Lucien Godeaux

Variétés canoniques des variétés algébriques de rang deux

Archivum Mathematicum, Vol. 5 (1969), No. 2, 93--100

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104686

VARIÉTÉS CANONIQUES DES VARIÉTÉS ALGEBRIQUES DE RANG DEUX, PAR LUCIEN GODEAUX (LIÉGE)

A mon Ami OTAKAR BORŮVKA

(Présenté le 7 Février 1969)

Une variété algébrique à n dimensions est dite de rang deux lorsqu'elle représente une involution du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une variété algébrique à n dimensions. Le but de cette note est de déterminer le comportement des variétés canoniques d'une variètè de rang deux aux points de diramation.

Nous partons d'une variété algébrique V à n dimensions contenant une involution I du second ordre n'ayant qu'un nombre fini, supérieur à zéro, de points unis isolés. Nous commençons par construire un modèle projectif de la variété V sur lequel l'involution I est déterminée par une homographie biaxiale harmonique H, les points unis de I se trouvant sur l'un des axes de cette homographie, l'autre ne rencontrant pas la variété. Nous en déduisons un modèle projectif normal de la variété de rang deux Ω, image de l'involution I, sur lequel les points de diramation sont isolès.

Nous dèmontrons ensuite qu'un point de diramation est multiple d'ordre 2^{n-1} pour la variété Ω, les sections hyperplanes du cône tangent en ce point étant des variétés de Veronese généralisées, c'est-à-dire des variétés que l'on obtient en rapportant projectivement aux hyperplans d'un espace lineaire à $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ dimensions les hyperquadriques d'un espace linéaire à $n-1$ dimensions (Pour $n = 3$, on obtient la surface de Veronese).

Nous établissons que les variétés canoniques de la variété Ω ne passent pas par les points de diramation si n est pair, mais qu'elles y ont des points multiples d'ordre 2^{n-2} si n est impair.

Nous avons déjà établi cette propriété dans le cas des surfaces ($n = 2$). Nous renvoyons pour la démonstration à l'ouvrage que nous avons consacré aux involutions appartenant à une surface algébrique.[1])

Nous terminons en étudiant un exemple dans le cas $n = 3$.

1. Soit V une variété algébrique à n dimensions contenant une involution I d'ordre deux n'ayant qu'un nombre fini de points unis isolés. Dèsignons par T la transformation de V en soi génératrice de l'involution I.

Choisissons sur V un système linéaire $| G_1 |$ de variétés G_1 à $n-1$ dimensions dépourvu de points-base. La transformation T lui fait correspondre un système linéaire $| G_2 |$ également dépourvu de points-base. Le système linéaire complet $| G_1 + G_2 |$ est transformé en lui-même par T et contient un système linéaire appartenant à l'involution et privé de points-base. Il pourrait se faire que le système complet $| G_1 + G_2 |$ appartienne à l'involution. Dans ce cas, on peut trouver un entier λ assez grand pour que pour que le système complet $| \lambda(G_1 + G_2)|$ n'appartienne plus à l'involution. Ce système, que nous dèsignerons par $| F |$ contient un second système appartenant à l'involution I. Le choix de λ peut être fait de telle sorte que la dimension r du système $| F |$ soit aussi grande qu'on le veut, de même que la dimension r_0 du système appartenant à l'involution et privé de points-base $| F_0 |$.

Cela étant, rapportons projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions les variétés F. A la variété V correspond une variété que nous continuerons à désigner par V et à la transformation T une homographie biaxiale harmonique H de S_r. Soient σ_0, σ_1 les axes de cette homographie et r_0, r_1 leurs dimensions.

Nous supposerons que ce sont les hyperplans passant par σ_1 qui dècoupent sur V les variétés F_0 formant un système dépourvu de points-base et appartenant à l'involution. Il en résulte que l'espace σ_1 ne rencontre pas V et que les points unis de l'involution I appartiennent à σ_0. Ce sont évidemment les seuls points de V appartenant à cet espace. Nous désignerons par F_1 les variétés découpées sur V par les hyperplans passant par σ_0 Le système $| F_1 |$ a pour points-base les points unis de l'involution.

Rapportons projectivement les variétés F_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions ou, si l'on préfère, projetons V sur l'espace σ_0 à partir de σ_1. A la variètè V correspond une variété à n dimensions Ω dont les points représentent les couples de l'involution I et qui est donc de rang deux.

Aux systèmes $| F_0 |$, $| F_1 |$ correspondent sur Ω des systèmes linéaires complets $| \phi_0 |$, $| \phi_1 |$, le premier étant d'ailleurs celui des sections hyperplanes de Ω.

Aux points unis de l'involution I, que nous supposerons en nombre supérieur à zéro, correspondent les points de diramation, isolés par construction, de la variété Ω.

2. Recherchons tout d'abord la singularité des points de diramation pour la variété Ω.

Soient A un point uni de l'involution I et A' le point de diramation correspondant. L'espace linéaire α à n dimensions tangent à V en A rencontre l'espace σ_1 suivant un espace α' à $n-1$ dimensions.

Les variétés F_0 passant par A y acquièrent un point double conique. En effet, dans le cas où V est une surface ($n = 2$), nous avons démontré que les courbes F_0 passant par A y acquièrent un point double ordinaire. Si nous considèrons la surface section de V par $n - 2$ hyperplans linéairement indépendants passant par σ_0, cette surface rencontre la variété F_0 passant par A suivant une courbe ayant un point double conique en A. Il en résulte que la surface F_0 passant par A y possède un point double conique.

Les cônes tangents aux variétés F_0 passant par A en ce point rencontrent l'espace α' suivant des hyperqua driques Q. A ces variétés F_0 correspondent les hyperplans passant par A' et chacun de ces hyperplans rencontre la variété Ω suivant des variétés Φ_0 ayant un point double conique en A'. En effet, si nous considérons une variété $\bar{F}_0$ passant par A, à un point de cette variété infiniment voisin de A correspond un point de la variété $\bar{\Phi}_0$ homologue infiniment voisin de A'. A ce point correspond donc le point où une tangente en A à F_0 rencontre l'espace α'. Par conséquent aux points de $\bar{\Phi}_0$ infiniment voisins de A' correspondent les points d'une hyperquadrique Q de l'espace α'.

Le cône tangent à Ω en A' est donc le lieu des cônes de sommet A' et du second ordre qui correspondent aux hyperquadriques Q de α'. Il est donc d'ordre 2^{n-1} et ses sections hyperplanes sont des variétés de Veronese généralisées représentant les hyperquadriques de l'espace α' à $n - 1$ dimensions.

Les points de diramation de la variété de rang deux Ω sont multiples d'ordre 2^{n-1}, le cône tangent en chacun de ces points ayant pour sections hyperplanes des variétés de Veronese généralisées.

3. A une variété F qui n'appartient ni à $|F_0|$, ni à $|F_1|$, correspond sur Ω une variété Φ et à cette variété Φ correspond sur V la variété F et sa transformée par H. La variété Φ, à $n - 1$ dimensions, contient donc une variété double à $n - 2$ dimensions. Comme la variété F appartient à un système linéaire, la variété Φ appartient également à un système linéaire.

Faisons varier F d'une manière continue dans $|F|$ de telle sorte qu'elle tende vers une variété F_0. La variété Φ a pour limite une variété Φ_0 comptée deux fois. De même, si F tend vers une variété F_1, la variété Φ tend vers une variété Φ_1 comptée deux fois, mais il faut tenir compte des points de diramation, qui appartiennent aux variétés Φ_1.

Au point de vue des transformations birationnelles, un point de diramation est équivalent à une variété rationnelle à $n - 1$ dimensions. Si nous désignons par Δ la somme des variétés équivalentes aux points de diramation de Ω, on a

$$| 2\Phi_0 | = | 2\Phi_1 + \Delta |$$

4. Supposons que la variétè Ω possède un système canonique $|\Theta|$. Les systèmes

$$|\Phi_0'| = |\Phi_0 + \Theta|, \ |\Phi_1'| = |\Phi_1 - \Theta|$$

adjoints aux systèmes $|\Phi_0|$, $|\Phi_1|$ ont pour correspondants sur V des systèmes $|F_0'|$, $|F_1'|$ qui appartiennent au système adjoint $|F'|$ à $|F|$. Ce système adjoint $|F'|$ est évidemment transformé en lui-même par H et contient deux systèmes appartenant à l'involution I.

Les systèmes $|F_0'|$, $|F_1'|$ dècoupent sur les variétés F_0, F_1 des variétés canoniques. Pour connaître le comportement des variétés Θ aux points de diramation, il faut déterminer le comportement des variétés F_0', F_1' aux points unis de I.

Dans le cas $n = 2$, où la variété V est une surface et les variétés F des courbes, nous avons rèsolu la question dans notre ouvrage cité plus haut. Rappelons les résultats.

Les courbes canoniques Θ de la surface Ω ne passent pas par les points de diramation. Le système $|F_0'|$ n'a pas pour points-base les points unis de l'involution, mais les courbes F_1' passent par ces points.

Le système $|F_0' - F_1| = |F_1' - F_0|$ a pour homologue sur la surface Ω un système $|\Theta_1|$ dont les courbes passent par les points de diramation et que l'on pourrait appeler *système paracanonique*.

5. Supposons $n = 3$. Les variétés F sont alors des surfaces.

Sur une surface F_0, les surfaces F_0', F_1' dècoupent des courbes canoniques formant des systèmes linéaires sans points-base. Sur une surface F_1, les surfaces F_0', F_1' découpent des courbes canoniques formant deux systèmes linéaires dont l'un a pour points-base les points unis de I. Ce ne peut être $|F_1'|$ car à ce système correspond sur Ω un système découpant sur une variété Φ_1 le système canonique, dépourvu de points-base. C'est donc le système $|F_0'|$ qui a pour points-base les points unis de l'involution. Le système $|F_0' - F_0|$ a les mêmes points-base et par conséquent, le système canonique $|\Theta|$ de Ω a pour points-base les points de diramation.

Observons que le plan tangent à une surface F_0' en un point uni A de I coupe le plan α' suivant une droite à laquelle correspond un cône du second ordre de sommet A'. Les surfaces canoniques de Ω ont donc des points doubles coniques aux points de diramation.

Le système canonique $|\Theta|$ de Ω correspond aussi au système $|F_1' - F_1|$ qui a aussi pour points-base les points unis de I. Quant au système paracanonique qui correspond aux systèmes $|F_0' - F_1|$, $|F_1' - F_0|$, il est dépourvu de points-base.

Dans le cas $n = 3$, les surfaces canoniques de la variété Ω ont des points doubles coniques aux points de diramation.

6. Supposons maintenant $n = 4$. Les variétés F'_0, F'_1 découpent sur une variètè F_1 des variétés canoniques. Les variétés canoniques de la variété à trois dimensions Φ_1 ont des points doubles coniques aux points de diramation, donc les variétés F'_1 passent par les points unis de I. Il en résulte que le système $|F'_0|$ est dépourvu de points-base et qu'il en est de même du système $|F'_0 - F_0|$. Donc le système canonique $|\Theta|$ de Ω est dépourvu de points-base.

Ceci fait présager que suivant que n est pair ou impair, les variétés canoniques de Ω ne passent pas ou passent par les points de diramation. Nous allons démontrer qu'il en est bien ainsi.

Supposons n impair. Les variétés F'_0, F'_1 découpent sur une variété F_1 des variétés canoniques. Aux variétés $F'_1 - F_1$ correspondent des variétés canoniques d'une variété à un nombre pair de dimensions Φ_1. Ce système est dépourvu de points-base donc les variétés F'_0 passent par les points unis de l'involution I. Il en est de même des variétés $F'_0 - F_0$. Les variétés canoniques Θ de Ω passent donc par les points de diramation.

Si n est pair, les variétés canoniques de Ω qui correspondent aux variétés $F'_1 - F_1$ passent par les points de diramation. Il en résulte que les variétés F_0 ne passent pas par les points de diramation.

Observons maintenant que si n est impair, l'espace linéaire à $n - 1$ dimensions tangent à une variété F'_0 en un point uni A, coupe l'espace α' suivant un espace à $n - 2$ dimensions. A celui-ci correspond une cône d'ordre 2^{n-2} de sommet A'. Les variétés Θ ont donc des points multiples d'ordre 2^{n-2} aux points de diramation.

Si n est pair, les variétés canoniques de Ω ne passent pas par les points de diramation, mais si n et impair, elles ont des points multiples d'ordre 2^{n-2} en ces points.

Les variétés paracanoniques ne passent pas par les points de diramation si n est impair, mais elles passent par ces points si n est pair.

7. Nous allons construire un exemple de la variété Ω dans le cas $n = 3$.

Considérons dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions deux plans (y), (z) ne se rencontrant pas. Nous désignerons par y_0, y_1, y_2 les coordonnées d'un point du plan (y) et par z_0, z_1, z_2 celles d'un point du plan (z), de manière que les coordonnées d'un point de S_5 soient $y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2$. De plus, nous indiquerons par φ_m une forme algébrique de degré m en y, par ψ_m une forme de degrè m en z, enfin par $\varphi_m\psi_m$ une forme de degré m en y dont les coefficients sont des formes de degré m en z.

Les équations

$$\varphi_4 + \varphi_2\psi_2 + \psi_4 = 0, \qquad \varphi'_4 + \varphi'_2\psi'_2 + \psi'_4 = 0$$

représentent une variété V à trois dimensions, d'ordre 16, transformée en elle-même par l'homographie biaxiale harmonique H dont les axes sont les plans (y), (z). Cette homographie détermine sur V une involution du second ordre ayant 16 points unis dans le plan (y) et 16 points unis dans le plan (z).

Les surfaces canoniques G de V sont découpées par les hyperquadriques

$$\varphi_2'' + \varphi_1''\psi_1'' + \psi_2' = 0$$

Ces surfaces G ne passent pas par les points unis de l'involution I et elles forment un système de dimension $P_a - 1 = 20$ et de degré $\omega_0 = 128$.

L'intersection de deux surfaces G est une courbe d'ordre 64 sur laquelle la série canonique est découpée par les hypersurfaces d'ordre 6. Cette série a donc l'ordre 384 et son genre est $\omega_1 = 193$.

Les courbes canoniques d'une surface G sont découpées par les hypersurfaces du quatrième ordre dont il faut défalquer celles qui contiennent G. Le genre arithmétique de G est donc $\omega_2 = 126 - 2 - 21 = 103$.

D'après une formule de Severi[2], on doit avoir

$$2P_a = \omega_0 - \omega_1 + \omega_2 + 4$$

ce qui est une identité.

Dans le système $|G|$, il y a deux systèmes appartenant à l'involution I. L'un, $|G_1|$ qui contient les surfaces $\varphi_2'' + \psi_2'' = 0$, a la dimension 11, l'autre, donné par une forme bilinéaire $\varphi_1''\psi_1'' = 0$, a la dimension 8. Nous le désignerons par $|G_2|$. Le système canonique $|\Theta|$ de la variété Ω correspond à l'un de ces systèmes.

Supposons que les surfaces Θ correspondent aux surfaces G_1, qui ne passent pas par les points unis de I. Le degré de $|\Theta|$ est $\omega_0' = 64$. Le genre de la courbe intersection de deux surfaces G_1 est, d'après la formule de Zeuthen, $\omega_1' = 97$. Entre le genre arithmétique $p_a = \omega_2$ de G_1 et celui $p_a' = \omega_2'$ de la surface Θ homologue, on a la relation

$$p_a + 1 = 2(p_a' + 1)$$

d'où $\omega_2' = 51$. Le genre P_a' de Ω est donné par

$$2P_2' = \omega_0' - \omega_1' + \omega_2' + 4 = 22,$$

d'où $P_a' = 11$; alors que P_a' doit être égal à 12 ou à 9. Donc Θ ne correspond pas à G_1 mais à G_2.

Une surface G_2 passe simplement par les points unis de I et par un calcul analogue au précédent mais en tenant compte de ce fait, on a pour $|\Theta|$, $\omega_0' = 48$, $\omega_1' = 89$, $\omega_a' = 55$, car actuellement on a

$$12(p_a + 1) = 24(p_a' + 1) - 3.32.$$

On a

$$2P'_a = 48 - 89 + 55 + 4 = 18$$

et $P'_a = 9$.

On retrouve ainsi le résultat obtenu plus haut, mais ceci constitue une nouvelle démonstration de notre théorème pour $n = 3$.

8. Nous indiquerons comment on peut construire un modèle projectif de la variété Ω.

Rapportons projectivement les hyperquadriques $\varphi''_2 + \psi''_2 = 0$ aux hyperplans d'un espace S_{11} à onze dimensions en posant

$$Y_{ik} = y_i y_k, \quad Z_{ik} = z_i z_k.$$

Il correspond à l'espace S_5 la variété W à cinq dimensions et d'ordre 16, lieu des droites s'appuyant sur deux surfaces de Veronese Ψ_1, Ψ_2 situées dans des espaces Σ_1, Σ_2 à cinq dimensions ne se rencontrant pas. Les équations de W s'obtiennent en écrivant que les dèterminants $|Y_{ik}|$, $|Z_{ik}|$ sont de caractéristique un.

Aux variétés définissant la variété V correspondent dans S_{11} deux hyperquadriques dèterminant sur W la variété Ω, d'ordre 64. Observons que la variété Ω possède 16 points quadruples sur la surface Ψ_1 et 16 points quadruples sur le surface Ψ_2. En un de ces derniers points par exemple, le cône tangent projette la surface Ψ_1 de ce point.

A une surface G_2 correspond une surface Θ suivant laquelle, en vertu de la relation établie au n° 2, une hyperquadrique Q touche la variété Ω. L'équation de Q s'obtient aisément. Si la surface G_2 est découpée sur V par l'hyperquadrique

$$\sum \lambda_{ik} y_i z_k = 0_s \quad (i, k = 0, 1, 2)$$

En élevant les deux membres de cette équation au carrè, on obtient

$$\sum \lambda_{ik} \lambda_{jh} Y_{ij} Z_{kh} = 0 \qquad (i, j, h, k = 0, 1, 2).$$

On peut obtenir un second modèle projectif de la variété Ω en rapportant projectivement les surfaces G_2 aux hyperplans d'un espace S_8 à huit dimensions, en posant $x_{ik} = y_i z_k$. On obtient tout d'abord dans $S)$ la variété de Segre W_4^6 représentant les couples de points de plans (y), $(z_8$ et dont les équations e'obtiennent en écrivant que le déterminant $|x_{ik}|$ est de caractéristique un.

On a

$$\frac{y_0}{x_{00}} = \frac{y_1}{x_{10}} = \frac{y_2}{x_{20}} = \mathrm{p}, \quad \frac{z_0}{x_{00}} = \frac{z_1}{x_{01}} = \frac{z_2}{x_{02}} = p'$$

et par conséquent

$$p^4\varphi_4(x_{00},\ x_{10},\ x_{20}) + p^2p'^2\varphi_2(x_{00},\ x_{10},\ x_{20})\ \psi_2(x_{00},\ x_{01},\ x_{02}) + \\ + \ p'^4\varphi_4(x_{00},\ x_{01},\ x_{02}) = 0,$$

$$p^4\varphi_1' + p^2p'^2\varphi_2'\varphi_2' + p'^4\psi_4' = 0.$$

L'élimination de p, p' entre ces équations donne

$$\begin{vmatrix} \psi_4 & \varphi_4 \\ \psi_4' & \varphi_4' \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} \varphi_2\psi_2 & \psi_4 \\ \varphi_2'\psi_2' & \psi_4^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_4 & \varphi_2\psi_2 \\ \varphi_4' & \varphi_2'\psi_2' \end{vmatrix} = 0,$$

qui est de degré huit mais peut être réduite en utilisant les équations de W_4^6. Si en effet on écrit l'équation précédente en laissant les y et z, puis en introduisant les x, on obtient une équation du quatrième ordre. L'intersection de la variété de Segre avec cette hypersurface est une variété d'ordre 24. Cette variété, comptée deux fois est un modèle projectif de Ω.

Observons qu'à un point de W_4^6 correspond une droite s'appuyant sur les plans (y) et (z). La droite qui correspond à un point de la variété qui vient d'être obtenue rencontre V en quatre points se distribuant en deux couples de l'involution I et le point considéré représente ces deux couples.

Liège, janvier 1969.

[1] Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications, publié par le Consiglio Nazionale delle Ricerche (Rome, Edizione Cremonese, 1963).

[2] SEVERI, Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2° sem. 1909). Cette formule avait d'abord été établie par Pannelli, mais dans le cas où la variété a trois dimensions était l'intersection complète d'hypersurfaces.

37 Quai Orban
Liège, Belgique