Hans-Jürgen Hoehnke

Die Radikale und das Prinzip des maximalen homomorphen Bildes in Bikategorien

Archivum Mathematicum, Vol. 3 (1967), No. 4, 191--207

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104645

DIE RADIKALE UND DAS PRINZIP DES MAXIMALEN HOMOMORPHEN BILDES IN BIKATEGORIEN

Von Hans-Jürgen Hoehnke in Berlin

Eingegangen am 17. August 1967

1. EINLEITUNG

Ausgehend von dem Prinzip des maximalen homomorphen Bildes eines gegebenen Typs[1]) wurden in [7] die Grundzüge einer Theorie der Radikale in allgemeinen Algebren entwickelt. Mit den vorliegenden Ausführungen soll gezeigt werden, daß sich eine solche Theorie der Radikale auch mit Hilfe von Bikategorien begründen läßt, die dann nicht nur auf Algebren, sondern allgemeiner auch auf partielle Algebren sowie auf Mengen mit Operationen und Relationen (Strukturen im Sinne von [4] und [8]) angewendet werden kann. Im Unterschied zu [1], [9] und [10], wo das Radikal eines Objekts a in einer Kategorie durch ein Ideal von a dargestellt wird, ist es in unserem Fall ein Faktorobjekt von a. Alle hierbei benötigten Resultate aus [8] über den Verband $V(a)$ der Faktorobjekte eines Objekts a in einer Bikategorie werden in Abschnitt 2 zusammengestellt. Den Mittelpunkt unserer Betrachtungen bildet die in Abschnitt 3 beschriebene Galoisverbindung zwischen den Teilklassen einer gegebenen Klasse L von Objekten einer Bikategorie $\mathbf{D}$ und den Teilklassen der Klasse $\mathfrak{Q}(L)$ aller auf L definierten Quasiradikale. Dies bedingt einen etwas anderen Aufbau als in [7]. Während in den Abschnitten 4, 5 und 6 die bezüglich dieser Galoisverbindung abgeschlossenen Teilklassen von L und von $\mathfrak{Q}(L)$ diskutiert werden, enthält Abschnitt 7 verschiedene Charakterisierungen der Radikale, Abschnitt 8 einige Bemerkungen zur Frage der Fortsetzbarkeit von Quasiradikalen und von Radikalen und Abschnitt 9 eine kategorientheoretische Definition des M-Radikals aus [7]. Einige Resultate aus [7] sind in der vorliegenden Arbeit noch nicht kategorientheoretisch verallgemeinert worden. Das bedeutet aber nicht, daß dies nicht möglich sei; vielmehr soll darauf an anderer Stelle im Zusammenhang mit modelltheoretischen Fragen näher eingegangen werden.

Übrigens besteht eine formale Analogie der hier beschriebenen Galoisverbindung zu der aus der Modelltheorie bekannten Galoisver-

[1]) Vergl. [2], p. 18, Proposition 1.7, wo dieses Prinzip für Gruppoide (= binäre Systeme) formuliert ist.

bindung zwischen Teilklassen von Strukturen und Teilmengen von Sätzen des Prädikatenkalküls erster Stufe (mit Identität) (für Strukturen vergl. [4] und [6], für solche ohne Operationen vergl. [3]). Dabei tritt an die Stelle der Aussage, ein Satz sei in einer Struktur gültig, in unserem Fall die Aussage, daß ein Quasiradikal f für ein Objekt a den kleinsten Wert $o(a) \in V(a)$ annimmt, d. h. also, die Gültigkeit der Gleichung $f(a) = o(a)$. Der modelltheoretischen Äquivalenz zwischen Sätzen entspricht hier eine Äquivalenz $f \approx g \Leftrightarrow$ (für alle $a \in L\,(f(a) = o(a) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(a) = o(a))$) zwischen Quasiradikalen f, g. Dem bekannten Satz der Modelltheorie (vergl. zum Beisp. [3], p. 212, Theorem 5.4), wonach das von einer Teilmenge Σ der Lindenbaum-Algebra $\mathscr{L}$ erzeugte Dualideal mit der modelltheoretischen Abschließung Σ^{**} von Σ übereinstimmt, entspricht unser Satz 4.5. Doch im Unterschied zur modelltheoretischen Situation handelt es sich dabei in unserem Fall stets um ein Dualhauptideal (des Verbandes $\mathfrak{Q}(L)^{\approx} = \mathfrak{Q}(L)/(\approx)$). Ist $f^{\approx}$ eine das Quasiradikal f enthaltende Restklasse von $\mathfrak{Q}(L)$ bezüglich $(\approx)$ (etwa das Erzeugende eines gegebenen Dualhauptideals von $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$), so enthält $f^{\approx}$ genau ein Radikal. In diesem Sinne kann also ein Quasiradikal stets durch ein Radikal ersetzt werden. Wichtige Unterschiede zwischen Quasiradikalen und Radikalen zeigen sich bei ihrer Darstellung als Kerne von Quasischemata (5.2) bzw. von Schemata (7.3b)), vor allem aber in konkreten Fällen, in denen es auf den speziellen syntaktischen Charakter der Definitionen dieser Funktionen ankommt. So kann beispielsweise der Fall eintreten, daß sich ein Quasiradikal und das dazu äquivalente Radikal nicht im gleichen Logikkalkül definieren lassen. Auch auf derartige Fragen soll an anderer Stelle näher eingegangen werden.

2. GRUNDLEGENDE BEGRIFFE UND SÄTZE ÜBER FAKTOROBJEKTE

In diesem Abschnitt werden einige Grundbegriffe und Sätze über Faktorobjekte in Bikategorien aus der Arbeit [8] zusammengestellt, auf die unsere späteren Überlegungen aufbauen.

Gegeben sei eine abstrakte Kategorie $\mathbf{D} = (D, \Delta)$; dabei sei $D =$ $= \{a, b, c, \ldots\}$ die Klasse der Objekte, $\Delta = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ die Klasse der Morphismen und $\{\iota_a\}_{a \in D}$ die Klasse der identischen Morphismen von $\mathbf{D}$. Wenn $\iota_a \alpha = \alpha \iota_b = \alpha$, so schreiben wir auch $\alpha = \alpha(a \to b)$. Insbesondere ist $\iota_a = \iota_a(a \to a)$. Der Morphismus $\alpha(a \to b)$ heißt umkehrbar oder auch eine Äquivalenz, falls ein Morphismus $\alpha^{-1}(b \to a)$ existiert, so daß $\alpha\alpha^{-1} = \iota_a$ und $\alpha^{-1}\alpha = \iota_b$. Ein Epimorphismus (bzw. Monomorphismus) ist ein Morphismus α mit der Eigenschaft, daß, für alle Morphismen β und γ von $\mathbf{D}$, aus $\alpha\beta = \alpha\gamma$ stets folgt $\beta = \gamma$ (bzw. aus $\beta\alpha = \gamma\alpha$ stets folgt $\beta = \gamma$) . $\mathbf{L} = (L, \Lambda)$ heißt eine Teilkategorie von $\mathbf{D}$, wenn L eine Teilklasse von D, Λ eine Teilklasse von Δ und $\mathbf{L}$ bezüglich der in $\mathbf{D}$ erklärten partiellen Operation eine Kategorie ist, wobei die Klasse der identischen Morphismen von $\mathbf{L}$ in derjenigen von $\mathbf{D}$ enthalten ist. Die Teilkategorie $\mathbf{L} = (L, \Lambda)$ von $\mathbf{D}$ heißt eine Unterkategorie von $\mathbf{D}$, wenn $L = D$. Bezeichnet E (bzw. M) die Klasse aller Epimorphismen (bzw. aller Monomorphismen) von $\mathbf{D}$, so sind $\mathbf{E} = (D, E)$ und $\mathbf{M} = (D, M)$ Unterkategorien von $\mathbf{D}$. Wenn $\mathbf{C} = (D, \Gamma)$ und $\mathbf{N} = (D, N)$ zwei Unterkategorien von $\mathbf{D}$ sind, so heißt $\mathbf{D}$ eine Bikategorie (bezüglich $\mathbf{C}$ und $\mathbf{N}$), falls folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. $\Gamma \subseteq E$ und $N \subseteq M$. 2. $\Gamma \cap N$ besteht genau aus den umkehrbaren Morphismen von $\mathbf{D}$. 3. Jedes $\alpha \in \Delta$ läßt sich bis auf Äquivalenzen eindeutig in der Form $\alpha = \varepsilon\mu$ mit $\varepsilon \in \Gamma$ und $\mu \in N$ schreiben (*Standardfaktorisierung*); ist also zugleich $\alpha = \varepsilon'\mu'$ mit $\varepsilon' \in \Gamma$ und $\mu' \in N$, so existiert ein umkehrbarer Morphismus ξ, so daß $\varepsilon' = \varepsilon\xi$ und $\mu' = \xi^{-1}\mu$.

In der Bikategorie $\mathbf{D}$ besteht folgende Implikation:

2.1. *Wenn α, $\alpha\beta \in \Gamma$ und $\beta \in \Delta$, so $\beta \in \Gamma$.*

Für α, $\beta \in \Gamma$ sei $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow$ es existiert $\gamma \in \Gamma$ mit $\beta = \alpha\gamma$. $(\leq)$ ist eine reflexive und transitive Relation auf Γ und gibt gemäß $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \alpha)$ Anlaß zu einer Äquivalenz $(\sim)$ auf Γ. Genau dann ist $\alpha \sim \beta$, wenn ein umkehrbarer Morphismus ξ existiert mit $\alpha\xi = \beta$. Mit $\alpha^\sim$ werde diejenige Restklasse von Γ bezüglich $(\sim)$ bezeichnet, die das Element $\alpha \in \Gamma$ enthält. Für $\alpha = \alpha(a \to b) \in \Gamma$ heißt $\alpha^\sim$ auch ein Faktorobjekt des Objekts a in der Bikategorie $\mathbf{D}$ bezüglich $\mathbf{C}$ und $\mathbf{N}$. In der Gesamtheit $\Gamma^\sim$ aller Restklassen von Γ bezüglich $(\sim)$ wird durch $\alpha^\sim \leq \beta^\sim$, falls $\alpha \leq \beta$, eindeutig eine Teilordnung $(\leq)$ definiert. Die Gesamtheit der Faktorobjekte eines Objekts a der Bikategorie $\mathbf{D}$ sei $V(a)$. Es ist also $V(a) = \{\alpha^\sim \mid \alpha^\sim \in \Gamma^\sim,\ \iota_a^\sim \leq \alpha^\sim\}$. In [8] werden Bedingungen angegeben, unter denen $V(a)$ für jedes $a \in D$ ein vollständiger Verband ist.

Ist $\gamma = \varepsilon\mu$ eine Standardfaktorisierung des Morphismus γ, so soll $\varepsilon^\sim = \operatorname{coim}\gamma$ das (durch γ eindeutig bestimmte) Kobild von γ genannt werden. Jeder Morphismus $\gamma(a \to b)$ gibt gemäß $\beta^\sim\gamma_q = \operatorname{coim}(\gamma\beta)$, $\beta^\sim \in V(b)$, Anlaß zu einer Abbildung γ_q von $V(b)$ in $V(a)$.

2.2. *Für $\delta(c \to a) \in \Delta$ gilt*

$$\operatorname{coim}\delta \leq \operatorname{coim}(\delta\gamma) = (\operatorname{coim}\gamma)\,\delta_q.$$

2.3. *$(a \to V(a)$ für $a \in D$, $\gamma \to \gamma_q$ für $\gamma \in \Delta)$ definiert einen kontravarianten Funktor der Bikategorie $\mathbf{D}$ in die Kategorie aller Teilordnungen mit den monotonen Abbildungen als Morphismen; dabei ist vorausgesetzt, daß $V(a)$ für jedes $a \in D$ eine Menge sei. Für einen umkehrbaren Morphismus γ ist γ_q ein Isomorphismus von $V(b)$ auf $V(a)$. Für $\gamma(a \to b) \in \Gamma$ ist γ_q eine injektive Abbildung von $V(b)$ in $V(a)$, und zwar auf $V_\gamma(a) =$ $= \{\alpha^\sim \mid \alpha^\sim \in V(a),\ \gamma^\sim \leq \alpha^\sim\}$.*

Das Infimum bzw. Supremum einer Familie $\{\alpha_i^\sim\}_{i\in I} \subseteq V(a)$ werde mit $\inf\{\alpha_i^\sim \mid i \in I\}$ bzw. mit $\sup\{\alpha_i^\sim \mid i \in I\}$ bezeichnet. Ist dabei $\alpha_i = \alpha_i(a \to a_i)$ und $\inf\{\alpha_i^\sim \mid i \in I\} = \iota_a^\sim$, so heißt das Objekt a ein *subdirektes Produkt in* $\mathbf{C}$ der Objekte a_i, $i \in I$.[2]) In diesem Fall schreiben wir auch $a = \Pi_{i\in I}\, a_i(\alpha_i)$. Wenn $V(a)$ für jedes $a \in D$ ein vollständiger Verband ist, so entspricht jedem Morphismus $\gamma(a \to b)$ gemäß $\alpha^\sim\gamma_q^* = \inf\{\beta^\sim \mid \beta^\sim \in V(b),\ \alpha^\sim \leq \beta^\sim\gamma_q\}$, $\alpha^\sim \in V(a)$, eine Abbildung γ_q^* von $V(a)$ in $V(b)$.

2.4. *Es sei $V(a)$ für jedes Objekt a der Bikategorie $\mathbf{D}$ ein vollständiger Verband. Dann sind folgende Bedingungen paarweise einander gleichwertig:*

a) $\alpha^\sim \leq \alpha^\sim\gamma_q^*\gamma_q$ *für alle* $\alpha^\sim \in V(a)$;

b) γ_q *ist* δ-*treu*;[3])

c) $\alpha^\sim \leq \delta^\sim\gamma_q \Leftrightarrow \alpha^\sim\gamma_q^* \leq \delta^\sim$, *für alle* $\alpha^\sim \in V(a)$, $\delta^\sim \in V(b)$;

d) *das Paar* $\gamma_q(V(b)^* \to V(a))$, $\gamma_q^*(V(a) \to V(b)^*)$ *ist eine Galoisverbindung, wobei* $V(b)^*$ *den zu* $V(b)$ *dualen Verband bezeichnet;*

e) $\gamma_q^*\gamma_q$ *bzw.* $\gamma_q\gamma_q^*$ *ist eine Hüllenoperation auf* $V(a)$ *bzw. auf* $V(b)^*$.

2.5. *Wenn γ_q δ-treu ist, so ist γ_q^* σ-treu.*

2.6. *Es sei $V(a)$ für alle Objekte a der Bikategorie $\mathbf{D}$ ein vollständiger Verband. Überdies sei die Bedingung 2.4c) erfüllt. Dann ist $(a \to V(a)$ für $a \in D$, $\gamma \to \gamma_q^*$ für $\gamma \in \Delta)$ ein kovarianter Funktor von $\mathbf{D}$ in die Kategorie aller vollständigen Verbände mit den σ-treuen Abbildungen als Morphismen. Für einen umkehrbaren Morphismus γ ist γ_q^* ein Verbandsisomorphismus und $\gamma_q^* = (\gamma_q)^{-1} = (\gamma^{-1})_q$. Für $\gamma(a \to b) \in \Gamma$ ist γ_q^* eine suvjektive Abbildung, und zwar gilt $\delta^\sim\gamma_q\gamma_q^* = \delta^\sim$ für alle $\delta^\sim \in V(b)$.*

Es sei noch bemerkt, daß 2.4c), wie in [8] bewiesen wird, fast unter den gleichen hinreichenden Bedingungen erfüllt ist, unter denen sich $V(a)$ für alle $a \in D$ als vollständiger Verband erweist.

3. EINE GALOISVERBINDUNG ZWISCHEN OBJEKTKLASSEN UND QUASIRADIKALKLASSEN

Hier wie auch in den folgenden Abschnitten werde vorausgesetzt, daß $V(a)$ für alle $a \in D$ ein vollständiger Verband und 2.4c) erfüllt sei. $o(a)$ bezeichne das kleinste und $e(a)$ das größte Element von $V(a)$. $\mathbf{L} = (L, \Lambda)$ sei eine gegebene Teilkategorie der Bikategorie $\mathbf{D}$, die

---

[2]) Hierbei ist auch der Fall $I = \emptyset$ zugelassen: Ein Objekt a ist offenbar genau dann subdirektes Produkt in $\mathbf{C}$ einer leeren Familie von Objekten, wenn $|V(a)| = 1$. Dabei bedeutet $|M|$ die Kardinalzahl einer Menge M.

[3]) Eine monotone Abbildung φ eines vollständigen Verbandes V_1 in einen vollständigen Verband V_2 heißt δ-treu (bzw. σ-treu), wenn für jede (leere oder nichtleere) Familie $\{s_i\}_{i\in I}$ von Elementen $s_i \in V_1$ gilt $\inf\{s_i\varphi \mid i \in I\} \leq (\inf\{s_i \mid i \in I\})\,\varphi$ bzw. $(\sup\{s_i \mid i \in I\})\,\varphi \leq \sup\{s_i\varphi \mid i \in I\}$.

folgenden zwei Bedingungen genügt: 1. **L** ist Teilkategorie von **C**. 2. Aus $\gamma(a \to b) \in \Gamma$ und $a \in L$ folgt stets $\gamma \in \Lambda$. Hiernach ist **L** durch die Klasse L der Objekte von **L** eindeutig bestimmt. Weiter werde angenommen, daß L eine Menge sei; diese Annahme dient vor allem der Vereinfachung der Ausdrucksweise, und unsere Betrachtungen ließen sich auch ohne eine solche Einschränkung durchführen.

Es sei $\mathfrak{G}(L)$ die Klasse aller auf L erklärten Funktionen g mit $g(a) \in V(a)$, $a \in L$. Für $f, g \in \mathfrak{G}(L)$ sei $f \leq g$, falls $f(a) \leq g(a)$ für alle $a \in L$. Man überlegt sich leicht, daß $\mathfrak{G}(L)$ bezüglich $(\leq)$ ein vollständiger Verband ist; bezeichnet $\bigwedge X$ bzw. $\bigvee X$ für $X \subseteq \mathfrak{G}(L)$ das Infimum bzw. Supremum aller $f \in X$, so gilt $(\bigwedge X)(a) = \inf\{f(a) \mid f \in X\}$ und $(\bigvee X)(a) = \sup\{f(a) \mid f \in X\}$. Diejenige Funktion auf L, deren Wert $o(a)$ bzw. $e(a)$ für $a \in L$ ist, werde mit o bzw. e bezeichnet; sie ist das kleinste bzw. größte Element von $\mathfrak{G}(L)$.

Eine Funktion $f \in \mathfrak{G}(L)$ heißt ein Quasiradikal auf L, wenn

$$f(a)\,\gamma_q^* \leq f(b) \text{ für alle } \gamma(a \to b) \in \Lambda.$$

Zufolge 2.4c) ist diese Bedingung gleichbedeutend mit

$$f(a) \leq f(b)\,\gamma_q \text{ für alle } \gamma(a \to b) \in \Lambda.$$

Es sei $\mathfrak{Q}(L)$ die Gesamtheit aller Quasiradikale auf L.

3.1. *$\mathfrak{Q}(L)$ ist ein vollständiger Teilverband von $\mathfrak{G}(L)$; o ist das kleinste, e das größte Element von $\mathfrak{Q}(L)$.*

Beweis. Man rechnet leicht nach, daß $\mathfrak{Q}(L)$ bezüglich der aus $\mathfrak{G}(L)$ übernommenen Inklusion $(\leq)$ ein vollständiger Durchschnittsteilbund von $\mathfrak{G}(L)$ ist.[4] Wir zeigen, daß $\mathfrak{Q}(L)$ auch ein vollständiger Vereinigungsteilbund von $\mathfrak{G}(L)$ ist. Für $X \subseteq \mathfrak{Q}(L)$ sei $\bigvee^q X$ das Supremum der Elemente aus X in $\mathfrak{Q}(L)$. Es ist zu beweisen, daß $\bigvee^q X \leq \bigvee X$. Dies ist klar für $X = \emptyset$, da dann $\bigvee^q X = \bigvee X = o$. Sei daher $X \neq \emptyset$. Da $f \leq \bigvee X$ für alle $f \in X$, genügt es nachzuweisen, daß $\bigvee X \in \mathfrak{Q}(L)$; dann ist gewiß $\bigvee^q X \leq \bigvee X$. Für $f \in X$ und $\gamma(a \to b) \in \Lambda$ ist $f(a) \leq f(b)\,\gamma_q \leq (\sup\{f(b) \mid f \in X\})\,\gamma_q = (\bigvee X)(b)\,\gamma_q$ und somit $(\bigvee X)(a) = \sup\{f(a) \mid f \in X\} \leq (\bigvee X)(b)\,\gamma_q$.

---

[4]) Eine Teilmenge A eines vollständigen Verbandes V heißt vollständiger Durchschnittsteilbund (bzw. vollständiger Vereinigungsteilbund) von V (vergl. [5], p. 29), wenn A bezüglich der aus V übernommenen Inklusion ein vollständiger Verband ist und das in A gebildete Infimum (bzw. Supremum) der Elemente einer beliebigen Teilmenge von A mit dem in V gebildeten Infimum (bzw. Supremum) dieser Elemente übereinstimmt. Bekanntlich ist A genau dann ein vollständiger Durchschnittsteilbund von V, wenn A ein Hüllensystem von V ist, d. h., wenn das in V gebildete Infimum der Elemente einer (leeren oder nichtleeren) Teilmenge von A stets ein Element von A ist. Eine entsprechende Charakterisierung besteht für die vollständigen Vereinigungsteilbünde.

Es sei $\mathfrak{P}(L)$ die Klasse aller Teilklassen von L und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ die Klasse aller Teilklassen von $\mathfrak{Q}(L)$. Für $K \in \mathfrak{P}(L)$ und $X \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ setzen wir abkürzend (Ann = Annullator)

$$\operatorname{Ann} K = \{f \mid f \in \mathfrak{Q}(L), f(a) = o(a) \text{ für alle } a \in K\}$$

und

$$\operatorname{Ann} X = \{a \mid a \in L, f(a) = o(a) \text{ für alle } f \in X\}.$$

Aus diesen Definitionen folgt unmittelbar:

3.2. *Die beiden durch* Ann K *für* $K \in \mathfrak{P}(L)$ *und* Ann X *für* $X \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ *gegebenen Abbildungen* $\mathfrak{P}(L) \to \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ *und* $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L) \to \mathfrak{P}(L)$ *bilden eine Galoisverbindung, d.h., es gilt für alle* $K, K_1, K_2 \in \mathfrak{P}(L)$ *und alle* $X, X_1, X_2 \in \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$

$$K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow \operatorname{Ann} K_1 \supseteq \operatorname{Ann} K_2,$$
$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \operatorname{Ann} X_1 \supseteq \operatorname{Ann} X_2,$$
$$K \subseteq \operatorname{Ann}^2 K,$$
$$X \subseteq \operatorname{Ann}^2 X.$$

Aus den vorstehenden Beziehungen folgt bekantlich

$$\operatorname{Ann} X = \operatorname{Ann}^3 X,$$
$$\operatorname{Ann} K = \operatorname{Ann}^3 K.$$

Zufolge 3.2 ist $\operatorname{Ann}^2 K$ für $K \in \mathfrak{P}(L)$ eine Hüllenoperation im vollständigen Verband $\mathfrak{P}(L)$ und $\operatorname{Ann}^2 X$ für $X \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ eine Hüllenoperation im vollständigen Verband $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$. Es sei $\mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$ bzw. $\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ die Gesamtheit der bezüglich Ann^2 abgeschlossenen Elemente von $\mathfrak{P}(L)$ bzw. von $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$. Da $K = \operatorname{Ann}^2 K$ gleichbedeutend ist mit $K = \operatorname{Ann} X$ für geeignetes $X \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ und ebenso $X = \operatorname{Ann}^2 X$ gleichbedeutend ist mit $X = \operatorname{Ann} K$ für geeignetes $K \in \mathfrak{P}(L)$, so ist

$$\mathfrak{C}\mathfrak{P}(L) = \{K \mid K \in \mathfrak{P}(L), K = \operatorname{Ann} X, X \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)\}$$

und

$$\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L) = \{X \mid X \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L), X = \operatorname{Ann} K, K \in \mathfrak{P}(L)\}.$$

Bekanntlich ist die durch Ann K für $K \in \mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$ gegebene Abbildung ein Antiisomorphismus von $\mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$ auf $\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ mit der durch Ann X für $X \in \mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ definierten Umkehrabbildung.

4. EINE CHARAKTERISIERUNG VON $\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$

4.1. *Für* $K \in \mathfrak{P}(L)$ *ist* Ann K *ein Hauptideal von* $\mathfrak{Q}(L)$.

Beweis. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathfrak{Q}(L)$ heißt ein Ideal von $\mathfrak{Q}(L)$, wenn das in $\mathfrak{Q}(L)$ gebildete Supremum endlich vieler Elemente aus X wieder zu X gehört und für $f \in X$ und $g \in \mathfrak{Q}(L)$ aus $g \leq f$ stets folgt $g \in X$. Ein Hauptideal ist das von einem Element erzeugte Ideal. Sei $f \in \operatorname{Ann} K$ und $g \leq f$. Dann gilt $g(a) \leq f(a) = o(a)$ für alle $a \in K$, somit $g \in \operatorname{Ann} K$. Für eine beliebige Teilmenge $X \subseteq \operatorname{Ann} K$ ist $\bigvee X \in \mathfrak{Q}(L)$ und $(\bigvee X)(a) = \sup\{f(a) \mid f \in X\} = o(a)$, $a \in K$, d. h. $\bigvee X \in \operatorname{Ann} K$. Insbesondere ist $\bigvee \operatorname{Ann} K \in \operatorname{Ann} K$, also $\operatorname{Ann} K = \{f \mid f \in Q(L),\ f \leq \bigvee \operatorname{Ann} K\}$ ein Hauptideal.

4.2. *Wenn $f \in \mathfrak{Q}(L)$ das Erzeugende des Hauptideals* $\operatorname{Ann}^2 X$ *ist, wobei $X \subseteq \mathfrak{Q}(L)$, so ist* $\operatorname{Ann} X = \operatorname{Ann} f$.

Beweis. Aus $f \in \operatorname{Ann}^2 X$ folgt $\operatorname{Ann} X = \operatorname{Ann}^3 X \subseteq \operatorname{Ann} f$. Aus $X \subseteq \operatorname{Ann}^2 X$ und $g \in X$ erhält man $g \leq f$ und $g(a) \leq f(a) = o(a)$ für alle $a \in \operatorname{Ann} f$, d. h. $a \in \operatorname{Ann} X$ und $\operatorname{Ann} f \subseteq \operatorname{Ann} X$.

In $\mathfrak{Q}(L)$ wird durch $f \prec g$, falls $f, g \in \mathfrak{Q}(L)$ und $\operatorname{Ann} f \subseteq \operatorname{Ann} g$, eine reflexive und transitive Relation $(\prec)$ definiert. Es sei bemerkt, daß aus $g \leq f$; $f, g \in \mathfrak{Q}(L)$, stets folgt $f \prec g$. Setzt man $f \approx g$, falls $f \prec g$ und $g \prec f$, so erhält man eine Äquivalenzrelation $(\approx)$ auf $\mathfrak{Q}(L)$. Es sei $f^{\approx}$ diejenige Restklasse von $\mathfrak{Q}(L)$ bezüglich $(\approx)$, die das Element $f \in \mathfrak{Q}(L)$ enthält, und $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$ die Gesamtheit der Restklassen von $\mathfrak{Q}(L)$ bezüglich $(\approx)$. Gemäß $f^{\approx} \prec g^{\approx}$, falls $f, g \in \mathfrak{Q}(L)$ und $f \prec g$, wird dann $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$ zu einer Teilordnung in bezug auf $(\prec)$. Aus 4.2 folgt:

4.3. *Durch die Zuordnung von $f^{\approx}$ zu* $\operatorname{Ann} f$ *ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$ auf $\mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$ gegeben. Daher ist $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$ ein vollständiger Verband.*

4.4. *Für $K \in \mathfrak{P}(L)$ ist* $\operatorname{Ann} K$ *eine Vereinigung von Restklassen von $\mathfrak{Q}(L)$ bezüglich $(\approx)$.*

Beweis. Für $f, g \in \mathfrak{Q}(L)$ folgt aus $f \approx g$, daß

$f \in \operatorname{Ann} K \Leftrightarrow K \subseteq \operatorname{Ann} f = \operatorname{Ann} g \Leftrightarrow g \in \operatorname{Ann} K$.

Für $X \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ setzen wir abkürzend $X^{\approx} = \{f^{\approx} \mid f \in X\}$. Unter einem Dualideal von $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$ verstehen wir ein Ideal des zu $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$ dualen Verbandes. Ein Dualhauptideal ist ein solches Dualideal, das von einem Element erzeugt wird.

4.5. *Für $X \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ ist* $(\operatorname{Ann}^2 X)^{\approx}$ *das kleinste, $X^{\approx}$ umfassende Dualhauptideal von $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$.*

Beweis. Sei $h \in \mathfrak{Q}(L)$ das Erzeugende des Hauptideals $\operatorname{Ann}^2 X$. Dann ist nach 4.2 $\operatorname{Ann} X = \operatorname{Ann} h$. Nun ist

$(\operatorname{Ann}^2 X)^{\approx} = \{g^{\approx} \mid g \in \mathfrak{Q}(L), g \leq h\} \subseteq \{f^{\approx} \mid f \in \mathfrak{Q}(L), h^{\approx} \prec f^{\approx}\}$. Wenn andererseits $f \in \mathfrak{Q}(L)$ und $h^{\approx} \prec f^{\approx}$, so ist $\operatorname{Ann} h \subseteq \operatorname{Ann} f$. Sei g das Erzeugende des Hauptideals $\operatorname{Ann}^2 f$. Dann ist nach 4.2 $\operatorname{Ann} f = \operatorname{Ann} g$ und $g \in \operatorname{Ann}^2 f \subseteq \operatorname{Ann}^2 h = \operatorname{Ann}^2 X$, demnach $g \leq h$ und $g^{\approx} = f^{\approx}$. Daher ist

$$(\operatorname{Ann}^2 X^{\approx}) = \{f^{\approx} \mid f^{\approx} \in \mathfrak{Q}(L)^{\approx},\ h^{\approx} \prec f^{\approx}\}$$

das von $h^{\approx}$ erzeugte Dualhauptideal. Sei Y ein $X^{\approx}$ umfassendes Dualhauptideal von $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$. Nun gilt offenbar die Beziehung

$$\operatorname{Ann} h = \operatorname{Ann} X = \bigcap_{f \in X} \operatorname{Ann} f,$$

aus der man im Hinblick auf 4.3 entnimmt, daß $h^{\approx}$ das in $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$ gebildete Infimum der Elemente $f^{\approx}$ von $X^{\approx}$ ist. Da aber Y als Dualhauptideal sicher auch ein vollständiger Durchschnittsteilbund von $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$ ist, so gehört mit den Elementen von $X^{\approx}$ auch dieses Infimum und damit $h^{\approx}$ zu Y. Wir haben $(\operatorname{Ann}^2 X)^{\approx} \subseteq Y$.

4.6. (1. Charakterisierung von $\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$) $X \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ *ist genau dann ein Element von* $\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$, *wenn* X *Vereinigung von* $(\approx)$ — *Restklassen und* $X^{\approx}$ *ein Dualhauptideal von* $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$ *ist.*

Beweis. Wenn $X = \operatorname{Ann}^2 X$, so ist $(\operatorname{Ann}^2 X)^{\approx} = X^{\approx}$ ein Dualhauptideal. Wenn umgekehrt X Vereinigung von Restklassen von $\mathfrak{Q}(L)$ bezüglich $(\approx)$ und $X^{\approx}$ Dualhauptideal von $\mathfrak{Q}(L)^{\approx}$ ist, so hat man $X^{\approx} = (\operatorname{Ann}^2 X)^{\approx}$ und folglich $X = \operatorname{Ann}^2 X \in \mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$.

5. QUASIRADIKALE UND QUASISCHEMATA

Für eine Teilklasse Σ von Δ und $a \in D$ setzen wir abkürzend

$$\Sigma_a = \iota_a \Sigma = \{\sigma \mid \sigma = \sigma(a \to b) \in \Sigma,\ b \in D\}$$

und $\ker(\Sigma, a) = \inf\{\operatorname{coim} \sigma \mid \sigma \in \Sigma_a\}$. Mit $\ker \Sigma$ werde diejenige auf D erklärte Funktion bezeichnet, die jedem $a \in D$ das Faktorobjekt $\ker(\Sigma, a) \in V(a)$ zuordnet. Für zwei Teilklassen $\Sigma, T \subseteq \Delta$ sei $\Sigma T^{-1} = \{\alpha \mid \alpha \in \Delta,\ \alpha T \subseteq \Sigma\}$.

5.1. *Für alle* $\gamma(a \to b) \in \Sigma T^{-1}$ *gilt*

$$\ker(\Sigma, a) \leq (\ker(T, b))\, \gamma_q.$$

Beweis. Zufolge 2.2 hat man für $\gamma(a \to b), \beta(b \to c) \in \Delta$ die Beziehung $\operatorname{coim} \gamma \leq \operatorname{coim}(\gamma\beta) = (\operatorname{coim} \beta)\, \gamma_q$. Da γ_q δ-treu ist, so ist sowohl für $T_b \neq \emptyset$ wie für $T_b = \emptyset$

$$\begin{aligned} \inf\{\operatorname{coim}(\gamma\beta) \mid \beta \in T_b\} &= \inf\{(\operatorname{coim} \beta)\, \gamma_q \mid \beta \in T_b\} \\ &= (\inf\{\operatorname{coim} \beta \mid \beta \in T_b\})\, \gamma_q, \end{aligned}$$

d. h.

$$\ker(\gamma T, a) = (\ker(T, b))\, \gamma_q.$$

Für $\gamma \in \Sigma T^{-1}$ ist $\gamma T \subseteq \Sigma$, folglich

$$\ker(\Sigma, a) \leq \ker(\gamma T, a) \leq (\ker(T, b))\, \gamma_q.$$

Eine Teilklasse $\Sigma \subseteq \Delta$ heißt ein Quasischema (von $\mathbf{L}$), wenn 1. $\Sigma \subseteq \Lambda$ und 2. $\Lambda\Sigma \subseteq \Sigma$.

5.2. *Eine Funktion* $f \in \mathfrak{G}(L)$ *ist genau dann ein Quasiradikal auf* $\mathbf{L}$, *wenn* f *sich in der Form* $f = \ker \Sigma$ *darstellen läßt, wo* Σ *ein Quasischema* (*von* **L**) *und der Bereich der Argumente der Funktion* ker Σ *auf* L *eingeschränkt ist.*[5])

Beweis. Nach Bedingung 2. der Definition eines Quasischemas ist $\Lambda \subseteq \Sigma\Sigma^{-1}$, somit ist die auf L eingeschränkte Funktion ker Σ im Hinblick auf 5.1 ein Quasiradikal auf L. Wenn umgekehrt f irgendein Quasiradikal auf L ist, so sei $\Sigma(f)$ die durch

$\Sigma(f) = \{\gamma \mid \gamma = \gamma(a \to b) \in \Lambda, f(a) \leq \gamma^{\sim}; a, b \in L\}$ definierte Teilklasse von Λ. Dann ist $\Sigma(f)$ ein Quasischema von **L**. Denn für $\gamma(a \to b) \in \Sigma(f)$ und $\delta(c \to a) \in \Lambda$ ist $f(c) \leq f(a)\,\delta_q \leq \gamma^{\sim}\delta_q = (\delta\gamma)^{\sim}$, somit $\delta\gamma \in \Sigma(f)$ und $\Lambda\Sigma(f) \subseteq \Sigma(f)$. Wir zeigen, daß $f = \ker(\Sigma(f))$. Nach Definition von $\Sigma(f)$ ist $f(a) \leq \inf\{\gamma^{\sim} \mid \gamma \in \Sigma(f)_a\} = \ker(\Sigma(f), a)$, $a \in L$. Nun ist $f(a) = \alpha^{\sim}$ für geeignetes $\alpha = \alpha(a \to d) \in \Gamma$. Nach Voraussetzung über **L** ist $\alpha \in \Lambda$. Es ist also $\alpha \in \Sigma(f)$. Aus der Definition von $\ker(\Sigma(f), a)$ folgt daher $\ker(\Sigma(f), a) \leq \alpha^{\sim} = f(a)$; demnach besteht Gleichheit, $f(a) = \ker(\Sigma(f), a)$ für alle $a \in L$.

Für $K \in \mathfrak{P}(L)$ sei $1_K = \{\iota_a\}_{a \in K}$. Dann ist das Komplexprodukt $\Sigma = \Lambda\, 1_K$ offenbar ein Quasischema; jedes Quasischema dieser Form heiße ein Schema (von **L**).

5.3. Eür $K \in \mathfrak{P}(L)$ und $\Sigma = \Lambda\, 1_K$ ist ker Σ das Erzeugende des Hauptideals Ann K.

Beweis. Für alle $a \in K$ ist $\iota_a \in \Sigma$, also $\ker(\Sigma, a) < \iota_a^{\sim}$ und $\ker(\Sigma, a) = o(a)$. Folglich ist ker $\Sigma \in$ Ann K. Wenn andererseits $f \in$ Ann K, so ist $f(b) = o(b) = \iota_b^{\sim}$ für alle $b \in K$ und $f(a) \leq f(b)\,\gamma_q = \iota_b^{\sim}\gamma_q = (\gamma\iota_b)^{\sim} = \gamma^{\sim}$ für alle $\gamma = \gamma(a \to b) \in \Sigma_a$. Daraus ergibt sich $f(a) \leq \inf\{\gamma^{\sim} \mid \gamma \in \Sigma_a\} = \ker(\Sigma, a)$, $a \in L$, und $f \leq$ ker Σ. Demnach ist ker Σ das Erzeugende des Hauptideals Ann K.

Aus 5.3 folgt unmittelbar:

5.4. (2. Charakterisierung von $\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$) $X \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ *gehört genau dann zu* $\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$, *wenn* $K \in \mathfrak{P}(L)$ *derart existiert, daß* X *das von* ker Σ, $\Sigma = \Lambda\, 1_K$, *erzeugte Hauptideal von* $\mathfrak{Q}(L)$ *ist.*

6. EINE CHARAKTERISIERUNG VON $\mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$

6.1. *Jede Klasse* $K \in \mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$ *ist abgeschlossen gegenüber subdirekten Produkten in* **L**.

Beweis. Es sei $a = \Pi_{i \in I}\, a_i(\varphi_i) \in L$ subdirektes Produkt in **L** der $a_i \in K$, wobei $\Phi = \{\varphi_i(a \to a_i)\}_{i \in I} \subseteq \Lambda$ und $\inf\{\varphi_i^{\sim} \mid i \in I\} = \iota_a^{\sim} = o(a)$. Zufolge 4.2 ist K von der Form $K = $ Ann f, wo $f \in \mathfrak{Q}(L)$ das Erzeugende des Hauptideals Ann K ist und daher nach 5.3 die Gestalt $f = $ ker Σ

---

[5]) Im folgenden soll, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, ker Σ stets als eine auf L erklärte Funktion aufgefaßt werden.

mit $\Sigma = \Lambda 1_K$ besitzt. Wegen $\Phi \subseteq \Sigma$ hat man $f(a) = \ker(\Sigma, a) \leq \ker(\Phi, a) = \inf\{\varphi_i^\sim \mid i \in I\} = o(a)$ und $a \in \operatorname{Ann} f = K$.

Ein Quasiradikal f auf L heißt ein Radikal auf L, wenn für alle $a \in L$ aus $f(a) = \alpha^\sim$, $\alpha = \alpha(a \to d) \in \Lambda$, stets folgt $f(d) = o(d)$.

6.2. *Für $K \in \mathfrak{P}(L)$ und $\Sigma = \Lambda 1_K$ ist die durch* ker Σ *auf L definierte Funktion ein Radikal auf L.*

Beweis. Wir wissen bereits, daß die Einschränkung von $\ker \Sigma$ auf L ein Quasiradikal ist. Nun gilt für geeignetes $\alpha = \alpha(a \to d) \in \Lambda$ die Darstellung $\ker(\Sigma, a) = \alpha^\sim$. Es ist zu zeigen, daß für jedes α dieser Art die Beziehung $\ker(\Sigma, d) = o(d)$ besteht. Sei $\delta = \delta(a \to c) \in \Lambda$ und $\delta^\sim \leq \alpha^\sim = \ker(\Sigma, a) = \inf\{\gamma^\sim \mid \gamma \in \Sigma_a\}$. Da $\delta^\sim \leq \gamma^\sim$, so zerfällt jedes $\gamma \in \Sigma_a$ gemäß $\gamma = \delta\beta$, wo $\beta = \beta(c \to b) \in \Gamma$. Wegen $c \in L$ ist $\beta \in \Lambda$. Da $\gamma = \gamma(a \to b) \in \Sigma$, so ist $b \in K$, folglich $\beta \in \Sigma_c$ und $\Sigma_a \subseteq \delta\Sigma_c \subseteq \Sigma_a$, d.h. $\Sigma_a = \delta\Sigma_c$. Nach dem Beweis von 5.1 ist

$$\alpha^\sim = \ker(\Sigma, a) = \ker(\delta\Sigma, a) = (\ker(\Sigma, c))\,\delta_q.$$

Hieraus folgt übrigens unter Beachtung von 2.6 die Gleichung

$$(\ker(\Sigma, a))\,\delta_q^* = \ker(\Sigma, c).$$

Wenn insbesondere $\alpha = \delta$ ist, so hat man $c = d$ und $\ker(\Sigma, d) = \alpha^\sim \delta_q^* = \delta^\sim\delta_q^* = (\delta\iota_d)^\sim \delta_q^* = \iota_d^\sim \delta_q \delta_q^* = \iota_d^\sim = o(d)$.

6.3. (Prinzip des maximalen homomorphen Bildes eines gegebenen Typs, kategorientheoretische Fassung) *Es sei $K \in \mathfrak{P}(L)$ eine gegenüber beliebigen subdirekten Produkten in* **L** *abgeschlossene Klasse. Dann besitzt das Radikal $f =$* ker *Σ, $\Sigma = \Lambda 1_K$, auf L die durch die beiden folgenden Aussagen* a) *und* b) *ausgedrückte Minimaleigenschaft:*

a) *Wenn $a \in L$ und $f(a) = \alpha^\sim$ für $\alpha = \alpha(a \to d) \in \Lambda$, so ist $d \in K$.*

b) *Wenn $\gamma(a \to b) \in \Lambda$ und $b \in K$, so ist $f(a) \leq \gamma^\sim$.*

Insbesondere gilt:

c) $K = \operatorname{Ann} f$.

Beweis. Nach Definition von $\ker \Sigma$ ist $K \subseteq \operatorname{Ann} f$. Sei umgekehrt $a \in \operatorname{Ann} f$. Dann ist $f(a) = \ker(\Sigma, a) = \inf\{\gamma^\sim \mid \gamma \in \Sigma_a\} = o(a) = \iota_a^\sim$, somit $a = \Pi_{i\in I}\, a_i(\gamma_i)$ subdirektes Produkt der durch $\{\gamma_i(a \to a_i)\}_{i \in I} = \Sigma_a$ definierten Objekte $a_i \in K$. Da K abgeschlossen ist gegenüber subdirekten Produkten in **L**, so ist $a \in K$ und $\operatorname{Ann} f \subseteq K$. Demnach ist c) erfüllt. Da $K = \operatorname{Ann} f$ und f ein Radikal auf L ist, so ist auch a) erfüllt. Die Richtigkeit von b) folgt unmittelbar aus der Definition von $\ker \Sigma$.

Für $K \in \mathfrak{P}(L)$ sei K_s die kleinste, K umfassende und gegenüber subdirekten Produkten in **L** abgeschlossene Teilklasse von L. Es ist klar, daß ein solches K_s stets existiert.

6.4. *Für $K \in \mathfrak{P}(L)$ gilt $K_s = \operatorname{Ann}^2 K$.*

Beweis. Nach 6.1 ist $\operatorname{Ann}^2 K$ abgeschlossen gegenüber subdirekten Produkten in **L**, und da $K \subseteq \operatorname{Ann}^2 K$, so ist $K_s \subseteq \operatorname{Ann}^2 K$. Sei umgekehrt

$a \in \operatorname{Ann}^2 K$. Dann gilt für alle $f \in \mathfrak{Q}(L)$ die Implikation $K \subseteq \operatorname{Ann} f \Rightarrow a \in \operatorname{Ann} f$. Da K_s subdirekt abgeschlossen in **L** ist, so existiert zufolge 6.3 ein $f \in \mathfrak{Q}(L)$ mit $K_s = \operatorname{Ann} f$. Da $K \subseteq K_s = \operatorname{Ann} f$, ist also $a \in \operatorname{Ann} f = K_s$ und $\operatorname{Ann}^2 K \subseteq K_s$. Somit besteht Gleichheit, $\operatorname{Ann}^2 K = K_s$.

6.5. (Charakterisierung von $\mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$) $K \in \mathfrak{P}(L)$ *gehört genau dann zu* $\mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$, *wenn* K *abgeschlossen ist gegenüber subdirekten Produkten in* **L**.

Beweis. 6.5 folgt unmittelbar aus 6.4.

Für $K \in \mathfrak{P}(L)$ sei K^s die aus allen subdirekten Produkten in **L** von Objekten aus K bestehende Teilklasse von L.

6.6. *Für* $K \in \mathfrak{P}(L)$ *gilt stets* $K^{ss} = K^s$. *Daher ist* $K^s = K_s$. *Insbesondere ist* $\emptyset^s = \{a \mid a \in L, \mid V(a) \mid = 1\}$ *die kleinste, gegenüber subdirekten Produkten in* **L** *abgeschlossene Teilklasse von* L.

Beweis. Es sei $a = \Pi_{i \in I}\, a_i(\alpha_i)$, $\alpha_i = \alpha_i(a \to a_i) \in \Lambda$, $\inf \{\alpha_i^{\sim} \mid i \in I\} = \iota_a^{\sim}$, und $a_i \in K^s$, $i \in I$, also

$$a_i = \Pi_{j \in I(i)}\, a_{ij}(\alpha_{ij}),\ \alpha_{ij} = \alpha_{ij}(a_i \to a_{ij}) \in \Lambda,$$

mit $\inf \{\alpha_{ij}^{\sim} \mid j \in I(i)\} = \iota_{a_i}^{\sim}$ und $a_{ij} \in K$, $j \in I(i)$, $i \in I$. Wir zeigen, daß $a = \Pi_{j \in I(i), i \in I}\, a_{ij}(\alpha_i \alpha_{ij})$. Da $(\alpha_i)_q$ δ—treu ist, so gilt sowohl für $I(i) = \emptyset$ wie für $I(i) \neq \emptyset$ $\inf\{\alpha_{ij}^{\sim}(\alpha_i)_q \mid j \in I(i)\} = (\inf\{\alpha_{ij}^{\sim} \mid j \in I(i)\})(\alpha_i)_q$ folglich $\inf\{\alpha_i\alpha_{ij})^{\sim} \mid j \in I(i), i \in I\} = \inf\{\inf\{(\alpha_i\alpha_{ij})^{\sim} \mid j \in I(i)\} \mid i \in I\} = \inf\{\inf\{\alpha_{ij}^{\sim}(\alpha_i)_q \mid j \in I(i)\} \mid i \in I\} = \inf\{(\inf\{\alpha_{ij}^{\sim} \mid j \in I(i)\})(\alpha_i)_q \mid i \in I\} = \inf\{\iota_{a_i}^{\sim}(\alpha_i)_q \mid i \in I\} = \inf\{\alpha_i^{\sim} \mid i \in I\} = \iota_a^{\sim}$.

7. CHARAKTERISIERUNGEN DES RADIKALS

7.1. *Ist* f *ein Radikal auf* L *und* $K = \operatorname{Ann} f$, *so gilt* $f = \ker \Sigma$ *für* $\Sigma = \Lambda\, 1_K$.

Beweis. Zufolge 4.2 ist $K = \operatorname{Ann} g$, wo $g \in \mathfrak{Q}(L)$ das Erzeugende des Hauptideals $\operatorname{Ann} K$ ist. Nach 5.3 ist $g = \ker \Sigma$. Da $f \in \operatorname{Ann}^2 f = \operatorname{Ann} K$, so ist $f \leq g$. Wir zeigen, daß auch $g \leq f$. Für $a \in L$ sei $f(a) = \alpha^{\sim}$, wobei $\alpha = \alpha(a \to d) \in \Lambda$. Da f ein Radikal ist, so hat man $f(d) = o(d)$, also $d \in \operatorname{Ann} f = K = \operatorname{Ann} g$ und $g(d) = o(d)$. Da g ein Quasiradikal (sogar ein Radikal) auf L ist, so folgt $g(a) \leq g(d)\, \alpha_q = \iota_d^{\sim} \alpha_q = (\alpha \iota_d)^{\sim} = \alpha^{\sim} = f(a)$, d. h. $g \leq f$. Also besteht Gleichheit, $f = g = \ker \Sigma$.

7.2. *Für* $K \in \mathfrak{P}(L)$, $\Sigma = \Lambda\, 1_K$ *und* $\Sigma_s = \Lambda\, 1_{K_s}$ *gilt*

$$\ker \Sigma = \ker \Sigma_s \text{ und } K_s = \operatorname{Ann} \ker \Sigma.$$

Beweis. Sei $f = \ker \Sigma$ und $f_s = \ker \Sigma_s$. Zufolge 5.3 ist f bzw. f_s das Erzeugende des Hauptideals $\operatorname{Ann} K$ bzw. $\operatorname{Ann} K_s$. Nach 6.4 ist $K_s = \operatorname{Ann}^2 K$, somit $\operatorname{Ann} K = \operatorname{Ann}^3 K = \operatorname{Ann} K_s$ und $f = f_s$. Aus 6.3c) folgt $K_s = \operatorname{Ann} f_s = \operatorname{Ann} \ker \Sigma_s = \operatorname{Ann} \ker \Sigma$.

7.3. (Charakterisierungen der Radikale) *Für $f \in \mathfrak{Q}(L)$ sind folgende Bedingungen einander gleichwertig:*

a) *f ist ein Radikal auf L.*

b) $f = \ker \Sigma$ *für* $\Sigma = \Lambda\, 1_K$, *wobei* $K \in \mathfrak{P}(L)$.

c) $f = \ker (\Lambda\, 1_{\mathrm{Ann}\, f})$.

d) *f ist das Erzeugende des Hauptideals* $\mathrm{Ann}^2 f$.

e) *f ist das Erzeugende des Hauptideals* $\mathrm{Ann}\, K$, *wobei* $K \in \mathfrak{P}(L)$.

Beweis. Aus a) und 7.1 folgt b). Aus b) und 7.2 folgt c). Aus c) und 5.3 folgt d). d) $\Rightarrow$ c) ist trivial. e) $\Rightarrow$ a) ist eine Folgerung aus 5.3 und 6.2.

Es sei $\mathfrak{R}(L)$ die Gesamtheit der Radikale auf L.

7.4. *Bezüglich der aus $\mathfrak{Q}(L)$ übernommenen Inklusion ist $\mathfrak{R}(L)$ ein vollständiger Verband, und zwar ist $\mathfrak{R}(L)$ zum Verband $\mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$ antisomorph.*

Beweis. Wir betrachten diejenige Abbildung ϱ von $\mathfrak{R}(L)$ in $\mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$, die jedem $f \in \mathfrak{R}(L)$ die Klasse $\mathrm{Ann}\, f \in \mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$ zuordnet. Aus $f, g \in \mathfrak{R}(L)$ und $\mathrm{Ann}\, f = \mathrm{Ann}\, g$ folgt $\mathrm{Ann}^2 f = \mathrm{Ann}^2 g$ und daher nach 7.3d) $f = g$, d. h., ϱ ist eineindeutig. Gemäß 6.3c) ist ϱ eine Abbildung auf $\mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$. Überdies gilt $f \leq g \Rightarrow \mathrm{Ann}\ f \supseteq \mathrm{Ann}\ g \Rightarrow \mathrm{Ann}^2\ f \subseteq \mathrm{Ann}^2\ g \Rightarrow$ (nach 7.3d)) $f \leq g$. Demnach ist ϱ und ϱ^{-1} antimonoton.

7.5. *$\mathfrak{R}(L)$ ist ein vollständiger Durchschnittsteilbund von $\mathfrak{Q}(L)$ (und daher auch von $\mathfrak{G}(L)$).*

Beweis. Für $f \in \mathfrak{Q}(L)$ sei $\bar{f}$ das Erzeugende des Hauptideals $\mathrm{Ann}^2 f$. Zufolge 7.3a), e) ist $\bar{f}$ ein Radikal auf L. Wir zeigen, daß $f \to \bar{f}$ eine Hüllenoperation auf $\mathfrak{Q}(L)$ ist. Aus $f \in \mathrm{Ann}^2 f$ folgt $f \leq \bar{f}$. Für $f_1, f_2 \in \mathfrak{Q}(L)$ besteht die Implikation $f_1 \leq f_2 \Rightarrow f_2 \prec f_1 \Rightarrow \mathrm{Ann}\ f_2 \subseteq \mathrm{Ann}\ f_1 \Rightarrow \Rightarrow \mathrm{Ann}^2 f_1 \subseteq \mathrm{Ann}^2 f_2 \Rightarrow \bar{f}_1 \in \mathrm{Ann}^2 \bar{f}_2 \Rightarrow \bar{f}_1 \leq \bar{f}_2$. Für $f \in \mathfrak{Q}(L)$ ist $\bar{\bar{f}}$ das Erzeugende des Hauptideals $\mathrm{Ann}^2 \bar{f}$; da $\bar{f}$ ein Radikal ist, so ist andererseits nach 7.3d) auch $\bar{f}$ das Erzeugende von $\mathrm{Ann}^2 \bar{f}$, d. h., es ist $\bar{f} = \bar{\bar{f}}$. Die Gesamtheit aller $f \in \mathfrak{Q}(L)$ mit $f = \bar{f}$ ist also ein Hüllensystem auf $\mathfrak{Q}(L)$, das zufolge 7.3.d) mit $\mathfrak{R}(L)$ übereinstimmt. Der Beweis von 7.5 ist damit abgeschlossen. Wir wollen hier aber noch einen mehr direkten Beweis für 7.5 anfügen.

Sei $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{R}(L)$. Dann existieren Schemata $\Sigma_i = \Lambda 1_{K_i}$ von $\mathbf{L}$, so daß $f_i = \ker \Sigma_i$. Sei $f = \bigwedge_{i \in I} f_i$ das Infimum der f_i, $i \in I$, in $\mathfrak{Q}(L)$. Es genügt offenbar zu zeigen, daß $f \in \mathfrak{R}(L)$. Nun gilt für alle $a \in L$

$$f(a) = (\bigwedge_{i \in I} f_i)(a) = \inf\{f_i(a) \mid i \in I\} =$$
$$= \inf\{\ker(\Sigma_i, a) \mid i \in I\} = \ker(\bigcup_{i \in I} \Sigma_i, a),$$

d. h. $f = \ker \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$. Da

$$\bigcup_{i \in I} \Sigma_i = \Lambda\, 1_{\bigcup_{i \in I} K_i}$$

ein Schema von $\mathbf{L}$ ist, so ist f nach 7.3b) ein Radikal auf L.

7.6. *Für f, $g \in \mathfrak{Q}(L)$ sind folgende Bedingungen einander gleichwertig:*

a) *g ist das Erzeugende des Hauptideals* $\operatorname{Ann}^2 f$.

b) *g ist das von f erzeugte Radikal auf L, d. h. das kleinste Radikal h auf L, so daß $f \leq h$.*

c) *g ist das größte Quasiradikal q auf L, so daß $f^{\approx} \prec q^{\approx}$.*

d) *g ist ein Radikal auf L, und es gilt $f^{\approx} = g^{\approx}$.*

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) Nach 7.3e) ist g ein Radikal auf L. Da $f \in \operatorname{Ann}^2 f$, ist nach a) $f \leq g$. Ist h ein beliebiges Radikal auf L und $f \leq h$, so folgt aus $g \in \operatorname{Ann}^2 f \subseteq \operatorname{Ann}^2 h$ und 7.3d), daß $g \leq h$. b) $\Rightarrow$ a) Sei g_1 das Erzeugende des Hauptideals $\operatorname{Ann}^2 f$. Da a) $\Rightarrow$ b) bereits bewiesen, so ist g_1 das von f erzeugte Radikal auf L; wenn also g das von f erzeugte Radikal auf L ist, so ist notwendig $g = g_1$.

a) $\Rightarrow$ c) Einerseits ist nach 4.2 $\operatorname{Ann} f = \operatorname{Ann} g$, also sicher $f^{\approx} \prec g^{\approx}$. Andererseits folgt aus $f^{\approx} \prec q^{\approx}$, daß $\operatorname{Ann} f \subseteq \operatorname{Ann} q$ und $q \in \operatorname{Ann}^2 q \subseteq \subseteq \operatorname{Ann}^2 f$, d. h. $q \leq g$. c) $\Rightarrow$ a) Sei g_1 das Erzeugende des Hauptideals $\operatorname{Ann}^2 f$. Da a) $\Rightarrow$ c) bereits bewiesen, so ergibt sich $g = g_1$.

a) $\Leftrightarrow$ d) Offenbar ist a) damit gleichbedeutend, daß g ein Radikal auf L (und daher das Erzeugende des Hauptideals $\operatorname{Ann}^2 g$) und $\operatorname{Ann}^2 g = = \operatorname{Ann}^2 f$ ist. $\operatorname{Ann}^2 g = \operatorname{Ann}^2 f$ ist aber gleichbedeutend mit $\operatorname{Ann} g = = \operatorname{Ann} f$, d. h. mit $g^{\approx} = f^{\approx}$.

Hier sei bemerkt, daß sich 5.4 im Hinblick auf 7.3b) auch so formulieren läßt:

7.7. *$X \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$ gehört genau dann zu $\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(L)$, wenn X das von einem Radikal auf L erzeugte Hauptideal von $\mathfrak{Q}(L)$ ist.*

Ein Objekt $z \in D$ heißt terminales Objekt von $\mathbf{D}$, wenn für jedes $a \in D$ genau ein Morphismus $\omega_{az}(a \to z)$ existiert. Ist z ein terminales Objekt von $\mathbf{C}$ und $\omega_{az} \in \Gamma$, so ist $\omega_{az}^{\sim}$ das Maximum $e(a)$ aller Elemente von $V(a)$.

7.8. *Wenn $z \in D$ terminales Objekt von $\mathbf{D}$ ist, so ist $|V(z)| = 1$.*[6])

Beweis. Nach Voraussetzung über z existiert genau ein Morphismus α der Form $\alpha = \alpha(z \to z)$, also ist $\alpha = \omega_{zz} = \iota_z$ der identische Morphismus. Für $\gamma(z \to c) \in \Gamma$ gilt $\omega_{zz} = \gamma\omega_{cz} \in \Gamma$, somit ist nach 2.1 $\omega_{cz} \in \Gamma$ und $\gamma^{\sim} \leq \omega_{zz}^{\sim}$, d. h. $\gamma^{\sim} = \iota_z^{\sim} = o(z)$ und $|V(z)| = 1$.

Ein Objekt $a \in L$ heißt radikalfrei bzw. radikal bezüglich eines Radikals f auf L, wenn $f(a) = o(a)$ bzw. $f(a) = e(a)$.

7.9. ***Ein Objekt $a \in L$ ist genau dann radikal bezüglich eines gegebenen Radikals f auf L, wenn aus der Existenz eines Morphismus $\gamma(a \to b) \in \Lambda$ von a zu einem bezüglich f radikalfreien Objekt $b \in L$ stets folgt, daß $|V(b)| = 1$.***

---

[6]) Die Umkehrung dieses Satzes läßt sich nur unter zusätzlichen Voraussetzungen über $\mathbf{D}$ beweisen.

Beweis. Wenn a radikal bezüglich f, d. h. $f(a) = e(a)$, und wenn b ein Objekt aus Ann f ist, für welches ein $\gamma(a \to b) \in \Lambda$ existiert, so hat man $e(a) = f(a) \leq f(b)\gamma_q$, also $e(a) = f(b)\gamma_q$. Da $\gamma \in \Gamma$, so ist nach 2.6 $o(b) = f(b) = f(b)\gamma_q\gamma_q^* = e(a)\gamma_q^* \geq e(b)\gamma_q\gamma_q^* = e(b)$, d. h. $e(b) = o(b)$ und $|V(b)| = 1$. Nun möge umgekehrt auf $a \in L$ die hinter „wenn" von 7.9 stehende Eigenschaft zutreffen. Da f ein Radikal ist, so folgt aus $f(a) = \alpha^\sim$ für $\alpha = \alpha(a \to d) \in \Lambda$, daß $f(d) = o(d)$. Nach Voraussetzung ist $|V(d)| = 1$, also $o(d) = e(d)$ und $f(a) = \alpha^\sim = (\alpha\iota_d)^\sim = \iota_d^\sim\alpha_q = o(d)\,\alpha_q = e(d)\,\alpha_q \geq e(d)\,\alpha_q^*\alpha_q \geq e(a)$, somit $f(a) = e(a)$ und a radikal bezüglich f.

8. FORTSETZBARKEIT VON QUASIRADIKALEN UND RADIKALEN

Es sei $\mathbf{L}' = (L', \Lambda')$ eine die Kategorie $\mathbf{L} = (L, \Lambda)$ umfassende Teilkategorie von $\mathbf{C} = (C, \Gamma)$, d. h. $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}' \subseteq \mathbf{C}$ Wir setzen voraus, daß $\mathbf{L}'$ den gleichen Bedingungen genügt, die wir von $\mathbf{L}$ gefordert haben, d. h., wenn $\gamma = \gamma(a \to b) \in \Gamma$ und $a \in L'$, so $\gamma \in \Lambda'$. Ist f ein Quasiradikal (Radikal) auf L', so ist klar, daß die Einschränkung $f|_L$ der Funktion f auf den Bereich L ein Quasiradikal (Radikal) auf L ist. Umgekehrt gilt:

8.1. *Jedes Quasiradikal (Radikal) f auf L läßt sich zu einem Quasiradikal (Radikal) f' auf L' fortsetzen. Ist dabei f ein Radikal auf L, so gibt es genau eine Fortsetzung f' von f auf L', so daß* Ann$'$ $f' =_{Def} \{a \mid a \in L', f'(a) = o(a)\}$ *die subdirekte Abschließung in $\mathbf{L}'$ von* Ann $f \subseteq L$ *und f' ein Radikal auf L' ist.*

Beweis. Sei f ein Quasiradikal auf L und $f = \ker \Sigma$ für ein Quasischema Σ auf $\mathbf{L}$. Dann ist $\Sigma' = \Lambda'\Sigma$ ein Quasischema auf $\mathbf{L}'$, und es gilt $\Sigma_a' = \Sigma_a$ für alle $a \in L$. Denn einerseits ist $\Sigma \subseteq \Sigma'$. Andererseits läßt sich jedes $\gamma = \gamma(a \to b) \in \Sigma_a'$, $a \in L$, gemäß $\gamma = \alpha\beta$ zerlegen in $\alpha = \alpha(a \to c) \in \Lambda'$ und $\beta = \beta(c \to b) \in \Sigma$. Wegen $\alpha \in \Gamma$ und $a \in L$ ist $\alpha \in \Lambda$ und daher $\gamma = \alpha\beta \in \Lambda\Sigma \subseteq \Sigma$, somit $\Sigma_a' \subseteq \Sigma$ und $\Sigma_a' = \Sigma_a$. Folglich ist $f(a) = \ker(\Sigma, a) = \ker(\Sigma_a, a) = \ker(\Sigma_a', a) = \ker(\Sigma', a)$ für alle $a \in L$, d. h., die auf L' eingeschränkte Funktion $f' = \ker \Sigma'$ ist eine Fortsetzung der Funktion f. Ist dabei f ein Radikal auf L, so dürfen wir es in der Form $f = \ker \Sigma$ für $\Sigma = \Lambda 1_K$, $K \in \mathfrak{P}(L)$, annehmen. Dann ist $f' = \ker \Sigma'$ für $\Sigma' = \Lambda'\Sigma$ ein Radikal auf L', da $\Sigma' = \Lambda'\Sigma = \Lambda'\Lambda 1_K = \Lambda' 1_K$. Bezeichnet $K'^{s'}$ die subdirekte Abschließung in $\mathbf{L}'$ von $K' \subseteq L'$, so hat man $f = \ker \Lambda 1_{K^s}$ und $f' = \ker \Lambda' 1_{K^{s'}}$. Wegen $K \subseteq K^s \subseteq K^{s'}$ ist $K^{s'} \subseteq K^{ss'} \subseteq K^{s's'} = K^{s'}$ und Ann$'$ $f' = K^{s'} = K^{ss'} = (\mathrm{Ann}\, f)^{s'}$. Die eindeutige Bestimmtheit von f' ist in diesem Fall klar, da f' durch Ann$'$ f' eindeutig bestimmt ist.

8.2. *Es sei f ein Quasiradikal auf L und g das von f erzeugte Radikal auf L. Dann lassen sich gleichzeitig f zu einem Quasiradikal f' auf L'*

und g zu einem Radikal h auf L' derart fortsetzen, daß h das von f' erzeugte Radikal auf L' ist.

Beweis. Sei $f = \ker \Sigma$ und $g = \ker T$, wo Σ ein Quasischema auf $\mathbf{L}$ und T das Schema $T = \Lambda 1_K$, mit $K \in \mathfrak{P}(L)$, ist. Nach dem Beweis von 7.5 gilt $f \wedge g = \ker (\Sigma \cup T)$, und da $f \leq g$ ist, so hat man $f = f \wedge g = \ker (\Sigma \cup T)$. Daher dürfen wir in $f = \ker \Sigma$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\Sigma \supseteq T$ voraussetzen. Dann ist $\Lambda'\Sigma \supseteq \Lambda'T$ und folglich $\ker \Lambda'\Sigma \leq \ker \Lambda'T$; dabei ist $g' = \ker \Lambda'T$ ein Radikal auf L'. Sei h das von $f' = \ker \Lambda'\Sigma$ erzeugte Radikal auf L'. Wegen $f' \leq g'$ ist $h \leq g'$. Somit gilt für die Einschränkung $h|_L$ von h auf L sicher $h|_L \leq g$, da g' auf L mit g übereinstimmt. Ebenso folgt aus $f' \leqq h$, daß $f \leq h|_L$, und da $h|_L$ ein Radikal auf L ist, so ist $g \leq h|_L$. Damit ist $g = h|_L$ bewiesen, d. h., h ist eine Fortsetzung auf L' von g.

9. DIE KLASSE DER RADIKALEN OBJEKTE. M-RADIKALE

Es erhebt sich die Frage, wann eine Teilklasse von L als die Klasse aller radikalen Objekte bezüglich eines geeigneten Radikals auf L auftreten kann. Für $R \subseteq L$ sei $R^e = \{b \mid b \in L$, und es existiert $\gamma(a \to b) \in \Lambda$ mit $a \in R\}$. Offenbar gilt $R \subseteq R^e = R^{ee}$ und $R_1^e \subseteq R_2^e$, falls $R_1 \subseteq R_2^e$. Für $K \subseteq L$ sei $K^r = \{a \mid a \in L$ und $K \cap \{a\}^e \subseteq \emptyset^s\}$. Offenbar ist $K^{re} = K^r$ und $K_2^r \subseteq K_1^r$, falls $K_1 \subseteq K_2$. Weiter gilt $\emptyset^s \subseteq K^r$. Denn für $\gamma(a \to b) \in \Gamma$ ist allgemein $o(a)\,\gamma_q^* \leq o(b)\,\gamma_q\gamma_q^* = o(b)$, d. h. $o(a)\,\gamma_q^* = o(b)$. Sei $a \in \emptyset^s$, $\gamma(a \to b) \in \Lambda$ und $b \in K$. Im Hinblick auf 6.6 ist $|\,V(a)\,| = 1$ und $e(b) = e(b)\,\gamma_q\gamma_q^* = o(a)\gamma_q^* = o(b)$, somit $|\,V(b)\,| = 1$ und $a \in K^r$, also $\emptyset^s \subseteq K^r$. Ferner gilt $K \subseteq L \backslash (K^r \backslash \emptyset^s)$. Denn nach Definition von K^r ist $K \cap K^{re} \subseteq \emptyset^s$. Da $K^{re} = K^r$, so ist $K \cap K^r \subseteq \emptyset^s$, was mit $K \subseteq L \backslash (K^r \backslash \emptyset^s)$ gleichbedeutend ist.

Ist f ein Radikal auf L, das sich in der Form $f = \ker \Sigma$ mit $\Sigma = \Lambda 1_K$ und $K \in \mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$ darstellen läßt, so schreiben wir auch $f = r(K)$. Zufolge 7.9 besteht dann K^r genau aus den bezüglich $r(K)$ radikalen Objekten von L, und die oben gestellte Frage läuft auf die Bestimmung aller der Klassen $R \subseteq L$ hinaus, die sich in der Form $R = K^r$ mit $K \in \mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$ darstellen lassen.

9.1. *Eine Teilklasse $R \subseteq L$ besitzt genau dann die Form $R = K^r$ für $K \in \mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$, wenn*

a) $\emptyset^s \subseteq R$,

b) $R^e = R$.

Ist dies der Fall, so ist $r(L \backslash (R \backslash \emptyset^s))$ das kleinste Radikal g auf L, so daß alle Objekte aus R radikal bezüglich g sind.

Beweis. Notwendigkeit. Für $K \in \mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$ sei $R = K^r$. Wegen $\emptyset^s \subseteq K^r$ ist a) erfüllt. Da $K^{re} = K^r$, ist auch b) erfüllt.

Hinlänglichkeit. Für $R \subseteq L$ seien a) und b) erfüllt. Für $K = L\backslash(R\backslash\emptyset^s)$ gilt dann $K^s = K$. Wenn nämlich $a = \Pi_{i\in I} a_i(\sigma_i)$ subdirektes Produkt in $\mathbf{L}$ der $a_i \in K$, mit $\sigma_i(a \to a_i) \in \Lambda$, $i \in I$, so ist im Fall $I = \emptyset$ sicher $a \in \emptyset^s \subseteq K$. Ist aber $I \neq \emptyset$, so gilt nach Voraussetzung $a_i \notin R\backslash\emptyset^s$ für alle $i \in I$. Angenommen, es sei $a \in R\backslash\emptyset^s$. Wegen $\sigma_i \in \Lambda$ und $R^e = R$ ist dann $a_i \in R$, somit $a_i \in \emptyset^s$ für alle $i \in I$. Da $\emptyset^s$ subdirekt abgeschlossen in $\mathbf{L}$ ist, so ist $a \in \emptyset^s$, was einen Widerspruch darstellt. $a \in K^r$ ist gleichbedeutend mit der Aussage: Wenn $\gamma(a \to b) \in \Lambda$ und $b \notin R\backslash\emptyset^s$, so ist $|\, V(b)\, | = 1$; dies ist aber gleichbedeutend mit $a \in R$. Daher hat man $K^r = R$. Nun sei $r(K_1)$ irgendein Radikal auf L, so daß $R \subseteq K_1^r$. Dann ist $R\backslash\emptyset^s \subseteq K_1^r\backslash\emptyset^s$ und $L\backslash(K_1^r\backslash\emptyset^s) \subseteq L\backslash(R\backslash\emptyset^s) = K$. Da allgemein $K_1 \subseteq L\backslash(K_1^r\backslash\emptyset^s)$, so ist in der Tat $K_1 \subseteq K$ und $r(K) \leq r(K_1)$.

Zum Schluß wollen wir noch eine bikategorientheoretische Definition des in [7] eingeführten M-Radikals angeben. Für $M \subseteq L \times L$, $a \in L$ und $R \subseteq L$ sei $(a, R) = \{(a, b) \mid (a, b) \in L \times L,\ b \in R\}$ und $R^M = \{a \mid a \in L,\ (a, R) \cap M = \emptyset\}$. Für $R_1 \subseteq R_2$ gilt offenbar $R_2^M \subseteq R_1^M$. Das Radikal $r(K)$ (für $K \in \mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$) heißt schwaches M-Radikal auf L, falls $K \subseteq K^{rM}$; gilt sogar $K = K^{rM}$, so heißt $r(K)$ ein M-Radikal auf L.

9.2. *Ein M-Radikal f auf L ist durch die Klasse aller bezüglich f radikalen Objekte von L eindeutig bestimmt.*

Beweis. Ist $f = r(K)$ (wobei $K \in \mathfrak{C}\mathfrak{P}(L)$) ein M-Radikal auf L^r so ist nach Definition der M-Radikale $K = K^{rM}$. Zufolge 7.9 besteht K, genau aus den bezüglich $r(K)$ radikalen Objekten von L.

Es sei noch bemerkt, daß sich auch die übrigen Sätze aus [7][7]) über M-Radikale auf die vorstehende Definition übertragen lassen.

[7]) Es sei gestattet, hier folgende Druckfehler von [7] zu berichtigen. Auf p. 359, Gl. (19), lies: $\cup$ anstatt: $\cap$. Auf p. 361, Gl. (26), ergänze: mit $\mathfrak{A} \notin \mathrm{obj}^\circ\, \mathbf{C}$ für $\mathfrak{i} = 0$. In Gl. (27) ersetze: $\mathbf{A}_{\mathfrak{i}}^{\mathfrak{e}}$ durch: $\mathbf{A}_{\mathfrak{i}}^{\mathfrak{e}} \cup \mathrm{obj}^\circ\, \mathbf{C}$. Auf p. 370, Z. 2, lies: Aussage. Auf p. 374, Gl. (52), lies: HV = H anstatt: HV = V. Auf pp. 374, 377, Z. 12 v. u., lies: $V^\beta = V\gamma V$ anstatt: $V^\beta = VV\gamma$.

LITERATUR

[1] S. A. Amitsur, A general theory of radicals. II. Radicals in rings and bicategories, Amer. J. Math. *76* (1954), 100—125.
[2] A. H. Clifford and G. B. Preston, The algebraic theory of semigroups. I. Providence, R. I., 1961.
[3] P. M. Cohn, Universal algebra, New York, Evanston, and London, 1965.
[4] G. Grätzer, Universal algebra, Princeton, N. J., im Erscheinen.
[5] H. Hermes, Einführung in die Verbandstheorie, Berlin, Göttingen, und He idelberg, 1955.
[6] H. Höft, Zur Algebraisierung des Prädikatenkalküls erster Stufe, Math. Inst. d. Univ. Bonn, 1967.
[7] H.—J. Hoehnke, Radikale in allgemeinen Algebren, Math. Nachr. *32* (1966), 347—383.
[8] ————, Kovariante Funktionen in Bikategorien (in Vorbereitung).
[9] E. G. Šul'geifer, Zur allgemeinen Theorie der Radikale in Kategorien, Mat. Sb. *51 (93)* (1960), 487—500 [Russisch].
[10] A. Suliński, The Brown-McCoy radical in categories, Fund. Math. *59* (1966), 23—41.

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin,
Forschungsgemeinschaft,
Institut für Reine Mathematik