Archivum Mathematicum

Drumi Dimitrov Bajnov; Svetla Dimitrova Milusheva

О применении метода усреднения к одной двухточечной краевой задаче для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерры не разрешенных относительно производной

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 4, 161--171

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104774`

Terms of use:

© Masaryk University, 1972

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

ARCH. MATH., SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS, 4,
VIII: 161 — 171, 1972

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К ОДНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРЫ НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Д. Д. Байнов С. Д. Милушева
(Поступило в редакцию 28-ого августа 1972 г.)

В настоящей работе рассматривается вариант метода усреднения для решения нелинейной двухточечной краевой задачи для систем интегродифференциальных уравнений, при котором усредненной системы уравнений является система интегро-дифференциальных уравнений.

Отметим, что метод усреднения для задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений не разрешенных относительно производной был обоснован в [I].

Пусть для системы

$$(1)\qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varepsilon X(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\, ds), \\ \dot{y}(t) &= Y(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \int_0^t \varphi_1(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\, ds), \end{aligned} \qquad t \geqq 0$$

где

$$x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}),\ y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}),\ X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}),$$
$$Y = (Y^{(1)}, \ldots, Y^{(m)}),\ \varphi = (\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(q)}),\ \varphi_1 = (\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(q)}),$$

а $\varepsilon > 0$ — малый параметр, задано краевое условие

$$(2)\qquad \begin{gathered} x(0) = x^\circ, \qquad R[\lambda, y(0), \quad y(T)] = 0, \\ \lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}), \qquad R = (R^{(1)}, \ldots, R^{(m)}), \qquad \lambda \in \Lambda \subset Em. \\ T = L\varepsilon^{-1}, \qquad L = \text{const.} > 0 \end{gathered}$$

Наряду с системой (I) рассмотрим систему

$$(3)\qquad \begin{gathered} x\,\text{const.}, \qquad \dot{x} = \text{const.}, \\ \dot{y}(t) = Y(t, x, y(t), \dot{x}, \dot{y}(t), \int_0^t \varphi_1(t, s, x, y(s), \dot{x}, \dot{y}(s))\, ds). \end{gathered}$$

Систему уравнений (3) будем называть почти вырожденной по отношению к системе (I). Для системы (3) ставим краевую задачу

$$(4)\qquad R[\lambda, y(0), y(T)] = 0$$

Пусть вдоль интегральных кривых $y = \psi(t, x, \dot{x}, \lambda, T)$ краевой задачи (3), (4), где λ рассматривается как векторный параметр, существуют независящие от параметра λ средние значения

$$(5)\quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X\left(t, x, \psi(t, x, \dot{x}, \lambda, T), \dot{x}, \frac{\partial}{\partial t}\psi(t, x, \dot{x}, \lambda, T), z\right) \mathrm{d}t = \bar{X}(x, \dot{x}, z),$$

$$(6)\quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \varphi\left(t, s, x, \psi(s, x, \dot{x}, \lambda, T), \dot{x}, \frac{\partial}{\partial s}\psi(s, x, \dot{x}, \lambda, T)\right) \mathrm{d}t = \bar{\varphi}(s, x, \dot{x}).$$

Тогда усредненным уравнением первого приближения для медленных переменных $x(t)$ системы (1) назовем уравнение

$$(7)\quad \dot{\xi}(t) = \varepsilon\bar{X}\left(\xi(t), \dot{\xi}(t), \int_0^t \bar{\varphi}(s, \xi(s), \dot{\xi}(s))\,\mathrm{d}s\right)$$

с начальным условием

$$\xi(0) = x^{\circ}.$$

Отметим, что если $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ и $A = (a_{ij})_{m,n}$, то по определению

$$\| x \| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x^{(i)})^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \| A \| = \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Докажем теорему о близости компонентов $x(t)$ решения $\{x(t), y(t)\}$ краевой задачи (3), (4) и решения задачи Коши (7), (8).

теорема 1. Пусть:

1. Функции $\varphi(t, s, x, y, u, v)$ и $\varphi_1(t, s, x, y, u, v)$ определены, непрерывны и равномерно ограничены вместе со своими частными производными по t для всех $t \geqq 0$, $s \geqq 0$ и $(x, y, u, v) \in G$, где G некоторая открытая область $2(n + m)$ — мерного пространства переменных x, y, u и v.

Функция $X(t, x, y, u, v, z)$ определена, непрерывна и равномерно ограничена вместе со своими частными производными первого порядка для всех $t \geqq 0$ и $(x, y, u, v, z) \in G \times G_1$, где G_1 некоторая открытая область пространства R_q.

Функция $Y(t, x, y, u, v, w)$ определена, непрерывна и равномерно ограничена вместе со своими частными производными первого порядка для всех $t \geqq 0$ и $(x, y, u, v, w) \in G \times G_2$, где G_2 некоторая открытая область пространства $R\tau$.

2. В области $G^* = \{t \geqq 0, s \geqq 0, G\}$ для функции $\varphi(t, s, x, y, u, v)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$ выполнены неравенства

$$\| \varphi(t, s, x, y, u, v) - \varphi(t, s, x', y, u', v) \| \leqq \sigma_1(t, s)\left[\| x - x' \| + \| u - u' \|\right],$$

выполнены неравенства

$$\left\| \int_0^t \frac{\partial t}{\partial} \varphi(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leqq \text{const.},$$

$$\left\| \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leqq \text{const.}.$$

Для функции $\sigma_1(t, s)$ предположим, что удовлетворяет условию

$$\int_0^t \sigma_1(t, s)\,\mathrm{d}s \leqq c_1 = \text{const.}.$$

3. Существуют равномерно ограниченные в соответствующих проекциях области $G^* \times G_1 \times G_2$ обратные матрицы

$$\left(I_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial u}\right)^{-1}, \quad \left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)^{-1} \quad \text{и} \quad \left[I_2 - \frac{\partial Y}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial u}\left(I_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial u}\right)^{-1} \frac{\partial X}{\partial v}\right]^{-1}.$$

Здесь I_1 и I_2 соответственно n и m — мерные единичные матрицы.

4. Через каждую точку области $G^*(t, x, y, u)$ ($G^*(t, x, y, u)$ — проекция области G^* в подпространстве переменных t, x, y, u). проходит единственная интегральная кривая краевой задачи

$$x = \text{const.}, \qquad \dot{x} = \text{const.},$$

$$\text{(9)} \qquad \dot{y}(t) = Y(t, x, y(t), \dot{x}, \dot{y}(t), \int_0^t \varphi_1(t, s, x, y(s), \dot{x}, \dot{y}(s))\,\mathrm{d}s),$$

$$\text{(10)} \qquad R[\lambda, y(0), y(T)] = 0,$$

соответствующая некоторому значению параметра λ, причем это решение определено для всех значений $t \geqq 0$ и при этих значениях целиком лежит в $G(x, y, u)$, а для значений $t \leqq 0$ любая из этих интегральных кривых может быть продолжена до границы области $G(x, y, u)$, или целиком лежит в $G(x, y, u)$ при $-\infty < t \leqq 0$.

Пусть указанные решения краевой задачи (9), (10) задаются в форме

$$\text{(11)} \qquad y = \psi(t, x, \dot{x}, \lambda, T), \qquad x = \text{const.}, \qquad \dot{x} = \text{const.},$$

где ψ — m — мерная векторная функция.

5. Для всех $(x, u, z, \lambda) \in G(x, u) \times G_1 \times \Lambda$ и $(s, x, u, \lambda) \in G^*(s, x, u) \times \Lambda$ существуют независящие от параметра λ пределы

$$\text{(12)} \qquad \bar{X}(x, u, z) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \psi(t, x, u, \lambda, T), u \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, u, \lambda, T), z)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{(13)} \qquad \bar{\varphi}(s, x, u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t, s, x, \psi(s, x, u, \lambda, T), u, \frac{\partial}{\partial s} \psi(s, x, u, \lambda, T))\,\mathrm{d}t$$

причем предельные переходы в (12) и (13) происходят равномерно относительно совокупности $(x, u, z, \lambda) \in G(x, u) \times G_1 \times \Lambda$ и $(s, x, u, \lambda) \in G^*(s, x, u) \times \Lambda$. Средние значения $\bar{X}(x, u, z)$, $\bar{\varphi}(s, x, u)$ определены, непрерывны и равномерно ограничены для всех $(x, u, z) \in G(x, u) \times G_1$ и $(s, x, u) \in G^*(s, x, u)$ и в областях $G(x, u) \times G_1$ и $G^*(s, x, u)$ удовлетворяют условиям:

$$\| \bar{X}(x, u, z) - \bar{X}(x', u', z') \| \leqq c\,[\| x - x' \| + \| u - u' \| + \| z - z' \|],$$

для всех $(x, u) \in G(x, u)$ вектор-функция

$$\int_0^t \bar{\varphi}(s, x(s), \dot{x}(s))\,\mathrm{d}s$$

принадлежит области G_1,

$$\| \bar{\varphi}(s, x, u) \| \leqq \Theta(s),$$

$$\| \varphi(t, s, x, y, u, v) - \bar{\varphi}(s, x, u) \| \leqq \sigma_2(t, s),$$

где c — положительная постоянная, а функция $\Theta(s)$ и $\sigma_2(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\varepsilon \int_0^\tau \Theta(s)\,\mathrm{d}s \to 0, \qquad \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \sigma_2(\tau, s)\,\mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

6. Краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $\{x(t),\ y(t)\}$ удовлетворяющее условиям

$$x(0) = x^\circ, \qquad R[\lambda, y(0), y(T)] = 0, \tag{14}$$

где под λ подразумевается некоторое фиксированное значение параметра λ. Решение $\{x(t), y(t)\}$ определено на интервале $[0, T]$ при всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и на этом интервале не выходит из некоторой открытой подобласти $G^0 \subset G(x, y)$, лежащей целиком внутри $G(x, y)$ вместе со своей границей.

7. Решение усредненного уравнения

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \bar{X}(\xi(t), \dot{\xi}(t), \int_0^t \bar{\varphi}(s, \xi(s), \dot{\xi}(s))\,\mathrm{d}s), \tag{15}$$

удовлетворяющее начальному условию $\xi(0) = x^0$ существует, однозначно определено при $t \in [0, \infty)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и кривая $\{\xi(t),\ \dot{\xi}(t)\}$, соответствующая этому решению, на интервале $0 \leqq t < \infty$ не выходит из области $G(x, u)$.

8. Уравнение в частных производных

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y} Y + \frac{\partial W}{\partial v}\left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial v}\right)^{-1} \left[\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y} Y + \frac{\partial Y}{\partial w}\left(\varphi_1 + \int_0^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}s\right)\right] =$$

$$= X(t, x, y, u, v, z) - \bar{X}(x, u, z),$$

$$W|_{t=0} = 0, \qquad x = \text{const.}, \qquad u = \text{const.},$$

обладает некоторым решением $W = W(t, x, y, u, v)$, которое определено и равномерно ограничено вместе со своими частными производными первого порядка во всей области $G^*(t, x, y, u, v) \times G_1 \times G_2$.

Тогда если $\{x(t),\ y(t)\}$ решение краевой задачи (1), (2) а $\xi(t)$ — решение усредненного уравнения (7) с начальным условием $\xi(0) = x^0$, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ можно указать такое ε^0, что при $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon^0$ на интервале $0 \leqq t \leqq T$ будет выполняться неравенство

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \delta.$$

Доказательство. Обозначим через $\eta(t)$ выражение

$$\eta(t) = x(t) - \varepsilon W(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)), \tag{16}$$

где $\{x(t),\ y(t)\}$ — решение краеовй задачи (1), (2).

Оценим разность $\| \dot{\eta}(t) - \zeta(t) \|$, где $\dot{\zeta}(t)$ решение задачи (7), (8).

Имеем

$$\dot\eta(t) - \dot\xi(t) = \dot x(t) - \varepsilon\left\{\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x}\dot x(t) + \frac{\partial W}{\partial y}\dot y(t) + \frac{\partial W}{\partial \dot x}\ddot x(t) + \right.$$

(17)

$$\left. + \frac{\partial W}{\partial \dot y}\ddot y(t) + \bar X(\xi(t), \dot\xi(t), \zeta(t))\right\},$$

где

$$\zeta(t) = \int_0^t \bar\varphi(s, \xi(s), \dot\xi(s))\, \mathrm{d}s.$$

Дифференцируя систему (1), для $\ddot x(t)$ и $\ddot y(t)$ получаем систему уравнений

$$\left(I_1 - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot x}\right)\ddot x(t) - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot y}\ddot x(t) = \varepsilon\left\{\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y}Y + \right.$$

$$+ \frac{\partial X}{\partial z}\left[\varphi(t, t, x(t), y(t), \dot x(t), \dot y(t)) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, s, x(s), y(s), \dot x(s), \dot y\,(s))\mathrm{d}s\right[\Big\} +$$

$$+ \varepsilon^2\frac{\partial X}{\partial x}X(t, x(t), y(t), \dot x(t), \dot y(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s), \dot x(s), \dot y(s))\,\mathrm{d}s)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \dot x}\ddot x(t) + \left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial \dot y}\right)\ddot y(t) = \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y}Y +$$

$$+ \frac{\partial Y}{\partial w}\left[\varphi_1(t, t, x(t), y(t), \dot x(t), \dot y(t)) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t, s, x(s), y(s), \dot x(s), \dot y(s))\,\mathrm{d}s\right] +$$

$$+ \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial x}X(t, x(t), y(t), \dot x(t), \dot y(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s), \dot x(s), \dot y(s))\,\mathrm{d}s).$$

Решение этой системы, ввиду того, что матрица

$$\left[I_2 - \frac{\partial Y}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial \dot x}\left(I_1 - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot x}\right)^{-1}\frac{\partial X}{\partial \dot y}\right]^{-1}$$

имеет асимптотическое представление

$$\left[I_2 - \frac{\partial Y}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial \dot x}\left(I_1 - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot x}\right)^{-1}\frac{\partial X}{\partial \dot y}\right]^{-1} = \left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)^{-1} + 0(\varepsilon)$$

можно записать в виде

$$\ddot x = \varepsilon P,$$

(18)

$$\ddot y = \left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)^{-1}\left[\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y}Y + \frac{\partial Y}{\partial w}\left(\varphi_1 + \int_0^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\mathrm{d}s\right)\right] + \varepsilon Q,$$

где

$$P = P(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \left(I_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)^{-1} \left\{ I_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial \dot{y}} \left[I_2 - \frac{\partial Y}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial \dot{x}} \left(I_1 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)^{-1} \frac{\partial X}{\partial \dot{y}} \right]^{-1} \times$$

$$\left. \cdot \frac{\partial Y}{\partial \dot{x}} \left(I_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial \dot{x}} \right)^{-1} \right\} \left[\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y} Y + \frac{\partial X}{\partial z} \left(\varphi + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, \mathrm{d}s \right) + \varepsilon \frac{\partial X}{\partial x} X \right] +$$

$$+ \left(I_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial \dot{x}} \right)^{-1} \frac{\partial X}{\partial \dot{y}} \left[I_2 - \frac{\partial Y}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial \dot{x}} \left(I_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial \dot{x}} \right)^{-1} \frac{\partial X}{\partial \dot{y}} \right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y} Y + \frac{\partial Y}{\partial w} \left(\varphi_1 + \int_0^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \, \mathrm{d}s \right) + \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial x} X \right],$$

$$Q = Q(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^{-1} \left\{ \frac{\partial Y}{\partial \dot{x}} X - \frac{\partial Y}{\partial \dot{x}} \left(I_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial \dot{x}} \right)^{-1} \times \right.$$

$$\left. \left[\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y} Y + \frac{\partial X}{\partial z} \left(\varphi + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, \mathrm{d}s \right) + \varepsilon \frac{\partial X}{\partial x} X \right] \right\} + \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y} Y + \right.$$

$$+ \frac{\partial Y}{\partial w} \left(\varphi_1 + \int_0^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \, \mathrm{d}s \right) + \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial x} X - \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial \dot{x}} \left(I_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial \dot{x}} \right)^{-1} \left[\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y} Y + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial X}{\partial z} \left(\varphi + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, \mathrm{d}s \right) + \varepsilon \frac{\partial X}{\partial x} X \right] \right\}.$$

Подставляя (18) в (17) получаем

$$\dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) = -\varepsilon \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y} Y + \frac{\partial W}{\partial \dot{y}} \left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial \dot{y}} \right)^{-1} \left[\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y} Y + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial Y}{\partial w} \left(\varphi_1 + \int_0^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \, \mathrm{d}s \right) \right] - X(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, z) + \bar{X}(x, \dot{x}, z) \right\} +$$

$$+ \varepsilon \left[\bar{X}(\eta, \dot{\eta}, \zeta) - \bar{X}(\xi, \dot{\xi}, \zeta) \right] + \varepsilon \left[\bar{X}(x, \dot{x}, z) - \bar{X}(\eta, \dot{\eta}, \zeta) \right] -$$

$$- \varepsilon^2 \left(\frac{\partial W}{\partial x} X + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} P + \frac{\partial W}{\partial \dot{y}} Q \right).$$

В силу условий теоремы 1, при $t \geqq 0$

$$\| \dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) \| \leqq \varepsilon c \left\{ \| \eta(t) - \xi(t) \| + \| \dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) \| + \left\| \int_0^t \left[\bar{\varphi}(s, \eta(s), \dot{\eta}(s)) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \bar{\varphi}(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) \right] \mathrm{d}s \right\| \right\} + \varepsilon c \left\{ \| \eta(t) - x(t) \| + \| \dot{\eta}(t) - \dot{x}(t) \| + \right.$$

$$+ \left\| \int_0^t [\varphi(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s)) - \bar{\varphi}(s, \eta(s), \dot{\eta}(s))] \, ds \right\| + \varepsilon^2 M \leqq$$

$$\leqq \varepsilon c \{\| \eta(t) - \xi(t) \| + \| \dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) \| + 2 \int_0^t \Theta(s) \, ds + \| \eta(t) - x(t) \| +$$

$$+ \| \dot{\eta}(t) - \dot{x}(t) \| + \int_0^t \| \varphi(t, s, x(s), y(s), \dot{y}(s)) - \varphi(t, s, \eta(s), y(s), \dot{\eta}(s), \dot{y}(s)) \| \, ds +$$

$$+ \int_0^t \| \varphi(t, s, \eta(s), y(s), \dot{\eta}(s), \dot{y}(s)) - \bar{\varphi}(s, \eta(s), \dot{\eta}(s)) \| \, ds\} + \varepsilon^2 M \leqq$$

$$\leqq \varepsilon c \{\| \eta(t) - \xi(t) \| + \| \dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) \| + 2 \int_0^t \Theta(s) \, ds + \| \eta(t) - x(t) \| +$$

$$+ \| \dot{\eta}(t) - \dot{x}(t) \| + \int_0^t \sigma_1(t, s) [\| \eta(s) - x(s) \| + \| \dot{\eta}(s) - \dot{x}(s) \|] \, ds + \int_0^t \sigma_2(t, s) \, ds\} +$$

$$+ \varepsilon^2 M,$$

где

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial x} X + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} P + \frac{\partial W}{\partial \dot{y}} Q \right\| \leqq M = \mathrm{const.}.$$

Имея ввиду, что

$$\| \eta(t) - x(t) \| = \varepsilon \| W \| < \varepsilon M_1, \| \dot{\eta}(t) - \dot{x}(t) \| = \varepsilon \| \dot{W} \| < \varepsilon M_2, \int_0 \sigma_1(t, s) \, ds \leqq$$

$$c_1 = \mathrm{const.},$$

получаем

$$\| \dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) \| \leqq \varepsilon c \{\| \eta(t) - \xi(t) \| + \| \dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) \| + \Theta_0(t) + \varepsilon(M_1 + M_2) +$$

$$+ \varepsilon(M_1 + M_2) c_1 + \sigma_{20}(t)\} + \varepsilon^2 M.$$

Здесь

$$\Theta_0(t) = 2 \int_0^t \Theta(s) \, ds, \qquad \sigma_{20}(t) = \int_0^t \sigma_2(t, s) \, ds,$$

а M_1 и M_2 — положительные постоянные.

Следовательно

$$\| \dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) \| \leqq \frac{\varepsilon c}{1 - \varepsilon c} \| \eta(t) - \xi(t) \| + \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon c} [c(M_1 + M_2)(1 + c_1) +$$

$$+ M] + \frac{\varepsilon c}{1 - \varepsilon c} [\Theta_0(t) + \sigma_{20}(t)], \tag{19}$$

$$[\eta(t) - \xi(t)] |_{t=0} = 0.$$

Из (19) следует, что

$$\| \eta(t) - \xi(t) \| \leqq \frac{1}{1 - \varepsilon c} \int_0^t [\varepsilon^2 c(M_1 + M_2)(1 + c_1) + \varepsilon^2 M + \varepsilon c \Theta_0(\tau) +$$

$$+ \varepsilon c \, \sigma_{20}(\tau)] \, e^{\frac{\varepsilon c}{1 - \varepsilon c}(t - \tau)} d\tau.$$

Введя функции

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \Theta_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to \infty,$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_{20}(\tau)\,\mathrm{d}\varepsilon \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to \infty,$$

на интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ находим

$$\| \eta(t) - \xi(t) \| < \frac{1}{1-\varepsilon c}\, \mathrm{e}^{\frac{c\mathrm{L}}{1-\varepsilon c}} \{\varepsilon c(M_1 + M_2)(1 + c_1) L + \varepsilon ML +$$
$$+ cL\gamma_1(L\varepsilon^{-1}) + cL\gamma_2(L\varepsilon^{-1})\}.$$

Из этого неравенства и из выражения для $\eta(t)$ видно, что всегда можно выбрать ε таким образом, что на интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ будет справедливо неравенство

$$\| x(t) - \xi(t) \| \leqq \| x(t) - \eta(t) \| + \| \eta(t) - \xi(t) \| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Этим теорема 1 доказана.

Рассмотрим систему

$$\text{(20)} \qquad \dot{x}(t) = \varepsilon X(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\,\mathrm{d}s, \varepsilon),$$
$$\dot{y}(t) = Y(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \int_0^t \varphi_1(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\,\mathrm{d}s, \varepsilon),$$
$$t \in [0, T], \qquad T = L\varepsilon^{-1}, \qquad L = \text{const.}, \qquad L > 0,$$

с краевым условием

$$\text{(21)} \qquad x(0) = x^\circ, \qquad R[\lambda, y(0), y(T)] = 0.$$

Наряду с системой (20) рассмотрим почти вырожденную ($\varepsilon = 0$) по отношению к ней систему

$$x = \text{const.}, \qquad \dot{x} = \text{const.}$$
$$\text{(22)} \qquad \dot{y}(t) = Y(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \int_0^t \varphi_1(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\,\mathrm{d}s, 0),$$

с краевым условием

$$\text{(23)} \qquad R[\lambda, y(0), y(T)] = 0.$$

Пусть вдоль интегральных кривых $y = \psi(t, x, \dot{x}, \lambda, T)$ краевой задачи (22), (23), где λ рассматривается как векторный параметр, существуют независящие от параметра λ средние значения

(24)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t, x, \psi(t, x, \dot{x}, \lambda, T), \dot{x}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, x, \dot{x}, \lambda, T), z, 0)\,\mathrm{d}t = \bar{X}(x, u, z),$$

(25)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t, s, x, \psi(s, x, \dot{x}, \lambda, T), \dot{x}, \frac{\partial}{\partial s}\psi(s, x, \dot{x}, \lambda, T))\, dt = \bar{\varphi}(s, x, u),$$

Тогда усредненным уравнением первого приближения для медленных переменных $x(t)$ системы (20) назовем уравнение

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \bar{X}(\xi(t), \dot{\xi}(t), \int_0^t \bar{\varphi}(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)\, ds) \tag{26}$$

с начальным условием

$$\xi(0) = x^{\circ}. \tag{27}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Пусть:

1. Функции $\varphi(t, s, x, y, u, v)$ и $\varphi_1(t, s, x, y, u, v)$ определены, непрерывны и равномерно ограничены вместе со своими частными производными по t для всех $t \geqq 0$, $s \geqq 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0]$ и $(x, y, u, v) \in G$, где G некоторая открытая область $2(n + m)$ – мерного пространства переменных x, y, u и v.

Функция $X(t, x, y, u, v, z, \varepsilon)$ определена, непрерывна и равномерно ограничена вместе со своими частными производными первого порядка для всех $t \geqq 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0]$ и $(x, y, u, v, z) \in G \times G_1$, где G_1 некоторая открытая область пространства R_q.

Функция $Y(t, x, y, u, v, w, \varepsilon)$ определена, непрерывна и равномерно ограничена вместе со своими частными производными первого порядка для всех $t \geqq 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0]$ и $(x, y, u, v, w) \in G \times G_2$, где G_2 некоторая открытая область пространства $R_ч$.

2. Функции $\frac{\partial}{\partial t} Y(t, x, y, u, v, w, \varepsilon)$ и $\frac{\partial}{\partial y} Y(t, x, y, u, v, w, \varepsilon)$ имеют непрерывные и ограниченные производные по ε, в соответствующих проекциях области $\{\varepsilon \geqq 0, G^* \times G_1 \times G_2$, где $G^* = \{t \geqq 0, s \geqq 0, G\}$.

3. Функции $X(t, x, y, u, v, z, 0)$ и $Y(t, x, y, u, v, w, 0)$ непрерывны соответственно по совокупности $(t, x, y, u, v, z) \in G^*(t, x, y, u, v) \times G_1$ и $(t, x, y, u, v, w) \in G^*(t, x, y, u, v) \times G_2$ и $Y(t, x, y, u, v, w, 0)$ равномерно ограничена в $G^*(t, x, y, u, v \times G_2$.

4. Существуют равномерно ограниченные в соответствующих проекциях области $G^* \times G_1 \times G_2$ обратные матрицы

$$\left(I_1 - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial u}\right)^{-1}, \left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)^{-1}, \left[I_2 - \frac{\partial Y}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial u}\left(I_1 - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial u}\right)^{-1}\frac{\partial X}{\partial v}\right]^{-1}$$

$$U\left(I_2 - \frac{\partial Y_0}{\partial v}\right)^{-1}$$

где $Y_0 = Y(t, x, u, v, w, 0)$, а I_1, I_2 соответственно n и m – мерные единичные матрицы.

5. Выполнено условие 2 теоремы 1.

6. Через каждую точку области $G^*(t, x, y, u)$ проходит единственная интегральная кривая краевой задачи

$$x = \text{const.}, \qquad \dot{x} = \text{const.},$$

(28)
$$\dot{y}(t) = Y(t, x, y(t), \dot{y}(t), \int_0^t \varphi_1(t, s, x, y(s), \dot{x}\, \dot{y}(s))\, \mathrm{d}s, 0),$$

(29)
$$R[\lambda, y(0), y(T)] = 0$$

соответствующая некоторому значению параметра λ, причем это решение определено для всех значений $t \geqq 0$ и при этих значениях t целиком лежит в $G(x, y, u)$, а для значений $t \leqq 0$ любая из этих интегральных кривых может быть продолжена до границы области $G(x, y, u)$ или целиком лежит в $G(x, y, u)$ при $-\infty < t \leqq 0$.

Пусть указанные решения краевой задачи (28), (29) задаются в форме

(30)
$$y = \psi(t, x, \dot{x}, \lambda, T), x = \text{const.}, \dot{x} = \text{const.},$$

где ψ — m — мерная векторная функция.

7. Для всех $(x, u, z, \lambda) \in G(x, u) \times G_2 \times \Lambda$ и $(s, x, u, \lambda) \in G^*(s, x, u) \times \Lambda$ существуют независящие от параметра λ пределы

(31)
$$\bar{X}(x, u, z) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \psi(t, x, u, \lambda, T), u, \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, u, \lambda, T), z, 0)\, \mathrm{d}t,$$

(32)
$$\bar{\varphi}(s, x, u) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t, s, x, \psi(s, x, u, \lambda, T), u, \frac{\partial}{\partial s} \psi(s, x, u, \lambda, T))\, \mathrm{d}t,$$

причем предельные переходы в (31) и (32) происходят равномерно относительно совокупности $(x, u, z, \lambda) \in G(x, u) \times G_1 \times \Lambda$ и $(s, x, u, \lambda) \in G^*(s, x, u) \times \Lambda$. Средние значения $\bar{X}(x, u, z)$ и $\bar{\varphi}(s, x, u)$ определены, непрерывны и равномерно ограничены для всех $(x, u, z) \in G(x, u) \times G_1$ и $(s, x, u, \in G^*(s, x, u)$ и в областях $G(x, u) \times G_1$ и $G^*(s, x, u)$ удовлетворяют условиям

$$\| \bar{X}(x, u, z) - \bar{X}(x', u', z') \| \leqq c\, [\| x - x' \| + \| u - u' \| + \| z - z' \|];$$

для всех $(x, u) \in G(x, u)$ вектор — функция $\int_0^t \bar{\varphi}(s, x(s), \dot{x}(s))\, \mathrm{d}s$ принадлежит области G_1;

$$\| \bar{\varphi}(s, x, u) \| \leqq \Theta(s),$$

$$\| \varphi(t, s, x, y, u, v) - \bar{\varphi}(s, x, u) \| \leqq \sigma_2(t, s),$$

где c — положительная постоянная, а функции $\Theta(s)$ и $\sigma_2(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \Theta(s)\, \mathrm{d}s \to 0, \quad \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \sigma_2(\tau, s)\, \mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

8. Краевая задача (20), (21) имеет единственное решение $\{x(t), y(t)\}$, удовлетворяющее условиям

(33)
$$x(0) = x^\circ, \qquad R[\lambda, y(0), y(T)] = 0,$$

где под λ подразумевается некоторое фиксированное значение параметра λ. Решение $\{x(t), y(t)\}$ определено на интервале $[0, T]$ при всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и на этом интервале не выходит из некоторой открытой подобласти $G^0 \in G(x, y)$ лежащей целиком внутри $G(x, y)$ вместе со своей границей.

9. Решение усредненного уравнения

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \bar{X}(\xi(t), \dot{\xi}(t), \int_0^t \bar{\varphi}(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)\, \mathrm{d}s) \tag{34}$$

удовлетворяющее начальному условию $\xi(0) = X^0$ существует, однозначно определено при $t \in [0, \infty)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и кривая $\{\xi(t), \dot{\xi}(t)\}$ соответствующая этому решению на интервале $0 \leq t < \infty$ не выходит из области $G(x, u)$.

10. Уравнение в частных проuзводных

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y} Y_0 + \frac{\partial W}{\partial v}\left(I_2 - \frac{\partial Y_0}{\partial v}\right)^{-1}\left[\frac{\partial Y_0}{\partial t} + \frac{\partial Y_0}{\partial y} Y_0 + \frac{\partial Y_0}{\partial w}\left(\varphi_1 + \int_0^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\, \mathrm{d}s\right)\right] =$$

$$= X(t, x, y, u, v, z, 0) - \bar{X}(x, u, z), \tag{35}$$

$$W|_{t=0} = 0, \qquad x = \text{const.}, \qquad u = \text{const.},$$

обладает некоторым решением $W = W(t, x, y, u, v)$, которое определено и равномерно ограничено вместе со своими частными производными первого порядка во всей области $G^*(t, x, y, u, v) \times G_1 \times G_2$.

Тогда если $\{x(t), y(t)\}$ решение краевой задачи (2(), (21), а $\xi(t)$ — решение усредненного уравнения (26) с начальным условием $\xi(0) = X^0$, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ можно указать такое ε^0, что при $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon^0$ на интервале $0 \leqq t \leqq T$ будет выполняться неравенство

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \delta.$$

Доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1, поэтому мы его не приводим.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тазабеков Р., *Метод усреднения в теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.* Изв. АН Киргиз. ССР, № 4, 1967.

Друми Байнов
Медицинская академия
Оборище 23, София — 4
Болгария

Светла Д. Милушева
Высший машинно-электротехнический институт им. В. И. Ленина
ул. Деде агач № 11, София - 8
Болгария