Robert Karpe

Zwei Typen der Kombinationen zur bestimmten Summe, deren Anzahl durch direkte Formel festgestellt werden kann

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 1, 51--56

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104758`

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
VIII: 51—56, 1972

ZWEI TYPEN DER KOMBINATIONEN ZUR BESTIMMTEN SUMME, DEREN ANZAHL DURCH DIREKTE FORMEL FESTGESTELLT WERDEN KANN

ROBERT KARPE, Brno

(Eingegangen am 10. November 1970)

Diese Behandlung knüpft an die Ferrers'sche Methode an für die Kombinationen zur bestimmten Summe, siehe [1], S. 114. Durch Verallgemeinerung dieser Methode und durch Aplikation der Formeln aus der Behandlung [3], leiten wir hier direkte Formeln ab für zwei (weitere) Typen der Kombinationen zur bestimmten Summe.

A) *Kombinationen zur bestimmten Summe, gegebener Klasse, die aus den Elementen einer arithmetischen Folge hergestellt sind.*

Definition 1.
a, b, k, seien fest gewählte natürliche Zahlen; $a \neq b$ ist nicht notwendig.
Das Symbol A(a, b) bezeichne die aritmerische Folge:

(1) $$A(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = a, \quad a + b, \quad a + 2b, \quad \ldots$$

Dann — in Übereinstimmung mit [2], S. 119 — die Symbolen

(2—a) $$\Gamma^{\mathrm{k}} [\int \mathrm{n}; \ \mathrm{A(a, b)}], \text{ bzw. } \Gamma^{\mathrm{k}} (\int \mathrm{n}; \ \mathrm{A(a, b)}),$$

(2—b) $$\mathrm{C^k} [\int \mathrm{n}; \ \mathrm{A(a, b)}], \text{ bzw. } C^{\mathrm{k}} (\int \mathrm{n}; \ \mathrm{A(a, b)}),$$

bezeichnen die Menge, bzw. die Anzahl aller Gruppen $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$, die folgende drei Bedingungen erfüllen:

1) $$e_1 + e_2 + \ldots + e_k = n,$$

2—a) $e_1 \leqq e_2 \leqq \ldots \leqq e_k$, 2—b) $e_1 < e_2 < \ldots < e_k$,

3) $$e_i \in \mathrm{A(a, b)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Jede solche Gruppe $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ benennen wir „*Kombination zur bestimmten Summe n, k-ter Klasse, ad a) mit, ad b) ohne Wiederholung, aus den Elementen der arithmetischen Folge A (a, b).*“

Nach der Ferrers'schen Methode teilen wir jeder Kombination $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ zur bestimmten Summe n ein Diagramm zu, das aus n Punkten besteht, die in e_k Zeilen und k Spalten so angeordnet sind, dass in der i-ten Spalte (von links) gerade e_i Punkte liegen, von denen der j-te Punkt in der j-ten Zeile (von unten) liegt; $j = 1, 2, \ldots e_i$; $i = 1, 2, \ldots, k$.

So zum Beispiel das Diagramm 1. repräsentiert die Kombination (2, 4, 5, 5, 6).

```
        .
    . . .
  . . . .
  . . . .
. . . . .
. . . . .
```

Diagramm 1.

Diese Kombinationendarstellung werden wir jetzt verallgemeinern.

Vereinbarung.

Bei jedem Ferrers'schen Diagramm bilden die Punkte aus der unteren Zeile eine Grundlage, und die übrigen Punkte bilden einen Überbau.

Bemerkung: Zwei beliebige Kombinationen aus der Menge (2-a), oder (2-b), haben immer dieselbe Grundlagen und verschiedene Überbauen.

Definition 2.

Die „*Transformation A*" ist solche Veränderung eines Ferrers'schen Diagramms, bei welcher jeder Punkt von der Grundlage durch die Nummer a und jeder Punkt von dem Überbau durch die Nummer b ersetzt wird.

So zum Beispiel, aus dem Diagramm 1. bekommen wir durch die erwähnte Transformation das Diagramm 2.

```
        b
    b b b
  b b b b
  b b b b
b b b b b
a a a a a
```

Diagramm 2.

Definition 3.

Einem Diagramm, das durch die „Transformation A" aus einem Ferrers'schen Diagramm entstanden ist, gehört jene Kombination zur bestimmten Summe, derer i-tes Element der Summe aller Nummern von der i-ten Spalte des neuen Diagramms gleich ist; $i = 1, 2, \ldots, k$.

Also das Diagramm 2. repräsentiert folgende Kombination:

$$(a + b,\ a + 3b,\ a + 4b,\ a + 4b,\ a + 5b) \in \ulcorner^{5}[\int(5a + 17b);\ A(a, b)].$$

Aus dem angeführten wird es offenbar, dass mittels der erwähnten Transformation eine (1,1)-deutige Korrespondenz zwischen folgenden Mengen existiert:

$$\ulcorner^{k}[\int(ak + br);\ A(a, b)], \qquad \ulcorner^{k}[\int(k + r);\ A(1, 1)],$$

und daraus geht weiter folgende Gleichung hervor:

$$\ulcorner^{k}\Big(\int(ak + br);\ A(a, b)\Big) = \ulcorner^{k}\Big(\int(k + r);\ A(1,1)\Big), \tag{4}$$

wo a, b, k natürliche Zahlen sind und r eine ganze und nicht negative Zahl ist.

Wenn wir in dieser Gleichung die Substitution $n = ka + rb$ anwenden, dann gilt:

$$\ulcorner^{k}\left(\int n\,;\ A(a,b)\right) = \ulcorner^{k}\left(\int \frac{n+k\,(b-a)}{b}\,;\ A(1,1)\right); \tag{5}$$

Diese Gleichung hat offenbar Bedeutung nur wenn gilt $n + k(b - a) = bp$, wo p eine natürliche Zahl ist, die die Bedingung erfüllt: $p \geqq k$.

Das eben angeführte Verfahren, das wir für die Kombinationen mit Wiederholung benützt haben, kann man ebenso für jene ohne Wiederholung benützen. Es gilt also:

$$C^{k}\left(\int n\,;\ A(a,b)\right) = C^{k}\left(\int \frac{n+k\,(b-a)}{b}\,;\ A(1,1)\right); \tag{6}$$

diese Gleichung hat Bedeutung nur wenn gilt $n + k(b - a) = bp$, wo p eine natürliche Zahl ist, die die Bedingung erfüllt: $p \geqq \binom{k+1}{2}$. Diese Ungleichheit geht aus folgender Formel hervor:

$$C^{k}\left(\int p + \binom{k}{2}\,;\ A(1,1)\right) = \ulcorner^{k}\left(\int p\,;\ A(1,1)\right),\ p \geqq k, \tag{7}$$

was die geregelte Formel 7 ist aus dem Buch [2], Seite 142.

Aus den Gleichungen (5) und (6) ist also offenbar, dass wir die Formel für die Anzahl der Kombinationen zur Summe n, k-ter Klasse, mit oder ohne Wiederholung, und aus den Elementen einer arithmetischen Folge $A(a,b)$, umwandeln können, und zwar auf die Formel für entsprechende Kombinationen, zur Summe $m = \frac{n+k\,(b-a)}{b}$, k-ter Klasse, und aus den Elementen der Folge $A(1, 1)$.

Aber die Elemente der Folge $A(1,1)$ bilden die Menge aller natürlichen Zahlen. Wir können also an die Resultate der Behandlung [3] anknüpfen.

Wir wollen hier diese Resultate einführen für den Leser, der die erwähnte Behandlung nicht bei der Hand hat:

$$\ulcorner^{2}\left(\int n\,;\ A(1,1)\right) = \left[\frac{n}{2}\right],\ n \geqq 2. \tag{A-1}$$

$$\ulcorner^{3}\left(\int n\,;\ A(1,1)\right) = \left[\frac{n^2}{12}\right],\ n \geqq 3. \tag{A-2}$$

$$\ulcorner^{4}\left(\int n\,;\ A(1,1)\right) = \left[\frac{n^3 + 3n^2 - 9\,n\,.\left|\frac{n}{2}\right|}{(3\,!)\,.\,(4\,!)}\right],\ n \geqq 4. \tag{A-3}$$

$$\ulcorner^{5}\left(\int n\,;\ A(1,1)\right) = \left[\frac{n^4 + 10\,n^3 + 10\,n^2 - 120\,n + 90\,n\,.\left|\frac{n}{2}\right|}{(4\,!)\,.\,(5\,!)}\right],\ n \geqq 5. \tag{A-4}$$

(A-5) $$\Gamma^{6}\left(\int n;\ A(1,1)\right) =$$

$$= \left[\frac{n^5 + \frac{45}{2} \cdot n^4 + \frac{380}{3} \cdot n^3 + 480\, n - 225 n\, (n+9) \cdot \left|\frac{n}{2}\right| - 1600 n \cdot \left|\frac{n}{3}\right|}{(5!)\,.\,(6!)} \right], \quad n \geqq 6.$$

In diesen Formeln gilt:

1) $\left|\frac{a}{b}\right]$ ist die Auf- oder Abrundung der Nummer $\frac{a}{b}$ zu ihrem nächsten Ganzen, bzw. zu dem nächsten niedrigeren Ganzen falls die beiden Ganzen gleich entfernt sind.

2) $\left|\frac{n}{2}\right| = \begin{cases} 0 \text{ für } n = 2h \\ 1 \text{ für } n = 2h+1 \end{cases}, \quad \left|\frac{n}{3}\right| = \begin{cases} 0 \text{ für } n = 3h \\ 1 \text{ für } n = 3h \pm 1 \end{cases},$ wo h eine beliebige ganze Zahl ist.

Die eben angeführten Formeln für Kombinationen mit Wiederholung können wir auf die entsprechende Formeln für Kombinationen ohne Wiederholung abbilden, siehe (7).

Korolar 1.

Wir können feststellen direkte Formeln für die Anzahl aller Kombinationen zur Summe n, k-ter Klasse ($k \leqq 6$), mit oder ohne Wiederholung, gebildeten aus den Elementen einer arithmetischen Folge A (a, b), wo a, b natürliche Zahlen sind.

B) *Kombinationen zur bestimmten Summe, gegebener Klasse, und mit lokal-zulässiger Wiederholung.*

Definition 4.

Die Nummern a_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ seien fest gewählte natürliche Zahlen, die die Bedingung erfüllen

(8) $$a_i \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_k\,,$$

wobei die Vergrösserung $<$ minimal einmal realisiert wird.

Die Nummer b sei fest gewählte natürliche Zahl.

Die „*Transformation B*" ist solche Veränderung eines Ferrers'schen Diagramms, bei welcher der i-te Punkt aus der Grundlage (von links) mit der Zahl a_i, ($i = 1, 2, \ldots, k$) und jeder Punkt des Überbaues mit der Zahl b ersetzt wird.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & b \\ & & b & b & b \\ & b & b & b & b \\ & b & b & b & b \\ b & b & b & b & b \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}$$

Also zum Beispiel aus dem Diagramm 1 bekommen wir durch die „Transformation B" das Diagramm 3.

Definition 5.

Einem Diagramm, das durch die „Transformation B" aus einem Ferrers'schen Diagram entstanden ist, gehört jene Kombination zur bestimmten Summe, derer i-tes Element der Summe aller Nummern

Diagramm 3. von der i-ten Spalte des betrachtenden Diagramms gleich ist; $i = 1, 2, \ldots, k$.

Also zum Beispiel das Diagramm 3 repräsentiert folgende Kombination:

$$(a_1 + b,\ a_2 + 3b,\ a_3 + 4b,\ a_4 + 4b,\ a_5 + 5b).$$

Definition 6.

Die Menge aller Kombinationen, die der Menge $\Gamma^k\,[\int(k+r);\ A(1,1)]$ mittels einer „Transformation B" entspricht, bezeichnen wir mit dem Symbol $(\Gamma C)^k\,[\int m;\ B(a_i, b)]$, und benennen: *„Die Menge aller Kombinationen zur bestimmten Summe gegebener Klasse, und mit lokal-zulässiger Wiederholung".*

Die Anzahl der Kombinationen in dieser Menge bezeichnen wir mit dem Symbol $(\Gamma C)^k\,(\int m;\ B(a_i, b))$.

Es gilt offenbar:

$$m = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + b\,.\,r \tag{9}$$

$$B(a_i, b) = A(a_1, b) \cup A(a_2. b) \cup \ldots \cup A[a_k, b)\,. \tag{10}$$

Zwischen den Mengen, erwehnten in der Definition 6, existiert offenbar die (1,1)-deutige Zuordnung. Infolge dessen gilt:

$$\Gamma^k\,[\int(k + r);\ A(1,1)] = (\Gamma C)^k\,[\int m;\ B(a_i, b)]\,. \tag{11}$$

Das weitere Verfahren wäre dasselbe, wie in dem ersten Absatz dieser Behandlung.

Korolar 2.

Für die Anzahl aller Kombinationen zur bestimmten Summe, gegebener Klasse ($k \leqq 6$), und mit der lokal- zulässigen Wiederholung, können wir direkte Formeln feststellen.

Beispiel.

Spezialisieren wir die „Transformation B" für $k = 5$, $r = 17$, folgendermassen: $b = 2$, $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = 3$, $a_5 = 5$.

Durch diese Transformation entsteht die (1,1)-deutige Beziehung zwischen der Menge $\Gamma^5\,[\int 22;\ A(1,1)]$, siehe das Diagramm 1, und der Menge aller Kombinationen $(e_1, e_2, \ldots, e_5)$, die folgende Bedingungen erfüllen:

1) $e_1 + e_2 + \ldots + e_5 = 47$, 2) $e_1 \leqq e_2 < r_3 \leqq e_4 < e_5$.

3) $e_i \in A(1,2)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Bemerkung.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass solche Formeln wie (A-i), $i = 1, 2, \ldots, 5$, auch für $i > 5$ existieren.

LITERATUR

[1] **Riordan J.** *An Introduction to Combinatorial Analysis*, New York, 1958.

[2] Netto E. *Lehrbuch der Combinatorik*, Berlin 1927.

[3] **Karpe R.** *Zahlentheoretische Funktionen für Zerteilung der Nummer n in k Summanden*, $k \leqq 6$. Archivum mathematicum, Brno, 1970 (Tom 6, fasc. 4).

Robert Karpe

Mathematisches Institut

Technische Hochschule, Brno

Tschechoslowakei