Archivum Mathematicum

Robert Karpe

Verallgemeinerung der Stirling'schen Zahlen der 2. Art

Archivum Mathematicum, Vol. 7 (1971), No. 1, 29--30

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104736

Scripta Fac. Sci. nat. UJEP Brunensis
Arch. math. 1, VII: 29—30, 1971

VERALLGEMEINERUNG DER STIRLING'SCHEN ZAHLEN DER 2. ART

ROBERT KARPE, Brno

(Eingegangen am 8. Oktober 1970)

Definition. Die Zerlegung i-ten Grades an einer endlichen Menge, ist solche Zerlegung, wo jede Untermenge mindestens i Elemente enthaltet.

Vereinbarung. $N = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sei eine endliche Menge, die n voneinander verschiedene Elemente x_j enthaltet.

Mit dem Symbol ${}^iS(n, k)$, bezw. ${}^iS[n, k]$, deuten wir die Anzahl, bezw. den Inbegriff, aller Zerlegungen i-ten Grades der Menge N in k Untermengen an.

Satz. *Für die Zahlen* ${}^iS(n, k)$ *gilt folgende Rekurenz*:

$$(1) \qquad {}^iS(n, k) = k \,.\, {}^iS(n-1, k) + \binom{n-1}{i-1} \,.\, {}^iS(n-i, k-1); \qquad n \geqq i\,.\,k.$$

Beweis: $x_s \in N$ sei ein willkürlich aber fest ausgewähltes Element. Mit Hinsicht zu diesem Element zerteilen wir den Inbegriff ${}^iS[n, k]$ auf zwei Teilen: Der erste, bezw. der zweite Teil, soll alle jene Zerlegungen enthalten, wo sich x_s in solcher Untermenge befindet, die mindestens $(i + 1)$ Elemente, bezw. gerade i Elemente enthaltet. Den ersten, bezw. den Zweiten Teil des Inbegriffes bezeichnen wir $[A]$, bezw. $[B]$, und die zugehörige Anzahl der Zerlegungen bezeichnen wir A, bezw. B. Es gilt also: ${}^iS[n, k] = [A] \cup [B]$, d.h., es gilt auch ${}^iS(n, k) = A + B$.

Betrachten wir nun die Menge $L = N - \{x_s\}$. Aus dieser Menge kann man bilden ${}^iS(n-1, k)$ Zerlegungen i-ten Grades, in k Untermengen. Den Inbegriff dieser Zerlegungen bezeichnen wir also ${}^iS[n-1, k]$. Wenn wir in jeder Zerlegung $Z \in {}^iS[n-1, k]$ schrittweise zu jeder ihren Untermenge das Element x_s zufügen, bilden wir hiemit schrittweise den Teil $[A]$ des obigen Inbegriffes. Daraus ergibt sich: $A = k \,.\, {}^iS(n-1, k)$.

Betrachten wir nun an wievielerlei Weise man aus der Menge N eine solche Untermenge bilden kann, die außer x_s noch weitere $i - 1$ Elemente enthaltet. Die Anzahl aller solchen voneinander verschiedenen Untermengen ist offenbar $\binom{n-1}{i-1}$. Wenn wir also zu jeder aus diesen Untermengen schrittweise einzelne Zerlegungen i-ten Grades, in $k - 1$ Untermengen, einschließen, wo jede von dieser Zerlegungen immer aus der Menge der übrigen $n - i$ Elemente $\in N$ gebildet ist, gestalten wir hiemit den Teil $[B]$ des obigen Inbegriffes. Es gilt also: $B = \binom{n-1}{i-1} \,.\, {}^iS(n-i, k-1)$.

Bemerkung: Fur $i = 1$ handelt es sich um die Stirling'sche Zahlen der 2. Art, siehe [1], Seite 32, 33, 48.

Benützen wir in Weiterem einfachheitshalber die Bezeichnung S_n^k anstatt ${}^iS(n, k)$.

Formen wir nun folgende Ausschaffungsfunktion der Nummern $S_n^k = {}^iS(n, k)$:

$$(2) \qquad {}^iY_k(x) = S_1^k \cdot \frac{x}{1!} + S_2^k \cdot \frac{x^2}{2!} + S_3^k \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Wenn wir nun die Relation (1) $\left[\text{die jetzt lautet: } S_n^k = k \,.\, S_{n-1}^k + \binom{n-1}{i-1} . S_{n-i}^{k-1}\right]$ mit dem Ausdruck $x^{n-1}: (n-1)!$ multiplizieren und dann summieren, beginnend mit dem Index $n = i + 1$, bekommen wir:

$$\sum_{n=i+1} S_n^k \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = k \,.\, \sum_{n=i+1} S_{n-1}^k \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=i+1} \binom{n-1}{i-1} S_{n-i}^{k-1} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

oder

$$\sum_{n=i+1} S_n^k \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = k \,.\, \sum_{n=i+1} S_{n-1}^k \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \cdot \sum_{n=i+1} S_{n-i}^{k-1} \cdot \frac{x^{n-i}}{(n-i)!}.$$

Da für $k > 1$, $r = 1, 2, \ldots, i$ gilt: $S_r^k = 0$, bekommen wir — je nach der Ableitung dieser offenbar überall konverg. Reihe:

$$\frac{d}{dx}\, {}^iY_k(x) = k \,.\, {}^iY_k(x) + \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \,.\, {}^iY_{k-1}(x), \qquad \text{d.h.:}$$

(3) $$\left(\frac{d}{dx} - k\right) . \, {}^iY_k(x) = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \,.\, {}^iY_{k-1}(x)$$

Da $S_n^1 = 1$ für $n \geqq i$, und $S_n^1 = 0$ für $n < i$, ergibt sich aus (2) unmittelbar: ${}^iY_1(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \ldots - \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$, und wenn wir nun voraussetzen werden, daß es gilt:

$${}^iY_{k-1}(x) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \left(e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \ldots - \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}\right)^{k-1},$$

dann stellen wir nach (3) fest, daß es zugleich gilt:

(4) $${}^iY_k(x) = \frac{1}{k!} \cdot \left(e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \ldots - \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}\right)^k.$$

Diese, durch strenge Induktion abgeleitete Formel, die der Differentialgleichung (3) genügt, ist also die Ausschaffungsfunktion für die Nummern ${}^iS(n, k)$.

Schreiben wir diese Funktion an folgender Weise:

$${}^iY_k(x) = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{x^i}{i!} + \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} + \frac{x^{i+2}}{(i+2)!} + \ldots\right)^k;$$

dann ergibt sich, als Koeffizient bei $x_n : n!$, die Summe:

(5) $${}^iS(n, k) = \frac{1}{k!} \cdot \sum \frac{n!}{(j_1)! \cdot (j_2)! \ldots (j_k)!},$$

wo die Summation über alle Komplexen $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ verläuft, wo j_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$ natürl. Zahlen sind, für die es gilt: $j_1 + j_2 + \ldots + j_k = n$, $j_s \geqq i$.

Bemerkung: Siehe auch die Aufgabe 14-a), [1], Seite 42, 43.

LITERATUR VERZEICHNIS

[1] Riordan John, *An Introduction to Combinatorial Analysis,* New York, 1958.

Mathematisches Institut FS VUT
Gorkého 13, Brno
Czechoslovakia