Ivo Res

Asymptotische Eigenschaften einer perturbierten iterierten Differentialgleichung

Archivum Mathematicum, Vol. 10 (1974), No. 3, 149--157

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104827`

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
X: 149—158, 1974

ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN EINER PERTURBIERTEN ITERIERTEN DIFFERENTIALGLEICHUNG

IVO RES, Brno

(Eingegangen am 17. Dezember 1973)

1. EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit werden wir uns mit den asymptotischen Entwicklungen der Lösungen einer perturbierten iterierten Differentialgleichung beschäftigen. In der Arbeit [5] wurde eine Differentialgleichung folgender Form

$$\{A_{n-1}^{-1}(x) \ldots [A_1^{-1}(x)\, y']' \ldots\}' = A_n(x)\, y \tag{1,1}$$

studiert. Für das Fundamentalsystem der Lösungen $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ und deren Derivation wurden unendliche Funktionsreihen untersucht, die gleichmäßig am Intervall $I = \langle x_0, \infty)$ konvergieren. Ergebnisse dieser vorliegenden Arbeit benutzen wir für die Bestimmung asymptotischer Entwicklungen einer iterierten Differentialgleichung mit Störung.

Wir machen jetzt diese Verabredung:

Ist a eine reelle Zahl so bedeutet das Symbol $\int\limits_{a_i}^{x} A_i(t)\, \mathrm{d}t$

1. das Riemansche Integral für $a_i = a$
2. $\lim\limits_{\tau \to \infty} \int\limits_{\tau}^{x} A_i(t)\, \mathrm{d}t$, für $a_i = \infty$.

Ist kein Mißverständnis zu befürchten, so wollen wir das Argument x weglassen.

2. DEFINITIONEN UND BEZEICHNUNGEN

Definition 2.1. *Es sei die Gleichung*

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k(x)\, y^{(n-k)}(x) = 0, \qquad a_k \in C_0(I), \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2,1}$$

gegeben und es sei

$$u''(x) + \frac{3}{n+1} [a_2(x) - a_1'(x) - a_1^2(x)]\, u(x) = 0, \tag{2,2}$$

die, die Gleichung (2,1) *eine begleitende Gleichung ist.*

Ist $a_k \in C_{n-k}(I)$ $k = 1, 2,$ *so nennt man die Gleichung*

(2,3)
$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f_k^n(a_1, a_2)\, y^{(n-k)}(x) = 0,$$

die iterierte Gleichung, wo $f_k^n(a_1, a_2)$ *das iterierte Polynom der Elemente* a_1, a_2 *der Dimension* k *darstellt.*
Setzt man

$$I_n(y; a_1, a_2) = y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f_k^n(a_1, a_2)\, y^{(n-k)}(x),$$

so läßt sich die iterierte Gleichung (2, 3) *in der Form*

$$I_n(y; a_1, a_2) = 0$$

schreiben.

Die Gleichung

(2,4)
$$I_n(y, a_1, a_2) + \omega_n(x)\, y(x) = 0$$

nennen wir die perturbierte iterierte Gleichung, s. [3].

Definition 2.2. *Wenn* $A \in C_0$ *ist und wenn jede nichttriviale Lösung der Gleichung* $y'' = A(x)\, y$ *nur endlichviele Nullstellen in* I *hat, so nennen wir die Gleichung* $y'' = A(x)\, y$ *nichtoscillatorisch, s.* [1].

Definition 2.3. *Es sei* v *eine Lösung der nichtoscillatorischen Gleichung* $y'' = A(x)\, y$. *Wir sagen, daß* v *eine Hauptlösung ist, wenn es eine Zahl* $b \geqq x_0$ *gibt mit der Eigenschaft, daß* $v(x) \neq 0$ *für jedes* $x \geqq b$ *ist und daß das Integral* $\int_b^\infty v^{-2}$ *divergiert, s.* [1].

Definition 2.4. *Bezeichnen wir* $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ *und definieren Differentialoperatoren*

(2,5)
$$L_s = A_s^{-1}(x)\, \mathrm{D} \ldots \mathrm{D} A_1^{-1}(x)\, \mathrm{D}, \qquad \text{für } s = 1, 2, \ldots, n$$

(2,6)
$$L_n = \mathrm{D} L_{n-1}.$$

Definition 2.5. *Es sei* $f(x) \in C_0(I)$. *Bezeichnen wir mit* $Q_j, j = 1, 2, \ldots, n$ *das Integraloperator das durch die Beziehung*

(2,7)
$$Q_j(f) = \int_{a_j}^{x} A_j(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

gegeben ist.

Unter dem Produkt der Operatoren $Q_j Q_k$ *für* $j, k = 1, 2, \ldots, n$ *verstehen wir den durch die Beziehung*

(2,8)
$$Q_j Q_k(f) = \int_{a_j}^{x} A_j(t) \int_{a_k}^{t} A_k(s)\, f(s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t$$

definierten Operator.

Definition 2.6. *Es sei $a \in I$ und man lege $a_i = \infty$, für $i = 1, 2, \ldots, n$. Definieren wir die Operatoren H_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ durch die Beziehung*

$$H_j(f) = Q_j Q_{j+1} \cdots Q_n Q_{n+1} \cdots Q_{n+j-1}(f), \tag{2,9}$$

wobei wir $Q_{n+i} = Q_i$ legen.

Weiter legen wir

$$H_j^0(f) = f, \qquad H_j^i(f) = H_j H_j^{i-1}(f) \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{2,10}$$

Definition 2.7. *Es sei j, k natürliche Zahlen $1 \leqq j,\ k \leqq n$. Definieren wir*

$$\begin{aligned} h_{j,j}(x) &= 1 \\ h_{j,k}(x) &= Q_j Q_{j+1} \ldots Q_{k-1}(1), \text{für } j < k \\ h_{j,k}(x) &= Q_j Q_{j+1} \cdots Q_n Q_{n+1} \cdots Q_{n+k-1}(1), \quad \text{für } j > k \end{aligned} \tag{2,11}$$

wo wir wieder $Q_{n+i} = Q_i$ legen.

Definition 2.8. *Es sei $f(x) \in C_0(I)$ und bezetchnen wir q_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ den Integral-operator, der durch die Beziehung*

$$q_j(f) = \int_{a_j}^{x} | A_j(t) | f(t) \, \mathrm{d}t \tag{2,12}$$

definiert ist. Unter einem Produkt der Operatoren $q_j q_k$, $1 \leqq j, k \leqq n$, verstehen wir den Operator

$$q_j q_k(f) = \int_{a_j}^{x} | A_j(t) | \int_{a_k}^{t} | A_k(s) | f(s) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t. \tag{2,13}$$

Definition 2.9. *Es sei j eine natürliche Zahl $1 \leqq j \leqq n$. Definieren wir die Funktionen*

$$\gamma_j(x) = q_j q_{j+1} \cdots q_n q_{n+1} \cdots q_{n+j-1}(1) \tag{2,14}$$

mit $q_{n+i} = q_i$.

Definition 2.10. *Es seien j, k natürlichen Zahlen $1 \leqq j,\ k \leqq n$. Definieren wir die Funktionen $\varkappa_{j,k}$ durch die Beziehung*

$$\begin{aligned} \varkappa_{j,j}(x) &= 1 \\ \varkappa_{j,k}(x) &= q_j q_{j+1} \cdots q_{k-1}(1), \qquad \text{für } j < k \\ \varkappa_{j,k}(x) &= q_j q_{j+1} \cdots q_n q_{n+1} \cdots q_{n+k-1}(1), \qquad \text{für } j > k. \end{aligned} \tag{2,15}$$

Definition 2.11. *Durch ein Symbol $A = \sum_{i=0}^{s} a_i(x) \, \mathrm{D}^i$, wo $a_i \in C_0(I)$, $\mathrm{D}^i = \dfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}$, D^0 ein identischer Operator ist, bezeichnen wir den linearen Differentialoperator. Dann* *definieren wir den Produkt von Differentialoperatoren* $A \,.\, B$, *wo* $B = \sum_{k=0}^{q} b_k(x)\, \mathrm{D}^k$, $b_k \in C_s(I)$

$$A \,.\, B = \sum_{j=0}^{s+q} c_j(x)\, \mathrm{D}^j, \qquad wo \qquad c_j = \sum_{k=\max(0,\,j-s)}^{\min(q,\,j)} \sum_{i=j-k}^{s} \binom{i}{j-k} a_i b_k^{(i+k-j)}$$

für $j = 0, 1, \ldots, s + q$ *ist. Siehe* [4].

3. TRANSFORMATION DER PERTURBIERTEN ITERIERTEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Satz 3.1. *Es sei die Differentialgleichung* (2,4) *gegeben. Durch die Transformation*

$$y(x) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t\right\} u^{n-1}(x)\, z(x) \tag{3,1}$$

kann die Gleichung (2,4) *in der Gestalt*

$$[\mathrm{D}(u^2\mathrm{D})^{n-1} + u^{2(n-1)}\omega_n]\, z = 0 \tag{3,2}$$

dargestellt werden, wobei $u \neq 0$, $u \in C_n(I)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (2,2) *ist.*

Beweis. In der Arbeit [3] wurde nachgewiesen, daß

$$u^{2n} I_n(y;\, a_1, a_2) = [u^2\, \mathrm{D} + a_1 u^2 - (n-1)\, uu']^n\, y \tag{3,3}$$

gilt, wo u eine Lösung der Gleichung (2,2) darstellt. Bezeichnen wir $\alpha(x) = \exp\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t\}$. Wir beweisen leicht

$$\alpha^{-1}u^{1-n}[u^2\,\mathrm{D} + a_1 u^2 - (n-1)\, uu'\,\mathrm{D}^0] = (u^2\mathrm{D})\, \alpha^{-1}u^{1-n}\, \mathrm{D}^0. \tag{3,4}$$

Wirklich

$$(u^2\mathrm{D})\,\alpha^{-1}u^{1-n}\mathrm{D}^0 = u^2\left[\frac{\alpha'}{\alpha}u^{1-n} + \alpha^{-1}(1-n)\,u^{-n}u'\mathrm{D}^0\right] + \alpha^{-1}u^{1-n}u^2\mathrm{D} =$$
$$= \alpha^{-1}u^{1-n}\left[u^2\mathrm{D} - \frac{\alpha'}{\alpha}u^2 + (1-n)\,uu'\mathrm{D}^0\right].$$

Durch die Methode einer vollständigen Induktion beweisen wir

$$\alpha^{-1}u^{1-n}[u^2\,\mathrm{D} + a_1 u^2 - (n-1)\, uu'\,\mathrm{D}^0]^k = (u^2\,\mathrm{D})^k\, \alpha^{-1}u^{1-n}\, \mathrm{D}^0. \tag{3,5}$$

Für $k = 1$ ist Beweis identisch mit (3,4). Es gilt also (3,5). Dann

$$\alpha^{-1}u^{1-n}[u^2\,\mathrm{D} + a_1 u^2 - (n-1)\, uu'\,\mathrm{D}^0]^{k+1} =$$
$$= (u^2\,\mathrm{D})^k\, \alpha^{-1}u^{1-n}\, \mathrm{D}^0[u^2\,\mathrm{D} + a_1 u^2 - (n-1)\, uu'\,\mathrm{D}^0].$$

Nach (3,4) ist jedoch

$$\alpha^{-1}u^{1-n}[u^2\,\mathrm{D} + a_1u^2 - (n-1)\,uu'\,\mathrm{D}^0]^{k+1} =$$
$$= (u^2\,\mathrm{D})^k\,(u^2\,\mathrm{D})\,\alpha^{-1}u^{1-n}\,\mathrm{D}^0 = (u^2\,\mathrm{D})^{k+1}\,\alpha^{-1}u^{1-n}\,\mathrm{D}^0.$$

Es gilt also

$$\alpha^{-1}u^{1-n}[u^2\,\mathrm{D} + a_1u^2 - (n-1)\,uu'\,\mathrm{D}^0]^n = (u^2\,\mathrm{D})^n\,\alpha^{-1}u^{1-n}\,\mathrm{D}^0.$$

Die Beziehung (3,3) kann man also in der Form

$$\alpha^{-1}u^{n+1}I_n(y;\,a_1a_2) = (u^2\,\mathrm{D})^n\,\alpha^{-1}u^{1-n}y \tag{3,6}$$

schreiben. Multiplizieren wir die Gleichung (2,4) durch die Funktion u^{n+1}. Wir erhalten die Gleichung

$$\alpha^{-1}u^{n+1}I_n(y;\,a_1,\,a_2) + \alpha^{-1}u^{n+1}\omega_n y = 0.$$

Nach (3.6) ist

$$(u^2\,\mathrm{D})^n\,\alpha^{-1}u^{1-n}y + \alpha^{-1}u^{n+1}\omega_n y = 0.$$

Dividieren wir die letzte Gleichung durch u^2. Wir bekommen die Gleichung

$$\mathrm{D}(u^2\,\mathrm{D})^{n-1}\,\alpha^{-1}u^{1-n}y + \alpha^{-1}u^{n-1}\omega_n y = 0,$$

die nach Transformation (3,1) der Gestalt ist.

Bemerkung 3.2. *Habe die nichtoscillatorische Differentialgleichung*

$$z''(x) + B_1(x)\,z'(x) + B_2(x)\,z(x) = 0$$

hat sie ein Fundamentalsystem z_1, z_2. Dann kann man die Differentialgleichung

$$y'''(x) + B_1(x)\,y''(x) + B_2(x)\,y'(x) + B_3(x)\,y(x) = 0$$

in einer Gestalt

$$\mathrm{D}A_2^{-1}(x)\,\mathrm{D}A_1^{-1}(x)\,\mathrm{D}y = A_3(x)\,y,$$

ausdrücken, wo $A_1 = z_1$, $A_2 = \exp\{-B_1\}\,z_1^{-2}$, $A_3 = -B_3z_1\exp\{B_1\}$.

4. ASYMPTOTISCHEN EIGENSCHAFTEN EINER PERTURBIERTEN ITERIERTEN DIFFERENTIALGLEICHUNG

Satz 4.1. *Es seien $A_i(x) \in C_{n-i}(I)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $A_i^{-1}(x) = \dfrac{1}{A_i(x)}$, $A_i^{-1}(x) > 0$, für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Es gelte*

$$\int_{x_0}^{\infty} A_i(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \qquad \text{für} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{4,1}$$

$$(4,2) \qquad \int_{x_0}^{\infty} |A_n(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Dann hat die Differentialgleichung (1,1) *das Fundamentalsystem der Lösungen*

$$(4,3) \qquad y_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} H_1^i(h_{1,k})$$

und ferner es gilt

$$(4,4) \qquad L_s y_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} H_{s+1}^i(h_{s+1,k}),$$

wo der Operator L_s *durch* (2,5) *definiert ist, mit* $L_0 y_k(x) = y_k(x)$ *und die Formeln* (2,9), (2,10) *und* (2,11) *gelten mit* $a_i = \infty$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *und für alle* $x \in I$

$$(4,5) \qquad \left| L_s y_k(x) - \sum_{i=0}^{n} H_{s+1}^i(h_{s+1,k}) \right| < \varkappa_{s+1,k}(x) \frac{\gamma_{s+1}^{n+1}(x)}{(n+1)!} \exp\{\gamma_{s+1}(x)\},$$

$s = 0, 1, \ldots, n-1, k = 1, 2, \ldots, n$ *gilt.*

Ein Beweis dieses Satzes ist in der Arbeit [5] durchgeführt und wir werden ihn deshalb nicht aufführen.

Nehmen wir an im folgenden, daß die Differentialgleichung (2,2) nichtoscillatorisch ist, und daß $u(x)$ ihre Lösung hat, die keine Hauptlösung ist. Vergleichen wir die Gleichungen (3,2) und (1,1) miteinander, ermitteln wir, daß folgende Beziehungen

$$(4,6) \qquad A_i^{-1}(x) = u^2(x), \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$(4,7) \qquad A_n(x) = -\omega_n(x)\, u^{2(n-1)}(x)$$

gelten. Die Voraussetzungen von Satz 4.1 können also folgendermaßen geschrieben werden

$$(4,8) \qquad \int_{x_0}^{\infty} u^{-2}(x)\,\mathrm{d}x < \infty,$$

$$(4,9) \qquad \int_{x_0}^{\infty} |\omega_n(x)|\, u^{2(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Die Voraussetzung (4,8) ist aber automatisch erfüllt, wenn $u(x)$ keine Hauptlösung der Gleichung (2,2) ist.

Satz 4.2. *Die Differentialgleichung* (2,2) *sei nichtoscillatorisch,* $u(x)$ *ist ihre Lösung, die keine Hauptlösung ist. Es sei* $\omega_n(x) \in C_0(I)$ *und es gelte* (4.9). *Dann ist das Fundamentalsystem der Lösungen der Gleichung* (2,4) *durch die Reihen*

$$(4,10) \qquad y_k(x) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t\right\} u^{n-1}(x) \sum_{i=0}^{\infty} H_1^i(h_{1,k})$$

gegeben und es gilt ferner

$$(4,11) \qquad [u^2(x)\,\mathrm{D} + a_1(x)\,u^2(x) - (n-1)\,u(x)\,u'(x)\,\mathrm{D}^0]\,y_k(x) =$$

$$= \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t\right\} u^{n-1}(x) \sum_{i=0}^{\infty} H^i_{s+1}(h_{s+1,k}),$$

für $s = 1, 2, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *wobei die Operatoren* H_i *und Funktionen* $h_{j,k}$ *ebenso wie in Satz* 4.1. *definiert sind, wo man die Beziehungen* (4,6) *und* (4,7) *einsetzen soll.*

Beweis. Nach Satz 4.1 hat die Gleichung (3,2) ein Fundamentalsystem der Lösungen

$$z_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i_1(h_{1,k})$$

und es gilt

$$L_s z_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i_{s+1}(h_{s+1,k}),$$

für $s = 1, 2, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Die Formeln (4,10) erhalten wir unmittelbar aus (3,1). Bezeichnen wir $\alpha(x) = \exp\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t\}$. Dann ist

$$L_s z_k(x) = L_s u^{1-n}(x)\alpha^{-1}(x)\,y_k(x) = [u^2(x)\,\mathrm{D}]^s\,u^{1-n}(x)\,\alpha^{-1}(x)\,y_k(x).$$

Nach (3,4) können wir schreiben

$$L_s z_k(x) = \alpha^{-1}(x)\,u^{1-n}(x)[u^2(x)\,\mathrm{D} + a_1(x)\,u^2(x) - (n-1)\,u(x)\,u'(x)\,\mathrm{D}^0]^s\,y_k(x).$$

Es gilt also

$$\alpha^{-1}(x)\,u^{1-n}(x)[u^2(x)\,\mathrm{D} + a_1(x)\,u^2(x) - (n-1)\,u(x)\,u'(x)\,\mathrm{D}^0]^s\,y_k(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} H^i_{s+1}(h_{s+1,k})$$

und daraus erhalten wir leicht (4,11).

Satz 4.3. *Es seien die Voraussetzungen aus Satz* 4.2 *erfüllt. Dann gilt für* $x \in I$

$$(4,12) \qquad |\,y_k(x) - \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t\right\} u^{n-1}(x) \sum_{i=0}^{p} H^i_1(h_{1,k})\,| <$$

$$< \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t\right\} |\,u^{n-1}(x)\,|\,\varkappa_{1,k}(x)\,\frac{\gamma_1^{p+1}(x)}{(p+1)!}\exp\{\gamma_1(x)\},$$

$$(4.13) \qquad | [u^2(x)\,\mathrm{D} + a_1(x)\,u^2(x) - (n-1)\,u(x)\,u'(x)\,\mathrm{D}^0]^s\, y_k(x) -$$

$$- \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t\right\} u^{n-1}(x) \sum_{i=0}^{p} H^i_{s+1}(h_{s+1,k})\,| <$$

$$< \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t\right\} |\,u^{n-1}(x)\,|\,\varkappa_{s+1}(x)\,\frac{\gamma^{p+1}_{s+1}(x)}{(p+1)!}\exp\{\gamma_{s+1}(x)\}$$

für $k = 1, 2, \ldots, n$, $s = 1, 2, \ldots, n-1$.

Der Beweis folgt aus dem Satz 4.1 aus (4,10) und (4,11).

Bemerkung 4.4. *Durch die Wahl der Funktionen* a_1, a_2 *in der Gleichung* (2, 2) *können wir leicht asymptotische Formeln für die Lösungen der Gleichung* (2,4) *ableiten. Als Illustration führen wir dieses Beispiel.*

Beispiel. Es sei in der Gleichung (2,2) $a_1 = 0$, $a_2 = -K^2$, $K =$ konst. > 0. Es gelte

$$\int_{x_0}^{\infty} |\,\omega_n(x)\,|\exp\left\{2(n-1)\sqrt{\frac{3}{n+1}}\,Kx\right\}\mathrm{d}x < \infty.$$

Dann hat die Differentialgleichung

$$I_n(y; 0, -K^2) + \omega_n(x)\,y = 0$$

ein Fundamentalsystem

$$y_k = \exp\left\{(n-1)\sqrt{\frac{3}{n+1}}\,Kx\right\}\sum_{i=0}^{\infty} H^i_1(h_{1,k})$$

und es gilt

$$\left[\exp\left\{2\sqrt{\frac{3}{n+1}}\,Kx\right\}\mathrm{D} - (n-1)\sqrt{\frac{3}{n+1}}\,K\exp\left\{2\sqrt{\frac{3}{n+1}}\,Kx\right\}\right]^s y_k =$$

$$= \exp\left\{(n-1)\sqrt{\frac{3}{n+1}}\,Kx\right\}\sum_{i=0}^{\infty} H^i_{s+1}(h_{s+1,k}),$$

für $s = 1, 2, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

LITERATUR

[1] Mařík, J.—Ráb, M.: *Asymptotische Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung* $y'' = Ay$ *im nichtoscillatorischen Fall,* Czech. Math. J., T. 10 (85) (1960), 501—522.

[2] Ráb, M.: *Asymptotische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung* $y'' + Ay = 0$, Czech. Math. J., T. 8 (83), (1959).

[3] Hustý, Z.: *Die Iteration homogener linearer Differentialgleichungen*, Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno, No. 449, 1964.
[4] Suchomel, J.: *Reducibilita lineárních homogenních diferenciálních rovnic*, Kandidátská disertační práce, UJEP Brno, 1969.
[5] Res, I.: *Asymptotické vlastnosti řešení diferenciální rovnice* $\{A_{n-1}^{-1}(x) \ldots [A_1^{-1}(x)\, y'] \ldots\}' = A_n(x)\, y$, im Druck.

Ivo Res
662 66 Brno, Zemědělská 3
Czechoslovakia