Froim Marcus
Sur les surfaces minima projectives

Archivum Mathematicum, Vol. 6 (1970), No. 3, 145--147

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104717

SUR LES SURFACES MINIMA PROJECTIVES

FROIM MARCUS

(Présenté le 12 Février 1970)

A la mémoire de ma Daisy, ma chère femme.

D'après Thomsen [1] on appelle minima projectives les surfaces non reglées qui satisfont à la condition

$$\delta \iint I \sqrt{|A|}\, du\, dv = 0, \tag{1}$$

l'invariant intégral du premier membre étant le plus simple de la théorie des surfaces [2].

Dans le plus général système de coordonnées homogènes et en paramètres asymptotiques, les surfaces minima projectives sont caractérisées par l'une des conditions suivantes:

$$\beta M_v + 2\beta_v M + \beta_{vvv} = 0, \quad \gamma L_u + 2\gamma L_u + \gamma_{uuu} = 0. \tag{2}$$

Ces conditions ont été obtenues par O. Mayer [3] en considérant celles données par Thomsen [1] en coordonnées normales de Fubini.

Déduire d'une surface minima projective une autre de même espèce n'est pas dépourvue de certain intérêt. O. Mayer [3] a demontré le resultat suivant: *Une surface minima projective admet toujours une classe de ∞^5 transformées W qui sont des surfaces de même espèce.*

Le but de cette Note est de montrer qu'on peut déduire d'une surface S minima projective une autre infinité des surfaces de même espèce, à l'aide d'une correspondance asymptotique et qui ne sont pas transformées par congruences W de S.

Rappelons que d'après Čech [4] on peut fonder une classification des correspondances asymptotiques entre deux surfaces non reglées, sur les invariants de contact r et s, et ces correspondances se partagent en trois espèces.

Soit S une surface en correspondance asymptotique avec une surface S donnée. Supposons que la correspondance est de troisième espèce avec $r = k_1$, $s = k_2$, $k_1 \neq k_2 \neq 0, \pm 1$.

En coordonnées asymptotiques, S sera déterminée par les quantités

$$\frac{\bar{\beta}}{\beta} = r = k_1; \quad \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} = s = k_2, \tag{3}$$

qui doivent satisfaire aux conditions d'intégrabilité du système différentiel de Fubini

$$
\begin{aligned}
&\bar{L}_u + 2\bar{\beta}\bar{\gamma}_u + \bar{\gamma}\bar{\beta}_u = 0, \qquad \bar{M}_v + 2\bar{\gamma}\bar{\beta}_v + \bar{\beta}\bar{\gamma}_v = 0,\\
&\bar{\beta}\bar{M}_u + 2\bar{\beta}_u\bar{M} + \bar{\beta}_{vvv} = \bar{\gamma}\bar{L}_u + 2\bar{\gamma}_u\bar{L} + \bar{\gamma}_{uuu}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Si l'on a égard aux relations analogues vérifiées par β, γ, L, M, relative à la surface S, on déduit que les conditions précédentes reviennent aux suivantes:

$$
\begin{aligned}
&\bar{L} = k_1k_2L + U(u); \qquad \bar{M} = k_1k_2M + V(v),\\
&k_1k_2(k_1 - k_2)(\beta M_v + 2\beta_v M + \beta_{vvv}) + (1 - k_1k_2)(k_1\beta_{vvv} - k_2\gamma_{uuu}) +\\
&\quad + k_1(\beta V' + 2\beta_v V) - k_2(\gamma U' + 2\gamma_u U) = 0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Si la correspondance envisagée conserve la première et la troisième forme différentielle, cette dernière étant la forme [5]

$$L\,\mathrm{d}u^2 + M\,\mathrm{d}v^2 - \varphi, \tag{6}$$

alors nécessairement

$$k_1k_2 = 1, \qquad U = V = 0. \tag{7}$$

Par conséquent, *S est une surface minima projective et de la même espèce est aussi la surface S.*

En observant que la constante k_1 est arbitraire, il résulte qu'une telle correspondance engendre une infinité de surfaces minima projectives.

Donc:

Une surface minima projective S engendre toujours une infinité de surfaces S de même espèce, qui s'obtient à l'aide d'une correspondance asymptotique de troisième espèce conservant la première et la troisième forme différentielle $L\,\mathrm{d}u^2 + M\,\mathrm{d}v^2 - \varphi$.

On peut se demander si les surfaces S ainsi obtenues appartiennent à la classe des ∞^5 surfaces transformées par congruences W de S. Sains faire des calculs on répond par le négatif.

En effet, une congruence W réalise une correspondance asymptotique entre les deux nappes focales. Par conséquent *les congruences W se partagent elles aussi en trois espèces moyennant les invariants r, s.*

Mais d'après Čech [5] le cas $r \neq s$, $rs \neq 0$ n'est pas possible pour une congruence W de troisième espèce.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Thomsen, G.: *Sulle superficie minime proiettive.* Annali di Mat. pura ed applicata. Serie IV, T. V, 1928, pp. 169—184.

[2] Fubini, G.—Čech, E.: *Geometria proiettiva differenziale.* Bologna, 1926.

[3] Mayer, O.: *Contribution á l'étude des surfaces minima projectives.* Bulletin Sc. Math., T. LVI, 1932, pp. 146—168; 188—200.
[4] Čech, E.: *Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces.* Atti R. Acc. Naz. dei Lincei, serie sesta, Vol. VIII, 1928, pp. 484—486; 552—554.
[5] Fubini, G.—Čech, E.: *Introduction á la géométrie projective différentielle des surfaces,* Paris, 1931.

Institut Polytechnique
Jassi, Roumanie