Ivo Res

Asymptotische Formeln für die Lösungen der linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung

Archivum Mathematicum, Vol. 4 (1968), No. 3, 133--139

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104661`

ASYMPTOTISCHE FORMELN FÜR DIE LÖSUNGEN DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DRITTER ORDNUNG

IVO RES, Brno

Eingegangen am 13. Oktober 1967

Es sei die Differentialgleichung

$$(1) \qquad y''' + \sum_{i=1}^{3} a_i(x)\, y^{(3-i)} = 0$$

gegeben, deren Koeffizienten im Intervall $I = \langle x_0, \infty)$ stetige Funktionen sind. Im Falle, daß die Koeffizienten für $x \to \infty$ gegen Konstante streben, sind manche asymptotische Formeln für die Lösungen dieser Differentialgleichung bekannt. Ist $\lim\limits_{x\to\infty} a_i(x) = a_i$, $i = 1, 2, 3$ und bezeichnen λ_i, $i = 1, 2, 3$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

so gibt es unter weiteren Voraussetzungen über $a_i(x)$ ein Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 der Lösungen der Gleichung (1) von der Form

$$y_i = \exp\{\lambda_i x\}\,[1 + \varepsilon_i(x)], \qquad i = 1, 2, 3$$

mit

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon_i(x) = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

In diesem Artikel sind die Formeln für die Funktionen $\varepsilon_i(x)$ abgeleitet, welche die Lösungen von (1) mit einer beliebigen Genauigkeit auf dem ganzen Intervall I zu approximieren ermöglichen.

Der Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist ein Satz, welchen *M. Ráb* in [1] für die Systeme der gewöhnlichen Differentialgleichungen abgeleitet hat.

Es seien $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ quadratische Matrizen n-ter Ordnung mit stetigen Elementen im Intervall I. Es sei $\boldsymbol{Z}$ eine Fundamentalmatrix von Lösungen des Systems

$$(2) \qquad \mathbf{z}' = \boldsymbol{A}(x)\,\mathbf{z}$$

und es gelte

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{\infty} \|\, \boldsymbol{Z}^{-1}(x)\, \boldsymbol{B}(x)\, \boldsymbol{Z}(x) \,\|\, \mathrm{d}x < \infty.^{1)}$$

Setzen wir

(4) $$\mathbf{R}^0 = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{R}^n(x) = \int_x^\infty \mathbf{Z}^{-1}(s)\, \mathbf{B}(s)\, \mathbf{Z}(s)\, \mathbf{R}^{n-1}(s)\, \mathrm{d}s,$$

wo $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

Dann gibt es zu jeder Lösung y des Systems

(5) $$\mathbf{y}' = [\mathbf{A}(x) + \mathbf{B}(x)]\, \mathbf{y}$$

ein konstanter Vektor $\mathbf{c}$, so daß die Lösung $\mathbf{y}$ die Form

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{Z}(x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathbf{R}^n(x)\, \mathbf{c}$$

hat.

Satz 1. *Es seien $a_i(x)$, $\omega_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ stetige Funktionen in I und $z_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ unabhängige Lösungen der Differentialgleichung*

(6) $$z''' + \sum_{i=1}^{3} a_i(x)\, z^{(3-i)} = 0.$$

Es sei $W(x)$ wronksische Determinante der Funktion $z_i(x)$, $W_i(x)$ algebraisches Komplement des Elements $z_i''(x)$ in $W(x)$. Ist

(7) $$\int_{x_0}^{\infty} \left|\frac{1}{W(x)}\right| \left| W_k(x) \sum_{j=1}^{3} \omega_j(x)\, z_i^{(3-j)}(x) \right| \mathrm{d}x < \infty$$

für $i, k = 1, 2, 3$, so ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

(8) $$y''' + \sum_{i=1}^{3} [a_i(x) + \omega_i(x)]\, y^{(3-i)} = 0$$

mit der Formel

(9) $$y^{(i-1)}(x) = [z_1^{(i-1)}(x), \quad z_2^{(i-1)}(x), \quad z_3^{(i-1)}(x)] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \mathbf{R}^n(x)\, \mathbf{c}$$

für $i = 1, 2, 3$ gegeben. Die Matrizen $\mathbf{R}^n(x)$ sind durch die Beziehungen (4) mit

(10) $$\mathbf{Z}^{-1}(x)\, \mathbf{B}(x)\, \mathbf{Z}(x) = -\frac{W_i(x)}{W(x)} \sum_{j=1}^{3} \omega_j(x)\, z_k^{(3-j)}(x)$$

gegeben.

---

[1]) Das Symbol $\| \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Z} \|$ bezeichnet die Summe der absoluten Werte der Elemente der Matrix $\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Z}$.

Beweis. Betrachten wir die Systeme

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{z} \tag{11}$$

und

$$\mathbf{y}' = [\mathbf{A}(x) + \mathbf{B}(x)]\,\mathbf{y}, \qquad \mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_3 & -\omega_2 & -\omega_1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

welche den Differentialgleichungen (6) und (8) äquivalent sind.

Es sei

$$\mathbf{Z}(x) = [\overset{(i-1)}{\underset{k}{z}}(x)] \qquad i, k = 1, 2, 3$$

eine Fundamentalmatrix des Systems (11). Dann sind die Elemente der Matrix $\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Z} = [\varphi_{ik}(x)]$ durch die Formel

$$\varphi_{ik}(x) = -\frac{W_i(x)}{W(x)} \sum_{j=1}^{3} \omega_j(x)\, z_k^{(3-j)}(x)$$

gegeben.

Wegen (7) folgt unmittelbar aus dem erwähnten Satz von M. Ráb die Behauptung.

Satz 2. *Es seien a_1, a_2, a_3 reele Zahlen, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, $\omega_3(x)$ stetige Funktionen in I und es seien z_1, z_2, z_3 unabhängige Lösungen der Gleichung*

$$z''' + \sum_{i=1}^{3} a_i z^{(3-i)} = 0. \tag{13}$$

Es seien λ_1, λ_2, λ_3 verschiedene Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \qquad \operatorname{Re}\lambda_1 \leqq \operatorname{Re}\lambda_2 \leqq \operatorname{Re}\lambda_3.$$

Bezeichnen wir mit

$$\mu = \max\,(|\lambda_1 - \lambda_2|^{-1}, |\lambda_1 - \lambda_3|^{-1}, |\lambda_2 - \lambda_3|^{-1}),$$

$$K = \max\,(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|),$$

$$\chi_\nu = -\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\nu}}^{3} (\lambda_\nu - \lambda_s)^{-1}, \qquad \gamma_k(x) = \sum_{j=1}^{3} \lambda_k^{3-j}\omega_j(x).$$

Ist

$$\int_{x_0}^{\infty} \exp\{\operatorname{Re}(\lambda_3 - \lambda_1)\,x\}\,|\omega_i(x)|\,dx < \infty \quad \textit{für } i = 1, 2, 3, \tag{14}$$

so bilden die Funktionen

$$(15)\quad y_k^{(i-1)}(x) = \exp\{\lambda_k x\}\,[\lambda_k^{i-1} - \sum_{\nu=1}^{3} \lambda_\nu^{i-1}\chi_\nu \int_x^\infty \gamma_k(t)\exp\{(\lambda_k - \lambda_\nu)\,.$$
$$.\,(t - x)\}\,dt + \eta_{ik}(x)],$$

für i, $k = 1, 2, 3$ *ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung*

$$(16)\qquad y''' + \sum_{i=1}^{3} [a_i + \omega_i(x)]\, y^{(3-i)} = 0$$

und es gilt

$$(17)\qquad |\,\eta_{ik}(x)\,| \leqq MK^{i-1}\varkappa^2(x)\exp\{2\,\mathrm{Re}\,(\lambda_1 - \lambda_3)\,x\},$$

mit

$$\varkappa(x) = \mu^2 \int_x^\infty \exp\{\mathrm{Re}\,(\lambda_3 - \lambda_1)\,t\} \sum_{j=1}^{3} K^{3-j}\,|\,\omega_j(t)\,|\,dt,$$

$$M = \sup_{x\in I} \frac{9}{2}\exp\{3\varkappa(x)\,e^{\mathrm{Re}\,(\lambda_1-\lambda_3)\,x}\}.$$

Beweis. Unter den Bezeichnungen des vorigen Satzes bekommen wir durch die Wahl eines Fundamentalsystems der Lösungen von (13) in der Form

$$z_i(x) = \exp\{\lambda_i x\}, \qquad W(x) = \exp\{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x\} \prod_{\substack{j,s=1\\ j>s}}^{3} (\lambda_j - \lambda_s)$$

und

$$W_k(x) = (-1)^{3+k}\exp\{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{3} \lambda_i x\} \prod_{\substack{j,s=1\\ j>s\\ j\neq i}}^{3} (\lambda_j - \lambda_s).$$

Es gilt

$$\int_{x_0}^\infty \left|\frac{1}{W(x)}\right| \left|W_k(x) \sum_{j=1}^{3} \omega_j(x)\, z_i^{(3-j)}(x)\right| dx \leqq$$
$$\leqq \mu^2 \int_{x_0}^\infty \exp\{\mathrm{Re}\,(\lambda_3 - \lambda_1)\,x\} \sum_{j=1}^{3} K^{3-j}\,|\,\omega_j(x)\,|\,dx < \infty$$

und nach Satz 1 können wir ein Fundamentalsystem der Lösungen von (16) in der Form

$$(17)\qquad y_k^{(i-1)}(x) = \sum_{\nu=1}^{3} \lambda_\nu^{i-1}\exp\{\lambda_\nu x\}\, s_{\nu k}(x), \qquad i, k = 1, 2, 3$$

voraussetzen, wobei $s_{\nu k}(x)$ die Elemente der Matrix $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathbf{R}^n(x)$ bezeichnen. Die Matrizen $\mathbf{R}^n(x)$ sind durch die Relationen $\mathbf{R}^0(x) = \mathbf{E}$, $\mathbf{R}^n(x) = \int_x^{\infty} \mathbf{Z}^{-1}(t)\, \mathbf{B}(t)\, \mathbf{Z}(t)\, \mathbf{R}^{n-1}(t)\, dt$, gegeben.

Nach leichter Berechnung bekommen wir die Elemente $\varphi_{ik}(x)$ der Matrix $\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Z}$ in der Form

$$\varphi_{ik}(x) = \chi_i \gamma_k(x) \exp\{(\lambda_k - \lambda_i)\, x\}.$$

Setzen wir

$$\mathbf{R}^n(x) = [r_{ik}^n(x)], \qquad \vartheta_{\nu k} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n r_{\nu k}^n(x).$$

Dann ist

$$s_{\nu k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r_{\nu k}^n(x) = r_{\nu k}^0 - r_{\nu k}^1(x) + \vartheta_{\nu k}(x),$$

mit $r_{\nu k}^0 = 0$ für $\nu \neq k$, $r_{kk}^0 = 1$ und die Formel (17) bekommt die Form

$$y_k^{(i-1)}(x) = \sum_{\nu=1}^{3} \lambda_\nu^{i-1} \exp\{\lambda_\nu x\}\, [r_{\nu k}^0 - r_{\nu k}^1(x) + \vartheta_{\nu k}(x)]. \tag{18}$$

Man kann leicht durch die Anwendung der Methode der vollständigen Induktion zeigen, daß die Abschätzungen

$$|\, r_{ik}^n(x)\, | \leqq \frac{3^{n-1}}{n!}\, \varkappa^n(x) \exp\{\mathrm{Re}\,[\lambda_k - \lambda_i + \mathrm{n}(\lambda_1 - \lambda_3)]\, x\} \tag{19}$$

für $i, k = 1, 2, 3$ gelten.

Setzen wir

$$\sum_{j=1}^{3} K^{3-j} \omega_j(x) = \gamma(x).$$

Für $n = 1$ ist

$$|\, r_{ik}^1(x)\, | = |\int_x^{\infty} \varphi_{ik}(t)\, dt\, | = |\, \chi_i \int_x^{\infty} \gamma_k(t) \exp\{(\lambda_k - \lambda_i)\, t\}\, dt\, | \leqq$$

$$\leqq \mu^2 \int_x^{\infty} \gamma(t) \exp\{\mathrm{Re}\,(\lambda_k - \lambda_i)\, t\}\, dt \leqq \varkappa(x) \exp\{\mathrm{Re}\,(\lambda_k + \lambda_1 - \lambda_i - \lambda_3)\, x\},$$

so daß die Behauptung für $n = 1$ gilt. Setzen wir jetzt die Richtigkeit der Ungleichung (19) voraus, so bekommen wir

$$|\, r_{ik}^{n+1}(x)\, | = |\int_x^{\infty} \sum_{l=1}^{3} \varphi_{il}(t)\, r_{lk}^n(t)\, dt\, | \leqq$$

$$\leqq \int_x^\infty \sum_{l=1}^3 | \chi_i \gamma_l(t) \exp\{(\lambda_l - \lambda_i)t\} r_{lk}^n(t) | \, dt \leqq$$

$$\leqq \mu^2 \int_x^\infty \sum_{l=1}^3 | \gamma_l(t) | \exp\{\mathrm{Re}(\lambda_l - \lambda_i)t\} .$$

$$. \frac{3^{n-1}}{n!} \varkappa^n(t) \exp\{\mathrm{Re}[\lambda_k - \lambda_l + n(\lambda_1 - \lambda_3)]t\} \, dt \leqq$$

$$\leqq \frac{3^n}{n!} \mu^2 \int_x^\infty \gamma(t) \exp\{\mathrm{Re}[\lambda_k - \lambda_i + n(\lambda_1 - \lambda_3)]t\} \, dt.$$

Wegen

$$\varkappa'(x) = -\mu^2 \gamma(x) \exp\{\mathrm{Re}(\lambda_3 - \lambda_1)x\}$$

ist

$$| r_{ik}^{n+1}(x) | \leqq \frac{3^n}{(n+1)!} \varkappa^n(x) \exp\{\mathrm{Re}[\lambda_k - \lambda_i + (n+1)(\lambda_1 - \lambda_3)]x\}.$$

Damit ist die Richtigkeit der Formeln (19) bewiesen.
Aus (18) bekommt man nach leichter Berechnung

$$y_k^{(i+1)}(x) = \lambda_k^{i-1} \exp\{\lambda_k x\} -$$
$$- \sum_{\nu=1}^3 \lambda_\nu^{i-1} \exp\{\lambda_\nu x\} \chi_\nu \int_x^\infty \gamma_k(t) \exp\{(\lambda_k - \lambda_\nu)t\} \, dt +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^3 \lambda_\nu^{i-1} \exp\{\lambda_\nu x\} \vartheta_{\nu k}(x) = \exp\{\lambda_k x\} [\lambda_k^{i-1} -$$
$$- \sum_{\nu=1}^3 \lambda_\nu^{i-1} \chi_\nu \int_x^\infty \gamma_k(t) \exp\{(\lambda_k - \lambda_\nu)(t - x)\} \, dt + \eta_{ik}(x)]$$

mit

$$\eta_{ik}(x) = \sum_{\nu=1}^3 \lambda_\nu^{i-1} \exp\{(\lambda_\nu - \lambda_k)x\} \vartheta_{\nu k}(x).$$

Damit ist die Formel (15) bewiesen.
Schließlich haben wir

$$| \eta_{ik}(x) | \leqq \sum_{\nu=1}^3 | \lambda_\nu |^{i-1} \exp\{\mathrm{Re}(\lambda_\nu - \lambda_k)x\} | \sum_{n=2}^\infty r_{\nu k}^n(x) | \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^3 K^{i-1} \exp\{\mathrm{Re}(\lambda_\nu - \lambda_k)x\} \sum_{n=2}^\infty \frac{3^{n-1}}{n!} \varkappa^n(x) \exp .$$

$$. \{\mathrm{Re}[\lambda_k - \lambda_\nu + n(\lambda_1 - \lambda_3)]x\} =$$

$$= K^{i-1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} [3\varkappa(x) \exp \{\mathrm{Re}\,(\lambda_1 - \lambda_3)\, x\}]^n \leqq$$

$$\leqq MK^{i-1}\varkappa^2(x) \exp \{2\, \mathrm{Re}\,(\lambda_1 - \lambda_3)\, x\},$$

so daß (16) gilt und die Behauptung ist voll bewiesen.

LITERATUR

[1] Ráb M.: *Les développements asymptotiques des solutions de l'équation* $(py')' + qy = 0$. Arch. Math. (Brno) T 2 (1966), 1—17.

Mathematisches Institut
Forst- und Ackerbauhochschule, Brno
Tschechoslowakei