Archivum Mathematicum

Micheline Froda-Schechter

Sous-groupes et groupes quotients d'un groupe préordonné

Archivum Mathematicum, Vol. 4 (1968), No. 3, 187--192

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104665`

SOUS-GROUPES ET GROUPES QUOTIENTS D'UN GROUPE PRÉORDONNÉ

Par M. FRODA-SCHECHTER

Présenté le 27 novembre 1967

Dans un ouvrage antérieur [4] on a étudié les propriétés des relations suivantes $\overset{\iota}{\leqq}$ et $\underset{\iota}{\leqq}$, induites par une relation de préordre $\leqq$ (relation réflexive et transitive [2]) définie sur un ensemble T, sur l'ensemble $\mathscr{P}(T)$ des parties de T;

$$E_1 \overset{\iota}{\leqq} E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, e_1 \in E_1 \;\exists\, e_2 \in E_2 \; e_1 \leqq e_2$$
$$E_1 \underset{\iota}{\leqq} E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, e_2 \in E_2 \;\exists\, e_1 \in E_1 \; e_1 \leqq e_2$$

On développera ci-dessous des applications de ces relations à la théorie des groupes (pré)ordonnés. On obtient en particulier une caractérisation du plus petit sous-groupe distingué convexe d'un groupe (pré)ordonné contenant un sous-groupe distingué quelconque. Ces relations sont deux préordres duals qui ne sont pas antisymétriques même si $\leqq$ est une relation d'ordre. On voit que

$$(1) \qquad E_1 \subseteq E_2 \quad \Rightarrow \quad E_1 \overset{\iota}{\leqq} E_2 \quad \text{et} \quad E_2 \underset{\iota}{\leqq} E_1 .$$

Les équivalences correspondantes seront notées:

$$E_1 \overset{\iota}{=} E_2 \quad \Leftrightarrow \quad E_1 \overset{\iota}{\leqq} E_2 \quad \text{et} \quad E_2 \overset{\iota}{\leqq} E_1 ,$$
$$E_1 \underset{\iota}{=} E_2 \quad \Leftrightarrow \quad E_1 \underset{\iota}{\leqq} E_2 \quad \text{et} \quad E_2 \underset{\iota}{\leqq} E_1 ,$$

et les classes par $\mathscr{K}^\iota(E)$ respectivement $\mathscr{K}_\iota(E)$ et les relations d'ordre associées à $\overset{\iota}{\leqq}$ et $\underset{\iota}{\leqq}$ définies sur $\mathscr{P}(T)/\overset{\iota}{=}$ par $\overset{\iota}{\leqq}$ respectivement $\underset{\iota}{\leqq}$. [1])

Proposition 1. *Soient A, B, C, D des parties d'un groupoïde préordonné G*[2]) *et $g_1, g_2, g \in G$*

$$(2) \qquad \begin{aligned} gA &= \{ga/a \in A\} \\ AB &= \{ab/a \in A,\, b \in B\} \end{aligned}$$

---

[1]) $\mathscr{K}^\iota(E_1) \overset{\iota}{\leqq} \mathscr{K}^\iota(E_2) \Leftrightarrow \exists\, E_1' \in \mathscr{K}^\iota(E_1) \;\exists\, E_2' \in \mathscr{K}^\iota(E_2)\; E_1' \overset{\iota}{\leqq} E_2'$, cf. [4].

[2]) G est un groupoïde préordonné s'il existe une opération partout définie sur G compatible avec la relation de préordre $\leqq$, c'est-à-dire si $\forall\, x, y, z \in G, x \leqq y \Rightarrow$ $\Rightarrow xz \leqq yz, zx \leqq zy$.

on a

(3) $$g_1 \leqq g \quad \Rightarrow \quad g_1A \overset{\iota}{\leqq} g_2A,\ Ag_1 \overset{\iota}{\leqq} Ag_2$$

(4) $$A \overset{\iota}{\leqq} B \quad \Rightarrow \quad Ag \overset{\iota}{\leqq} Bg,\ gA \overset{\iota}{\leqq} gB$$

(5) $$A \overset{\iota}{\leqq} B \quad \Rightarrow \quad AC \overset{\iota}{\leqq} BC,\ CA \overset{\iota}{\leqq} CB$$

(6) $$A \overset{\iota}{\leqq} B \ \text{ et } \ C \overset{\iota}{\leqq} D \quad \Rightarrow \quad AC \overset{\iota}{\leqq} BD$$

(7) $$A \overset{\iota}{=} B \quad \Rightarrow \quad Ag \overset{\iota}{=} Bg,\ gA \overset{\iota}{=} gB$$

(8) $$A \overset{\iota}{=} B \quad \Rightarrow \quad AC \overset{\iota}{=} BC,\ CA \overset{\iota}{=} CB$$

(9) $$A \overset{\iota}{=} B \ \text{ et } \ C \overset{\iota}{=} D \quad \Rightarrow \quad AC \overset{\iota}{=} BD$$

et aussi les mêmes propriétés des relations duales $\underset{\iota}{\leqq}$ *et* $\underset{\iota}{=}$.

Démonstration:

(3): Soit $g_1a \in g_1A$; on a $g_1a \leqq g_2a$, où $g_2a \in g_2A$.
(4): Soit $ag \in Ag$; par l'hypothèse il existe $b \in B$ tel que $a \leqq b$, donc $ag \leqq bg$, $bg \in Bg$.
(5): Soit $ac \in AC$; il existe $b \in B$ tel que $a \leqq b$ donc $ac \leqq bc$, $bc \in BC$.
(6): $A \overset{\iota}{\leqq} B \Rightarrow AC \overset{\iota}{\leqq} BC$ et $C \overset{\iota}{\leqq} D \Rightarrow BC \overset{\iota}{\leqq} BD$ selon (5), d'où (6) s'obtient par transitivité; (7), (8) et (9) résultent de (3), (4) et (5) par la définition de l'équivalence $\overset{\iota}{=}$.

On peut donc dire que *le groupoïde des parties du groupoïde préordonné (ou ordonné) G, par rapport à l'opération (2), est préordonné par la relation* $\overset{\iota}{\leqq}$ *(respectivement* $\underset{\iota}{\leqq}$*).* La propriété (9) montre que les équivalences $\overset{\iota}{=}$ et $\underset{\iota}{=}$ sont compatibles, [1], avec l'opération (2). *L'ensemble quotient* $\mathscr{P}(G)/\overset{\iota}{=}$ *des classes* par rapport à l'opération

(10) $$\mathscr{K}^{\iota}(A) \,.\, \mathscr{K}^{\iota}(B) = \mathscr{K}^{\iota}(AB)$$

est donc un groupoïde ordonné par la relation $\overset{\iota}{\leqq}$. On peut voir aussi que si G est associatif ou possède une unité e, $\mathscr{P}(G)/\overset{\iota}{=}$ est un demi-groupe et l'unité en serait $\mathscr{K}^{\iota}(\{e\})$.

Proposition 2. *Si G est un groupe préordonné, H un sous-groupe, on a $aH \overset{\iota}{\leqq} bH \Leftrightarrow aH \underset{\iota}{\leqq} bH$, donc $aH \overset{\iota}{=} bH \Leftrightarrow aH \underset{\iota}{=} bH$.*

Démonstration. Soit $aH \overset{\iota}{\leqq} bH$ et prouvons que $aH \underset{\iota}{\leqq} bH$. On considère $x \in bH$ et on montre que $\exists\, u \in aH$ tel que $u \leqq x$. Soit $y \in aH$ quelconque. Par l'hypothèse $\exists\, z \in bH$ tel que $y \leqq z$. Si on prend $u = yz^{-1}x$, il satisfait les conditions requises:

1°. $u \in aH$ car $y \in aH$ et $z^{-1}x \in H$. En effet on a $x \in bH$ donc $x = bh$ et, d'autre part $z \in bH$ donc $z = bh_1$, d'où $z^{-1}x = h_1^{-1}b^{-1}bh = h_1^{-1}h \in H$, car H est un sous-groupe de G.

2°. $u \leqq x$ car $y \leqq z$ donc $y(z^{-1}x) \leqq z(z^{-1}x)$

On peut donc s'occuper d'une seule de ces relations, soit $\overset{\iota}{\leqq}$.

Proposition 3. *Si T est un ensemble préordonné et $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(T)$ est composé de parties disjointes de T telles que pour tout $E \in \mathscr{S}$ il existe une partie convexe*[3]*) $E' \in \mathscr{S} \cap \mathscr{K}^{\iota}(E)$ alors la relation $\overset{\iota}{\leqq}$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{S}$*, [4] (*et de même pour la relation duale $\underset{\iota}{\leqq}$*).

Démonstration. Soient en effet $E_1,\ E_2 \in \mathscr{S}$, $E_1 \overset{\iota}{\leqq} E_2$, $E_2 \overset{\iota}{\leqq} E_1$ donc $E_1 \overset{\iota}{=} E_2$. Il existe par hypothèse une partie convexe $E \in \mathscr{S}$, $E \overset{\iota}{=} E_1$. On a par définition $\forall\, a \in E$, $\exists\, a_1 \in E_1$, $\exists\, a' \in E$, $a \leqq a_1 \leqq a'$ et E étant convexe $a_1 \in E$. Mais E et E_1 étant disjointes ou confondues on a $E = E_1$. De même $E = E_2$, donc $E_1 = E_2$ c'est-à-dire la relation $\overset{\iota}{\leqq}$ est antisymétrique sur $\mathscr{S}$.

Corollaire. *Si H est un sous-groupe convexe d'un groupe préordonné G, $aH \overset{\iota}{=} bH$ implique $aH = bH$ pour $a,\ b \in G$ quelconques.*

Proposition 4. *Si H est un sous-groupe d'un groupe préordonné G, H est convexe si et seulement si la relation $\overset{\iota}{\leqq}$ définie dans l'ensemble des classes modulo H est antisymétrique.*

Démonstration. Selon le corollaire précédent il suffit de montrer que si $aH \overset{\iota}{=} bH$ implique $aH = bH$, alors H est convexe. Supposons en particulier que, quel que soit $a \in G$, de $H \overset{\iota}{=} aH$ il résulte $H = aH$. Soit $h_1 \leqq x \leqq h_2$, $h_1,\ h_2 \in H$, $x \in G$. Considérons la classe xH. On a:

1. $xH \overset{\iota}{\leqq} H$ car si on considère $xh \in xH$ quelconque, comme $x \leqq h_2$ on a aussi $xh \leqq h_2h$, $h_2h \in H$.

2. $H \overset{\iota}{\leqq} xH$ car si $h \in H$ est un élément quelconque on peut considérer $h_3 = h_1^{-1}h \in H$ et on aura $h_1 = hh_3^{-1} \leqq x$, donc $h \leqq xh_3$, $xh_3 \in xH$.

---

[3]) La partie E' de l'ensemble préordonné T est convexe si $a \leqq x \leqq b$, $a,\ b \in E'$ implique $x \in E'$.

Mais par hypothèse $xH \overset{\iota}{=} H$ implique $xH = H$, donc $x \in H$.

Corollaire. *Si D est un sous-groupe distingué d'un groupe préordonné G, le groupe G/D est un groupe ordonné par la relation $\leqq$ si et seulement si D est convexe.*

Lemme. *Le noyau K d'un homomorphisme croissant φ,* [2], *d'un groupe préordonné G dans un groupe ordonné G' est un sous-groupe distingué convexe de G.*

Démonstration. En effet si e' est l'unité de G' et $k_1 \leqq x \leqq k_2$, $k_1, k_2 \in K$; on a $e' \leqq \varphi(x) \leqq e'$ et G' étant ordonné $\varphi(x) = e'$, donc $x \in K$.

Théorème. *Soit G un groupe préordonné, D un sous-groupe distingué quelconque, G/D le groupe quotient préordonné par la relation $\overset{\iota}{\leqq}$ et $(G/D)/\overset{\iota}{=}$ le groupe des classes $\mathscr{K}^{\iota}(aD)$ ordonné par la relation associée $\overset{\iota}{\leqq}$. Alors $(G/D)/\overset{\iota}{=}$ est l'image par un épimorphisme croissant φ du groupe préordonné G, dont le noyau est le plus petit sous-groupe distingué convexe contenant D.*

Démonstration. On définit l'épimorphisme φ de la manière naturelle suivante

$$\varphi(a) = \mathscr{K}^{\iota}(aD) \Leftrightarrow a \in K_{aD} = \{x \in G/x \in a'D \in \mathscr{K}^{\iota}(aD)\}$$

et l'on a

$$\varphi(ab) = \mathscr{K}^{\iota}(abD) = \mathscr{K}^{\iota}(aD \,.\, bD) = \mathscr{K}^{\iota}(aD) \,.\, \mathscr{K}^{\iota}(bD) = \varphi(a) \,.\, \varphi(b)$$

selon (10). D'autre part $aD \overset{\iota}{\leqq} vD$ implique par définition $\mathscr{K}^{\iota}(aD) \leqq$ $\leqq \mathscr{K}^{\iota}(bD)$ c'est-à-dire φ est un épimorphisme croissant. Soit K_D le noyau de φ:

$$K_D = \{x \in G/x \in aD \in \mathscr{K}^{\iota}(D)\}$$

et I_D l'intersection des sous-groupes distingués convexes de G enveloppant D. Selon le lemme, K_D est sous-groupe distingué convexe contenant D donc

(11) $$I_D \subseteq K_D.$$

Montrons tout d'abord que

(12) $$I_D \overset{\iota}{=} K_D.$$

En effet (11) implique selon (1) que

(13) $$I_D \overset{\iota}{\leqq} K_D$$

et il reste à prouver que

(14) $$K_D \overset{\iota}{\leqq} I_D.$$

Soit $x \in K_D$; on a donc $x \in D$ ou bien $x \in aD$ et

$$aD \overset{\iota}{=} D. \tag{15}$$

Si $x \in D$ selon la définition de I_D on a aussi $x \in I_D$ et il existe donc $x \in I_D$ tel que $x \leqq x$ et (14) est vérifiée. Si $x \in aD$ il existe selon (15) $d \in D$ tel que $x \leqq d$; mais $d \in I_D$ donc (14) est valable en ce cas aussi.

Montrons maintenant que l'on a aussi

$$K_D \subseteq I_D. \tag{16}$$

Soit $x \in K_D$. De (12) et (7) on obtient

$$xI_D \overset{\iota}{=} xK_D$$

donc

$$xI_D \overset{\iota}{=} K_D.$$

Mais par transitivité on obtient de (12)

$$xI_D \overset{\iota}{=} I_D$$

donc selon le corollaire de la proposition 3, I_D étant sous-groupe convexe

$$xI_D = I_D$$

c'est-à-dire $x \in I_D$, ce qui prouve (16).

Remarques. 1. Le théorème reste évidemment valable si G est un groupe ordonné. La relation $\overset{\iota}{\leqq}$ est toujours une relation de préordre sauf si le sous-groupe distingué D est convexe, [5].

2. De nombreux groupes ordonnés conduisent au cas limite $I_D = G$ pour tous les sous-groupes distingués non-convexes, ainsi le groupe additif des nombres entiers ordonnés par grandeur. Mais il n'en est pas toujours ainsi. Considérons en effet le groupe préordonné étudié par W. Krull [6], des fonctions réelles positives définies pour $x \geqq x_0 > 0$, par rapport à la multiplication

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

où la relation de préordre est définie comme suit:

$$f \leqq g \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x_1 \,\forall\, x \geqq x_1 \; f(x) \leqq g(x).$$

Considérons dans ce groupe le sous-groupe D des fonctions pour lesquelles il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x > x_0$ on a $f(x) = \alpha$, ou α est un nombre réel positif quelconque. Il est évident que D est un sous-groupe non-convexe; en effet $1 \leqq 1 + e^{-x} \leqq 2$ et $1, 2 \in D$ mais $1 + e^{-x} \notin D$. En ce cas I_D est le sous-groupe B des fonctions f positives, bornées et telles que $\varliminf\limits_{x\to\infty} f(x) > 0$. En vérité on a $B \subseteq I_D$ car $f \in B \Rightarrow f.\, D \overset{\iota}{=} D$: 1. $\forall\, d \in D \,\exists\, d' \in D,\ f\,.\,d \leqq d'$: si l'on pose $d'(x) = \mu\,.\,d(x)$ où $\mu = \sup\limits_{x>x_0} f(x)$ on a $\mu\,.\,d(x) \in D$ et $f(x)\,.\,d(x) \leqq \mu\,.\,d(x)$ pour x suffisemment grand; 2. $\forall\, d \in D \,\exists\, d' \in D,\ d \in f\,.\,d'$ car il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour x assez grand, $f(x) > \lambda - \varepsilon$, où $\lambda = \varliminf\limits_{x\to\infty} f(x)$ donc on peut prendre $d'(x) = d(x)/\lambda - \varepsilon$ car $d/\lambda - \varepsilon \in D$ et $d(x) \leqq d(x)/\lambda - \varepsilon\,.\,f(x)$ pour x assez grand. Mais B est un sous-groupe (distingué) convexe enveloppant D et I_D est l'intersection des sous-groupes convexes contenant D; on a donc $B = I_D$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, *Algèbre*, ch. I., Hermann & Cie Paris 1942.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre*, ch. VI., Hermann & Cie Paris 1952.

[3] M. Froda-Schechter, *Préordres et équivalences dans l'ensemble des familles d'un ensemble*, Archivum Mathematicum (Brno), t. 1 (1965), 39—56.

[4] M. Froda-Schechter, *Relations induites par une relation de préordre*, Studia Universitatis Babes-Bolyai, Sr. Mathematica-Physica VIII, 2 (1968), 3—20.

[5] L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*. Pergamon Press. Budapest 1963.

[6] W. Krull, *Halbgeordnete Gruppen und asymptotische Größenordnung*, Archiv der Mathematik, v. III fasc. 1 (1952), 1—7.

Faculté de Mathématiques et Mécanique
Université Babeş-Bolyai de Cluj
Roumanie