$, kann man nach dem Absatz *d)* schliessen, dass man in der Identität (28) die Funktion $P_n(t)$ durch die Funktion $f_n(t)$ ersetzen kann, so dass es gilt für $n \geqq 0 \ldots$

$$f^a_{2n}(x) = (-1)^{\binom{n+1}{2}} \cdot f_n[(-1)^n \cdot (x^2 - 2)].$$

g) Daraus folgt mit Rücksicht auf (19) der zu beweisende Satz.

Korolar 14.

Es habe das Polynom $f_n(x)$, $n \geqq 1$, *die Wurzel* $x = r$; *dann hat dieses Polynom auch die Wurzel* $x = (-1)^n \cdot (r^2 - 2)$.

Beweis – folgt unmittelbar aus der Identität (25).

Folgerung. Wir haben eingentlich einen *Algorithmus* für die Ausrechnung der Wurzeln des Polynoms $f_n(x)$ gefunden, falls man eine seine Wurzel $x = r_1$ kennt, denn dann kennt man auch die Wurzeln:

$$\begin{aligned} x &= r_2 = (-1)^n \cdot (r_1^2 - 2), \\ x &= r_3 = (-1)^n \cdot (r_2^2 - 2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x &= r_k = (-1)^n \cdot (r_{k-1}^2 - 2) = r_1, \\ &\text{wo } 1 \geqq k \geqq n \text{ ist.} \end{aligned} \tag{34}$$

Diese Feststellung stellt uns vor die Aufgabe: *Wieviele Wurzeln, bzw. welche Wurzeln des Polynoms* $f_n(x)$ *man im voraus kennen muss, damit man – aus diesen Werten ausgehend – mittels des angeführten Algorithmus, alle übrigen Wurzeln festestellen kann.*

Bemerkung 15. Durch die Anwendung von dem Algorithmus (34) habe ich die folgenden Resultate festgestellt, indem ich mich auf die nummerische Berechnung der Wurzelwerte der Polynome $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots, 13$, gestützt habe. (Die Zahlen in den Klammern, die nach den einzelnen Polynomen folgen, bedeuten, wieviele Wurzeln des betreffenden Polynoms einen gemeinsamen Zyklus bilden).

$f_1(x)$ – (1); $f_2(x)$ – (2); $f_3(x)$ – (3); $f_4(x)$ – (1), (3); $f_5(x)$ – (5); $f_6(x)$ – (6); $f_7(x)$ – (1), (2), (4); $f_8(x)$ – (4), (4); $f_9(x)$ – (9); $f_{10}(x)$ – (1), (3), (6); $f_{11}(x)$ – (11); $f_{12}(x)$ – (2), (10); $f_{13}(x)$ – (1), (3), (9).

Bemerkung 16. Aus der Tafel hinter II-(14) ist es ersichtlich, dass die Polynome $f_n(x)$ vom Index $n = 1 + 3k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ die Wurzel $x = (-1)^{n+1}$ haben. Es ist ersichtlich, dass durch den angeführten Algorithmus dieser Wurzelwert in sich selbst übergeht.

Weiter führen wir manche Identitäten zwischen unseren Polynomen an. Aus einigen von diesen werden wir dann (durch den Koeffizientenvergleich) die entsprechenden kombinatorischen Identitäten ableiten.

Satz 17.

Es gilt die Identität:

(35) $$f_{n-1}(-x) \,.\, f_n(-x) = 1 + x \,.\, f^b_{2n}(x), \qquad n \geqq 1.$$

Beweis. Nach (4) und (12) gilt: $\varphi_n(x) = \varphi^a_n(x) + x \,.\, \varphi^b_n(x) = \dfrac{1 + x \,.\, f^b_{2n}(x)}{f^a_{2n}(x)}$. Es gilt aber zugleich: $\varphi_n(x) = \dfrac{f_{n-1}(-x)}{f_n(x)}$, siehe I-(39). Dabei gilt es nach der Formel (19): $f_n(x) \,.\, f_n(-x) = f^a_{2n}(x)$.

Daraus folgt der Satz unmittelbar.

Satz 18.

Es gelten die identischen Gleichungen:

(36)-a $$f_{2n}(x) = f_n(-x) \,.\, [f_n(x) - f_{n-1}(-x)] + 1, \qquad n \geqq 1.$$

(36)-b $$f_{2n+1}(x) = f_n(-x) \,.\, [f_n(x) - f_{n+1}(-x)] + 1, \qquad n \geqq 1.$$

Beweis ad a) Es gilt nach (7): $f_{2n}(x) = f^a_{2n}(x) - x \,.\, f^b_{2n}(x)$, wo $n \geqq 0$. Daraus gilt es mit Rücksicht auf (19) und (35): $f_{2n}(x) = f_n(x) \,.\, f_n(-x) + 1 - f_{n-1}(-x) \,.\, f_n(-x)$, wo $n \geqq 1$, so dass wir nach einer kleinen Umformung die zu beweisende Formel erhalten.

Beweis ad b) Es gilt nach (7): $f_{2n+1}(x) = f^a_{2n+1}(x) - x \,.\, f^b_{2n+1}(x)$, $n \geqq 0$, so dass nach (8) und (9) gilt: $f_{2n+1}(x) = f^a_{2n}(x) - x \,.\, f^b_{2n+2}(x)$, $n \geqq 0$. Weiter wie ad a).

Satz 19.

Bezeichnen wir der Einfachheit halber: $f_k(x) = f_k$, $f_k(-x) = \bar{f}_k$, $k = n - 1, n$. Es gilt die identische Gleichung:

(37) $$2 \,.\begin{vmatrix} f_n, & \bar{f}_{n-1} \\ f_{n-1}, & \bar{f}_n \end{vmatrix} = x \,.\begin{vmatrix} f_n, & \bar{f}_{n-1} \\ \bar{f}_n, & f_{n-1} \end{vmatrix}, \qquad n \geqq 1.$$

Beweis. Benützen wir die vereinfachte Symbolik für alle Indexe. Nach I-(36) gilt für $r \geqq 1$:

$f_r \cdot \bar{f}_r = (f_{r-2} - x \,.\, \bar{f}_{r-1})(\bar{f}_{r-2} + x \,.\, f_{r-1}) = f_{r-2} \cdot \bar{f}_{r-2} - x \,.\, \bar{f}_{r-1} \cdot \bar{f}_{r-2} + x \,.\, f_{r-2} \,.\, f_{r-1} - x^2 \,.\, \bar{f}_{r-1} \,.\, f_{r-1}$, so dass es nach der Formel (19) für $r \geqq 1$ gilt:

$f^a_{2r} = f^a_{2r-4} + x \,.\, (f_{r-1} \,.\, f_{r-2} - \bar{f}_{r-1} \,.\, \bar{f}_{r-2}) - x^2 \,.\, f^a_{2r-2}$; dabei gilt es nach (16):

$$f^a_{2r} = (2 - x^2) \,.\, f^a_{2r-2} - f^a_{2r-4} \qquad r \geqq 2.$$

Daraus gilt es mit Rücksicht auf die Übereinstimmung der linken Seiten beider letzten Gleichungen:

$$f^a_{2r-4} = x \,.\, (f_{r-1} \,.\, f_{r-2} - \bar{f}_{r-1} \,.\, \bar{f}_{r-2}) - x^2 \,.\, f^a_{2r-2} = (2 - x^2) \,.\, f^a_{2r-2} - f^a_{2r-4},$$
$$r \geqq 2.$$

Nach der Umformung: $2.(f^a_{2r} - f^a_{2r-4}) = x.(f_{r-1}.f_{r-2} - \bar{f}_{r-1}.\bar{f}_{r-2})$ wo $r \geqq 2$. Wenn wir wieder die Formel (19) benützen so gilt es:

$2.(f_{r-1}.\bar{f}_{r-1} - f_{r-2}.\bar{f}_{r-2}) = x.(f_{r-1}.f_{r-2} - \bar{f}_{r-1}.\bar{f}_{r-2})$, wo $r \geqq 2$; daraus nach der Substitution $r - 1 = n$ wo $r \geqq 2 \Rightarrow n \geqq 1$ folgt sofort der zu beweisende Satz.

Satz 20.

Es gelten die kombinatorischen Identitäten:

(38) $$\sum_{j=0}^{2r} D_n^j . D_n^{2r-j} = \binom{n+r}{2r}; \qquad 0 \leqq 2r \leqq n; n = 1, 2, 3, \ldots$$

(39) $$\sum_{j=0}^{2r-1} (-1)^j . D_n^j . D_n^{2r-1-j} = 0; \qquad 1 \leqq 2r - 1 \leqq n; \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dabei bestimmen wir die Zahlen D_n^k nach der Formel I-(32).

Beweis.

a) Wir vergleichen die Koeffizienten bei der geraden Potenz x^{2r} auf beiden Seiten der Gleichung (19) indem wir die Regel des Cauchy-schen Produktes der Potenzreihen anwenden. Dabei benützen wir die Formel I-(35) und (8). Wir bekommen die Gleichung:

$$\sum_{j=0}^{2r} (-1)^{\binom{j+1}{2}+j} . D_n^j . (-1)^{\binom{2r-j+1}{2}} . D_n^{2r-j} = (-1)^r . \binom{n+r}{2r}.$$

Diese Gl. multiplizieren wir mit dem Faktor $(-1)^{-r}$ damit die rechte Seite stets positiv sei; dann bekommen wir folgenden Exponenten der negativen Einheit auf der linken Seite: $\binom{j+1}{2} + j + \binom{2r-j+1}{2} - r = (r-j)^2 - (r-j) + (r^2 + r)$.

1. Setzen wir voraus dass $r > j$; dann gilt: $(r-j)^2 - (r-j) + (r^2 + r) = (r-j)(r-j-1) + r(r+j) = 2.\left[\binom{r-j}{2} + \binom{r+1}{2}\right] = 2.H$ wo H eine natürliche Zahl ist.

2. Setzen wir voraus dass $r < j$; dann gilt: $(r-j)^2 - (r-j) + (r^2 + r) = (j-r)^2 + (j-r) + r(r+1) = 2.\left[\binom{j-r+1}{2} + \binom{r+1}{2}\right] = 2.K$, wo K eine natürliche Zahl ist.

3. Wenn $r = j$ ist, dann bekommen wir durch eine Umformung $2.\binom{r+1}{2}$.

b) Wir vergleichen die Koeffizienten bei der ungeraden Potenz x^{2r-1} auf den beiden Seiten der Gl. (19) Wir bekommen:

$$\sum_{j=0}^{2r-1} (-1)^{\binom{j+1}{2}+j} . D_n^j . (-1)^{\binom{2r-j}{2}} . D_n^{2r-1-j} = 0.$$

Diese Gl. hat nach dem Multiplizieren mit dem Faktor $(-1)^{-r}$ den folgenden Exponenten der negativen Einheit auf der linken Seite:

$$\binom{j+1}{2} + j + \binom{2r-j}{2} - r = (r-j)^2 - (r-j) + r(r-1) + j.$$

1. Setzen wir voraus dass $r > j$; dann gilt: $(r-j)^2 - (r-j) + r(r-1) + j = $ $= (r-j)(r-j-1) + r(r-1) + j = 2.\left[\binom{r-j}{2} + \binom{r}{2}\right] + j = 2.\,H + j$ wo H eine natürliche Zahl oder Null ist.

2. Setzen wir voraus dass $r < j$; dann gilt: $(r-j)^2 - (r-j) + r(r-1) + j = $ $= (j-r)^2 + (j-r) + r(r-1) + j = 2.\left[\binom{j-r+1}{2} + \binom{r}{2}\right] + j = 2.\,K + j$ wo K eine natürliche Zahl oder Null ist.

3. Wenn $r = j$ ist dann bekommen wir durch eine Umformung $2.\binom{r}{n} + j$.

W. z. b. w.

Satz 21.

Es gelten die kombinatorischen Identitäten:

$$(40) \qquad \sum_{j=0}^{2r+1} D_{n-1}^{j} \,.\, D_{n}^{2r+1-j} = \binom{n+r}{1+2r}; \qquad 1 \leqq 2r+1 \leqq n-1.$$

$$(41) \qquad \sum_{j=0}^{2r} (-1)^j \,.\, D_{n-1}^{j} \,.\, D_{n}^{2r-j} = 0; \qquad 2 \leqq 2r \leqq n-1.$$

Schema des Beweises. Den Satz erhalten wir, wenn wir in der Gleichung (35) die Koeffizienten bei der gleichen *a*) geraden *b*) ungeraden Potenz vergleichen. Wir nehmen dabei die Rücksicht auf die Formel I-(35) und (9). Der Beweisverlauf ist der gleiche wie bei Satz 20.

Bemerkung 22. Weitere kombinatorischen Identitäten könnten wir auf Grund unserer Identitäten (36)-a, -b und (37) bilden. Für die kombinatorische Analyse haben solche Formeln gewisse Bedeutung, siehe z. B. [3], Kapitel 13. Deshalb haben wir hier vier von diesen Identitäten abgeleitet, auch wenn es eine Abweichung vom unseren Programm ist.

Satz 22.

Es sei $x = r$ eine Wurzel des Polynoms $f_n(x)$, $n \geqq 2$. Dann gilt:

$$(42) \qquad \text{a)}\ f_{n+1}(r) + f_{n-1}(r) = 0, \qquad \text{b)}\ f_{n+1}(-r) - f_{n-1}(-r) = 0.$$

Beweis. Wenn $x = r$ eine Wurzel des Polynoms $f_n(x)$ ist, dann gilt es nach (37): $-2.\,f_{n-1}(-r)\,.\,f_{n-1}(r) = -r\,.\,f_{n-1}(-r)\,f_n(-r)$; $n \geqq 1$. Diese Gleichung kann man durch den Faktor $f_{n-1}(-r)$ dividieren, der nach dem Lemma II-8 von Null verschieden ist. Es gilt dann:

a) $-2 . f_{n-1}(r) = -r . f_n(-r)$, $n \geqq 1$; es gilt nach der Formel I-(36) zugleich b) $f_{n+1}(r) - f_{n-1}(r) = -r . f_n(-r)$, $n \geqq 1$. In Rücksicht auf die Übereinstimmung der rechten Seiten der letzten zwei Gleichungen, kann man eine Gleichung für die linken Seiten schreiben. Daraus erhalten wir durch eine Umformung die erste der zu beweisenden Gleichungen. Die zweite folgt sofort aus I-(36).

Und nun gelangen wir zu dem einfachsten analytischen Prinzip der oszillierenden Kombinationen.

Definition 23. Mit dem Symbol $Z_n(x)$ bezeichnen wir die Determinante n-ter Ordnung, $n \geqq 1$, für deren Elemente $a_{ik} = a_{i,k}$ gilt:

a) $a_{kk} = 2 - x^2$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$.

b) $a_{k+1,k} = a_{k,k+1} = -1$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n-1$.

c) Die übrigbleibenden Elemente a_{ik} sind Nullen.

Ausserdem definieren wir die Anfangsgrösse $Z_0(x) = 1$.

Definition 24. Wir stellen die Zahl G_n^k fest:

$$G_n^k = \binom{n-k}{k}, \tag{43}$$

für den Indexenbereich:

$$0 \leqq k \leqq n-k, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{44}$$

Die dem Indexenbereich entsprechenden Zahlen G_n^k ordnen wir in ein Dreiecksystem an, das wir *„das verschobene Pascal'sche Dreiecksystem"* benennen. Es ist ein System von Zeilen und Spalten, siehe die Nebendarstellung, worin sich die Zahl G_n^k in der n-ten Zeile von oben und k-ten Spalte von links befindet.

G_0^0	*das verschobene*			
G_1^0	*Pascalsche*			
G_2^0	G_2^1	*Dreieck*		
G_3^0	G_3^1			
G_4^0	G_4^1	G_4^2		
G_5^0	G_5^1	G_5^2		
G_6^0	G_6^1	G_6^2	G_6^3	
.	.	.	.	.

Bemerkung 25. Die Zahlen G_n^k, die sich ausserhalb des Definitionsbereiches befinden, sind im Hinblick auf die Elementardefinition der Zahlen $\binom{n}{k}$ gleich Null.

Lemma 26.

Für die Zahlen G_n^k gilt die Rekursionsformel:

(45) $$G_n^k = G_{n-1}^k + G_{n-2}^{k-1}; \qquad G_0^0 = 1.$$

Beweis. Die Gleichung lautet nach (43) so: $\binom{n-k}{k} = \binom{n-1-k}{k} + \binom{n-2-(k-1)}{k-1}$. Beziechnen wir $n - k = m$ so bekommen wir: $\binom{m}{k} = \binom{m=1}{k} + \binom{m-1}{k-1}$, $0 \leqq k \leqq m$ was eine bekannte Relation ist.

Definition 27. Mit dem Symbol $p_n(t)$ bezeichnen wir folgendes spezielle Polynom:

(46) $$p_n(t) = \sum_{j=0} (-1)^j \,.\, G_n^j \,.\, t^{n-2j}; \qquad n \geqq 0.$$

Lemma 28.

Für die Polynome $p_n(t)$, $n \leqq 1$, gilt die Rekursionsformel:

(47) $$p_n(t) = t \,.\, p_{n-1}(t) - p_{n-2}(t); \qquad p_0(t) = 1.$$

Beweis. Es gilt nach (45), (46): $t \,.\, p_{n-1}(t) - p_{n-2}(t) = t \,.\, \sum_{i=0} (-1)^i \,.\, G_{n-1}^i \,.\, t^{n-1-2i} - \sum_{j=0} (-1)^j \,.\, G_{n-2}^j \,.\, t^{n-2-2j} = (-1)^0 \,.\, G_{n-1}^0 \,.\, t^n + \sum_{i=1} (-1)^i \,.\, G_{n-1}^i \,.\, t^{n-2i} - \sum_{j=0} (-1)^j \,.\, G_{n-2}^j \,.\, t^{n-2-2j} =$ [Wenn wir bei der letzten Summengruppe die Grenzenänderung $i = j + 1$ durchführen] $= t^n + \sum_{i=1} (-1)^i \,.\, G_{n-1}^i \,.\, t^{n-2i} - \sum_{i=1} (-1)^{i-1} \,.\, G_{n-2}^{i-1} \,.\, t^{n-2-2(i-1)} = t^n + \sum_{i=1} (-1)^i \,.\, G_{n-1}^i \,.\, t^{n-2i} - \sum_{i-1} (-1)^i \,.\, G_{n-2}^{i-1} \,.\, t^{n-2i} = t^n + \sum_{i=1} (-1)^i \,.\, (G_{n-1}^i + G_{n-2}^{i-1}) \,.\, t^{n-2i} = (-1)^0 \,.\, G_n^0 \,.\, t^n + \sum_{i=1} (-1)^i \,.\, G_n^i \,.\, t^{n-2i} = \sum_{i=0} (-1)^i \,.\, G_n^i \,.\, t^{n-2i} = p_n(t)$, w. z. b. w.

Definition 29. Mit dem Symbol $Z_n(t)$ bezeichnen wir die Determinante n-ter Ordnung, $n \leqq 1$, für deren Elemente $a_{ik} = a_{i,k}$ gilt:

a) $a_{kk} = t, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$

b) $a_{k+1,k} = a_{k,k+1} = -1, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1.$

c) Die übrigbleibenden Elemente a_{ik} sind Nullen.

Ausserdem definieren wir die Anfangsgrösse $Z_0(t) = 1$.

Bemerkung 30. Aus dem Vergleich der Definitionen 23 mit 29 folgt sofort dass gilt: $Z_n(x) = Z_n(2 - x^2)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Lemma 31.

Für die Determinante $Z_n(t)$ gilt die Rekursionsformel:

$$Z_n(t) = t \,.\, Z_{n-1}(t) - Z_{n-2}(t); \qquad n > 1 \tag{48}$$
$$\text{wo } Z_0(t) = 1, \qquad Z_1(t) = t.$$

Beweis. Wenn wir die Determinante $Z_n(t)$ nach den Elementen ihrer ersten Spalte entwickeln bekommen wir ersichtlich: $Z_n(t) = t \,.\, Z_{n-1}(t) - (-1) \,.\, A_{2,1}$ wo $A_{2,1}$ die Bezeichnung für die dem Element $a_{2,1} = -1$ entsprechende Subdeterminante ist. Entwickeln wir $A_{2,1}$ nach den Elementen ihrer ersten Spalte, bekommen wir ersichtlich: $A_{2,1} = -Z_{n-2}$.

Weil es nach der Def. 29 $Z_0(t) = 1$ gilt, ist es ersichtlich, dass die Rekursionsformel, vom Index $n \leqq 1$ angefangen, gilt.

Satz 32.

Es gilt die identische Gleichung:

$$Z_n(t) = p_n(t), \qquad n \leqq 0. \tag{49}$$

Beweis. Aus der formalen Übereinstimmung der Rekursionsformeln (47), (48), sowie auch der Anfangswerte $Z_0(t) = p_0(t) = 1$ ist die Gültigkeit des Satzes ersichtlich.

Nun führen wir fünf Sätze an, die die unmittelbaren Zusammenhänge unseres Polynoms $f_n(x)$, bzw. seiner (geraden und ungeraden) Komponenten, mit der einfachen und symmetrischen dreidiagonalen Determinante $Z_n(x)$, bzw. $Z_{2n}(x)$ zeigen.

Satz 33.

Für den geraden Index $n >$ o gilt die identische Gleichung:

$$Z_n(x) = (-1)^{\binom{n}{2}} \,.\, f_n^a(2 - x^2). \tag{50}$$

Für den ungeraden Index $n > 0$ gilt die identische Gleichung:

$$Z_n(x) = (-1)^{\binom{n}{2}} \,.\, (2 - x^2) \,.\, f_n^b(2 - x^2). \tag{51}$$

Beweis des Satzes.

a) Wir beweisen, dass es gilt: $p_{2n}(t) = (-1)^{\binom{2n}{2}} . f_{2n}^a(t)$, $2n \geqq 0$. Weil $\binom{2n}{2} = (2n - 1) \,.\, n \Rightarrow (-1)^{\binom{2n}{2}} = (-1)^n$. Mit Rücksicht darauf und auf (46) und (8) haben wir also zu beweisen, dass es gilt:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \,.\, \binom{2n-j}{j} \,.\, t^{2n-2j} = (-1)^n \,.\, \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \,.\, \binom{n+i}{2i} \,.\, t^{2i}.$$

Diese Identität gilt aber dann und nur dann, wenn die sich entsprechenden Glieder auf den beiden Gleichungsseiten übereinstimmen. Setzen wir also $2n - 2j = 2i$

oder $j = n - i$; dann wird der Koeffizient bei der Potenz t^{2i} auf der linken Seite: $(-1)^{n-i} \cdot \binom{2n-(n-i)}{n-i}$, auf der rechten Seite: $(-1)^{n+i} \cdot \binom{n+i}{2i}$ sein. Weil $(-1)^{n+i} = (-1)^{n-i}$ und weil $\binom{2n-(n-i)}{n-i} = \binom{n+i}{n-i} = \binom{n+i}{2i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, ist damit der Beweis durchgeführt worden.

b) Wir beweisen, dass es gilt: $p_{2n-1}(t) = (-1)^{\binom{2n-1}{2}} \cdot t \cdot f^b_{2n-1}(t)$, wo $2n > 1$. Weil $\binom{2n-1}{2} = (2n-1)(n-1) \Rightarrow (-1)^{\binom{2n-1}{2}} = (-1)^{n-1}$; mit Rücksicht darauf und auf (46) und (9) ist also zu beweisen, dass es gilt:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \cdot \binom{2n-1-j}{j} \cdot t^{2n-1-2j} = (-1)^{n-1} \cdot t \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot \binom{n+i}{1+2i} \cdot t^{2i}.$$

Diese Gleichheit gilt wieder dann und nur dann, wenn die sich entsprechenden Glieder auf der beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen. Setzen wir also $2n - 1 - 2j = 1 + 2i$ oder $j = n - 1 - i$; dann wird der Koeffizient bei der Potenz t^{1+2i} auf der linken Seite: $(-1)^{n-1-i} \cdot \binom{2n-1-(n-1-i)}{n-1-i}$ und auf der rechten Seite $(-1)^{n-1+i} \cdot \binom{n+i}{1+2i}$. Weil $(-1)^{n-1+i} = (-1)^{n-1-i}$ und weil $\binom{2n-1-(n-1-i)}{n-1-i} = \binom{n+i}{n-1-i} = \binom{n+i}{1+2i}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, ist damit der Beweis durchgeführt.

Wir haben also bewiesen:

ad a) für den geraden Index $n \geqq 0$ gilt: $p_n(t) = (-1)^{\binom{n}{2}} \cdot f^a_n(t)$

ad b) für den ungeraden Index $n > 0$ gilt: $p_n(t) = (-1)^{\binom{n}{2}} \cdot f^b_n(t)$.

Nun setzen wir in diesen Gleichungen — mit Rücksicht auf (49) — für die linke Seite $Z_n(t)$. Dann bekommen wir nach Durchführung der Substitution $t = 2 - x^2$, mit Rücksicht auf die Bemerkung 30, den Wortlaut des zu beweisenden Satzes.

Satz 34.

Es gilt die Identität:

(52) $$Z_{2n}(t) = (-1)^n \cdot f_n(t) \cdot f_n(-t) \qquad n \geqq 0.$$

Beweis. Es handelt sich um eine Folgerung des Beweises ad *a*) bei dem vorangehenden Satz; die dort angeführte Gleichung wird für den Index $2n$ statt n umgeformt: $Z_{2n}(t) = (-1)^n \cdot f^a_{2n}(t)$, $n \geqq 0$. Die weitere Umformung ist nach (19).

Lemma 35.

Es gilt die Identität:

(53) $$Z_n(x) = \sum_{i=0}^{n} W_i(x), \qquad n \geqq 1.$$

Den Beweis führen wir durch strenge Induktion durch.

a) Es gilt:

(54) $$Z_1(x) = W_1(x) + W_0(x)$$

siehe die Anfangswerte in der Formel (17).

b) Zerlegen wir die Elemente der letzten Spalte in $Z_n(x)$ so, dass $Z_n(x) = W_n(x) + U_n(x)$ gelte, dann sind in der letzten Spalte der Determinante $U_n(x)$ diese Elemente: $a_{jn} = 0$ für $j \neq n$, $a_{nn} = 1$. Es gilt dann ersichtlich: $U_n(x) = Z_{n-1}(x)$, so dass es gilt:

(55) $$Z_n(x) = W_n(x) + Z_{n-1}(x).$$

Aus (54) und (55) folgt dann durch Induktion die zu beweisende Identität.

Satz 36.

Es gilt die Identität:

(56) $$Z_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j(x) \,.\, f_j(-x), \qquad n \geqq 1.$$

Beweis. Der Satz folgt sofort aus den Formeln (53), (18), (19).

Lemma 37.

Für das Polynom $f_n^b(x)$, siehe (9), gilt die Rekursionsformel:

(57) $$f_{2n}^b(x) = (2 - x^2) \,.\, f_{2n-2}^b(x) - f_{2n-4}^b(x),$$
$$\text{wo} \qquad f_2^b(x) = 1, \qquad f_0^b(x) = 0.$$

Beweis. Benützen wir die durch die Auslassung der Argumente vereinfachte Bezeichnung. Nach dem Lemma 6 gilt:

(a) $$f_m^a = f_{m-2}^a - x^2 \,.\, f_{m-1}^b, \qquad m \geqq 2,$$

(b) $$f_m^b = f_{m-2}^b + f_{m-1}^a, \qquad m \geqq 1,$$

so dass es mit Rücksicht auf (b) gilt:

(c) $$f_{m+1}^b = f_{m-1}^b + f_m^a, \qquad m \geqq 0.$$

Daraus gilt es mit Rücksicht auf (a): $f_{m+1}^b = f_{m-1}^b + f_{m-2}^a - x^2 \,.\, f_{m-1}^b$, oder $f_{m-2}^a = f_{m+1}^b + (x^2 - 1) \,.\, f_{m-1}^b$, $m \geqq 2$, so dass es auch gilt:

(d) $$f_{m-1}^a = f_{m+2}^b + (x^2 - 1) \,.\, f_m^b, \qquad m \geqq 1.$$

Nach dem Einsetzen von (d) in (b) bekommen wir: $f_m^b = f_{m-2}^b + f_{m+2}^b + (x^2 - 1) \,.$ $. f_m^b$. Daraus, nach einer Umformung: $f_{m+2}^b = (2 - x^2) \,. f_m^b - f_{m-2}^b$, $m \geqq 1$, so dass wir nach der Substitution $2n = m + 2$ sofort die zu beweisende Formel erhalten.

Die Gültigkeit der Anfangswerte folgt aus (9).

Satz 38.

Es gilt die Identität:

$$Z_n(x) = f_{2n}^a(x) + f_{2n}^b(x), \qquad n \geqq 0. \tag{58}$$

Beweis. Es gelte für $n \geqq 0$: $K_n(x) = f_{2n}^a(x) + f_{2n}^b(x)$; dann gilt ersichtlich mit Rücksicht auf (16) und (57) die Rekursionsformel: $K_n(x) = (2 - x^2) \,. K_{n-1}(x) - K_{n-2}(x)$, wo $K_0(x) = 1$, $K_1(x) = 2 - x^2$. Aber die Rekursionsformel (48) lautet nach der Substitution $t = 2 - x^2$ mit Rücksicht auf die Bemerkung 30 folgendermassen: $Z_n(x) = (2 - x^2) \,. Z_{n-1}(x) - Z_{n-2}(x)$, wo $Z_0(x) = 1$, $Z_1(x) = 2 - x^2$. Daraus ist sofort ersichtlich, dass $Z_n(x) = K_n(x)$ für $n \geqq 0$. W. z. b. w.

Zum Schluss des Kapitels, in dem wir eine gerade und eine ungerade Komponente der Funktionen $\varphi(x)$, $f_n(x)$ eingeführt haben, führen wir noch zwei hypothetischen Sätze an:

Der hypothetische Satz 1.

Es sei $n = 1 + 3k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Dann ist das Polynom $f_k(-x)$, und gleichzeitig auch das Polynom $f_1((-1)^k \,. x)$ ein Teiler des Polynoms $f_n(x)$.

Der hypothetische Satz 2.

Es sei $n = 2 + 5k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Dann ist das Polynom $f_k(x)$ und gleichzeitig auch das Polynom $f_2((-1)^k \,. x)$ ein Teiler des Polynoms $f_n(x)$.

Unsere letzte Aufgabe bezieht sich auf die Formeln, die im Jahre 1962, aus meiner Arbeit ausgehend, *Dr John Riordan* aus *New York*, Autor der bekannten Bücher über die kombinatorische Analyse, gefunden hat.

Die Riordan-schen Formeln 39.

Es sollen R_k^j Koeffizienten sein. Es sei n ein beliebiger natürlicher Index. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A_n^2 &= R_2^1 \,. \binom{n+1}{2} \\
A_n^2 &= R_3^1 \,. \binom{n+2}{3} + R_3^2 \,. \binom{n+1}{3} \qquad (59) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_n^k &= R_k^1 \,. \binom{n+k+1}{k} + R_k^2 \,. \binom{n+k-2}{k} + \quad + R_k^{k-1} \,. \binom{n+1}{k} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Also hiemit wird eine einfache Beziehung zwischen den Zahlen A_n^k (siehe die Def. I-27 und den binomischen Koeffizienten $\binom{n}{k}$ gefunden.

Das System von Koeffizienten R_k^j erweist sich als ein sehr merkwürdiges: diese natürlichen Zahlen sind in jeder Zeile symmetrisch, d. h. es gilt:

$$R_k^j = R_k^{k-j}; \qquad 1 \leqq j < k; \qquad k = 2, 3, 4, \ldots \tag{60}$$

Siehe auch die Beilage Tafel Nr. 1.

Aus Anlass der Erörterung dieser Koeffizienten hielt es der Obengenannte für zweckmässig für die in einer Spalte vom Koeffizientensystem liegenden Zahlen R_k^j eine erzeugende Funktion zu finden.

Wir wollen also nun diese Aufgabe lösen:

Definition 40. Für die in der k-ten Spalte des Systems (59) liegenden Zahlen R_n^k, bestimmen wir und bezeichnen folgende erzeugende Funktion:

$$\varrho_k(x) = R_{k+1}^k \cdot x + R_{k+2}^k \cdot x^2 + R_{k+3}^k \cdot x^3 + \ldots; \qquad k \geqq 1. \tag{61}$$

Bemerkung 41. Im Einklang mit der experimentellen Festsetzung setzen wir hier voraus, dass die Formeln (59) unabhängig vom Index n gelten, und dass es gilt:

$$R_k^1 = 1; \qquad k = 2, 3, 4, \ldots \tag{62}$$

Weiter, wie bekannt, gilt:

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} \cdot x + \binom{k+1}{k-1} \cdot x^2 + \ldots; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{63}$$

Lemma 42.

Es gelten die Formeln:

$$A_n^0 = 1, \qquad A_n^1 = n, \qquad A_n^2 = \binom{n+1}{2}; \qquad n \geqq 1. \tag{64}$$

Beweis. Wir wissen, dass es für die Elemente der Matrix M gilt: $a_{r,1} = 1$; $r = 1, 2, \ldots n$. Setzen wir voraus dass $i_1 \leqq i_2$ gilt; dann gilt es nach I-(4-a): $a_{r,2} = r$, $r = 1, 2, \ldots, n$. Dann gilt es nach dem Satz I-8:

a) $A_n^1 = n$, $\quad$ *b*) $A_n^2 = 1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2}$. Dabei gilt I-(19).

Satz 43.

Es sei $D_j(F(x))$ die Bezeichnung für die j-te Abgeleitete der Funktion $F(x)$ nach dem Argument x.

Für die sukzessive Zusammenstellung der erzeugenden Funktionen $\varrho_k(x)$, $k = 2, 3, \ldots$, benützt man folgende Rekursionsformel:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{(1-x)^k} + \sum_{j=0}^{k-2} \frac{1}{j!} \cdot D_j(x^k \cdot \varrho_{k-j}(x)), \tag{65}$$

wobei gilt:

$$\varrho_1(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad \varphi_k(x) = \frac{f_{k-1}(-x)}{f_k(x)}. \tag{66}$$

Beweis. Nach I-(27) und nach den vorhergehenden Verhältnissen gilt:

$$\varphi_k(x) = A_k^0 + A_k^1 \,.\, x + A_k^2 \,.\, x^2 + \ldots =$$

$$= 1 + \binom{k}{1} . x + \binom{k+1}{2} . x^2 + \left[\binom{k+2}{3} + R_3^2\binom{k+1}{3}\right] . x^3 +$$

$$+ \left[\binom{k+3}{4} + R_4^2\binom{k+2}{4} + R_4^3\binom{k+1}{4}\right] . x^4 + \ldots +$$

$$+ \left[\binom{k+j-1}{j} + R_j^2\binom{k+j-2}{j} + R_j^3\binom{k+j-3}{j} + \ldots\ldots R_j^{j-1}\binom{k+1}{j}\right] . x^j + \ldots$$

$$\varphi_k(x) = \binom{k-1}{0} + \binom{k}{1} . x + \binom{k+1}{2} . x^2 + \binom{k+2}{3} . x^3 + \ldots +$$

$$+ R_3^2\binom{k+1}{3} . x^3 + R_4^2\binom{k+2}{4} . x^4 + R_5^2\binom{k+3}{5} . x^5 + \ldots +$$

$$+ R_4^3\binom{k+1}{4} . x^4 + R_5^3\binom{k+2}{5} . x^5 + R_6^3\binom{k+3}{6} . x^6 + \ldots +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ R_{k+1}^k\binom{k+1}{k+1} . x^{k+1} + R_{k+2}^k\binom{k+2}{k+2} . x^{k+2} + R_{k+3}^k\binom{k+3}{k+3} . x^{k+3} + \ldots$$

$$\varphi_k(x) = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} . x + \binom{k+1}{k-1} . x^2 + \ldots + \binom{k-1+j}{k-1} . x^j + \ldots +$$

$$+ R_3^2\binom{k+1}{k-2} . x^3 + R_4^2\binom{k+2}{k-2} . x^4 + R_5^2\binom{k+3}{k-2} . x^5 + \ldots +$$

$$+ R_4^3\binom{k+1}{k-3} . x^4 + R_5^3\binom{k+2}{k-3} . x^5 + R_6^3\binom{k+3}{k-3} . x^6 + \ldots +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ R_{k+1}^k\binom{k+1}{0} . x^{k+1} + R_{k+2}^k\binom{k+2}{0} . x^{k+2} + R_{k+3}^k\binom{k+3}{0} . x^{k+3} + \ldots$$

es gilt also:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{(1-x)^k} + \frac{1}{(k-2)!} . D_{k-2}(x^k . \varrho_2(x)) +$$

$$+ \frac{1}{(k-3)!} . D_{k-3}(x^k . \varrho_3(x)) + \ldots + \frac{1}{0!} . D_0(x^k . \varrho_k(x_b)). \quad \text{W. z. b. w.}$$

Tafel Nr. 1.

$n \downarrow$	$k = 1$	2	3	4	5	6	7	8	Σ
1	1								1
2	1	1							2
3	1	3	1						5
4	1	7	7	1					16
5	1	14	31	14	1				61
6	1	26	109	109	26	1			272
7	1	46	334	623	334	46	1		1385
8	1	79	937	2951	2951	937	79	1	7936
9	1	133	2475						
10	1	221	6267						
11	1	364	15393						
12	1	596	36976						
13	1	972	87369						
14	1	1581	203915						

Das Riordan'sche Zahlensystem, oder das System der Zahlen R_n^k

Es gilt wahrscheinlich die Rekursionsformel:

$$R_{n+1}^2 = R_2^n + R_{n-1}^2 + n$$

Illustration des Satzes II-41.
Man soll die Zahl A_3^8 mittels der Matrixzahlen der vierten und der fünften Spalte ausrechnen:

1	3	6	14	31	70	157	353
1	2	5	11	25	56	126	283
1	1	3	6	14	31	70	157

$A_3^8 = 14.31 + 11.25 + 6.14 = 793$

Dabei, nach dem Satz I-8 gilt:

$A_3^8 = 353 + 283 + 157 = 793$

Dabei nach (61) und (62) gilt:

$$\varrho_1(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x}, \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Bemerkung 44. Durch Anwendung des Satzes 43 ist es festgestellt worden:

a) $$\varrho_2(x) = \frac{x}{(1-x)^2 \, . \, (1-x-x^2)},$$

b) $$\varrho_3(x) = \frac{x^1 - x^3 - x^4 - x^5 + x^6}{(1-x)^3 \, . \, (1-x-x^2)^2 \, . \, (1-2x-x^2+x^3)}$$

(der Zähler enthält x^2 nicht).

Man kann voraussetzen, dass als Nenner der Funktion $\varrho_n(x)$ der Ausdruck sein wird:

(67) $$(f_1(x))^n \, . \, (f_2(x))^{n-1} \, \ldots \, . \, (f_n(x))^1$$

Es ist möglich, dass die reglemässige Form der Zähler in den in parzielle Brüche zerlegten Formen existiert.

Es scheint, dass die Riordan-schen Formeln eine spezielle Einteilung der Menge aller oszillierenden Kombinationen (erster Art, k-ter Klasse, aus n Elementen) darstellen: Jede Kombination muss wohl eine gewisse spezifische Eigenschaft haben, die in ihrer Struktur verborgen ist. Auf Grund dessen werden dann die Kombinationen in Untermengen sortiert. Wahrscheinlich wird sich so auch die Symmetrie von Koeffizienten, siehe (60), erklären lassen.

Im Zusammenhang mit dieser Frage kommt es in Erwägung sich mit der Möglichkeit einer Verallgemeinerung des *Terquemschen Problems* zu befassen, und zwar von dem Gesichtspunkt der Restklassen aus. Siehe [3] Paragraph 49.

LITERATUR

[1], [2] Karpe, R.: „Die Kombinationen gegebenen Profils. I, II" Brno, Archivum mathematicum, 1974.

[3] Netto, E.: „Lehrbuch der Combinatorik", Berlin, Leipzig; 1901, 1927.

R. Karpe
602 00 Brno, Gorkého 13
Tschechoslowakei