Archivum Mathematicum

Marko Švec

L'existence globale et les propriétés asymptotiques des solutions d'une équation différentielle non-linéaire d'ordre n

Archivum Mathematicum, Vol. 2 (1966), No. 4, 141--151

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104617`

L'EXISTENCE GLOBALE ET LES PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE NON-LINÉAIRE D'ORDRE n

MARKO ŠVEC, BRATISLAVA

Présenté le 3 octobre 1966

Dans l'article [1] j'ai introduit quelques notions comme la quasi-uniforme convergence d'une suite des fonctions sur un intervalle J, la notion d'un ensemble quasi-fermé, la notion d'un ensemble quasi-compact, la notion d'un opérateur quasi-continu sur un espace de Banach et j'ai prouvé quelques théorèmes généralisants le théorème du point fixe de Schauder. Puis j'ai utilisé ces théorèmes pour la preuve de l'existence d'une solution ayant quelques propriétés speciales d'une équation différentiele non-linéaire. Dans cet article je vais utiliser ces notions pour la preuve de l'existence globale des solutions de l'équation

$$\text{(E)} \qquad y^{(n)} + B(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$$

et je vais donner pour elles les formules asymptotiques.

Nous donnons tout d'abord quelques définitions et quelques notations.

Soit A l'ensemble de toutes les fonctions ayant les dérivées d'ordre $n-1$ ($n \geqq 1$) continues sur l'intervalle $J = \langle x_0, \infty)$.

Nous dirons que la suite $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ des fonctions de A converge *quasi-uniformément (q-converge)* vers la fonction $f(x) \in A$, si pour tout $x \in J$ $\lim_{k \to \infty} f_k^{(j)}(x) = f^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Nous écrirons: $f_k(x) \xrightarrow{q} f(x)$.

Nous dirons que l'ensemble $M \subset A$ est *quasicompact (q-compact)* dans A, si chaque sous-ensemble infini de M contient une suite qui q-converge dnas A, c'est-à-dire q-converge vers une fonction de A.

Nous dirons que l'ensemble $M \subset A$ est *quasi-fermé (q-fermé)*, s'il contient la limite de toute la suite de M qui est q-convergente.

Nous dirons que les fonctions d'un ensemble $M \subset A$ sont *uniformément bornées*, s'il existe un nombre K tel que pour toute fonction $f(x) \in M$ il vaut: $|f^{(j)}(x)| \leqq K$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $x \in J$.

Nous dirons que les fonctions d'un ensemble $M \subset A$ sont *equicontinues* sur J, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ dépendant seulement de ε que pour toute fonction $f(x) \in M$ et $j = 0, 1, \ldots, n-1$ les rélations suivantes sont valables:

$$|f^{(j)}(x) - f^{(j)}(x')| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - x'| < \delta, \quad x, x' \in J.$$

Soit maintenant $C_{n-1,n-1}$ l'espace de Banach de toutes les fonctions définies sur l'intervalle J et ayant sur cet intervalle la dérivée d'ordre $n-1$ continue et bornée, muni de la norme $||f(x)|| = \sup_J |f^{(n-1)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-2} |f^{(i)}(x_0)|$.

Lemme 1. *La convergence d'àprès la norme* $||\ ||$ *implique la q-convergence.*

Démonstation. Soient $f_k(x), f(x) \in S_{n-1,n-1}$ et $||f_k(x) - f(x)|| \to 0$ pour $k \to \infty$. Il en résulte que $\sup |f_k^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x)| \to 0$, $|f_k^{(i)}(x_0) - f^{(i)}(x_0)| \to 0$ pour $k \to \infty$ et $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Mais cela signifie que la suite $\{f_k^{(n-1)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformément sur J vers $f^{(n-1)}(x)$ et c'est pourquoi aussi $\lim_{k\to\infty} f_k^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x)$ pour $x \in J$. Mais $f_k^{(n-2)}(x) = f_k^{(n-2)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_k^{(n-1)}(t)\, dt$, $x \in J$. À cause de la convergence uniforme de $\{f_k^{(n-1)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ vers $f^{(n-1)}(x)$ et à cause de la convergence de $\{f_k^{(n-2)}(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ vers $f^{(n-2)}(x_0)$ nous obtenons

$$\lim_{k\to\infty} f_k^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{(n-1)}(t)\, dt = f^{(n-2)}(x), \qquad x \in J.$$

On démontre facilement que cette dernière convergence est uniforme sur chaque intervalle fermé $\langle x_0, x_1\rangle$, $x_1 \in J$. De la manière analogue nous obtenons que $\lim_{k\to\infty} f_k^{(n-3)}(x) = f^{(n-3)}(x)$, $x \in J$ et cette convergence est aussi uniforme sur chaque intervalle fermé $\langle x_0, x_1\rangle$, $x_1 \in J$. Ainsi poursuivant l'idée nous obtenons que $\lim_{k\to\infty} f_k^{(i)}(x) = f^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $x \in J$. C'est ce qui termine la démonstration du lemme.

Lemme 2. *Soient les fonctions de l'ensemble* $M \subset C_{n-1,n-1}$ *uniformément bornées et equicontinues sur* J. *Alors* M *est q-compact.*

Démonstration. Soit $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ une suite des fonctions de M. Considérons tout d'abord la suite $\{f_k^{(n-1)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Des suppositions faites il s'ensuit que les fonctions $f_k^{(n-1)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, sont sur J uniformément bornées et equicontinues. En utilisant le théorème d'Arzelà, on démontre facilement l'existence d'une telle sous- suite $\{f_{k_j}^{(n-1)}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ de la suite $\{f_k^{(n-1)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ et l'existence d'une fonction $\varphi(x)$ que $\{f_{k_j}^{(n-1)}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ converge vers $\varphi(x)$ uniformément sur chaque intervalle fermé $\langle x_0, x_1 \rangle$, $x_1 > x_0$. Parce que les fonctions de M sont uniformément bornées par un nombre K, les suites $\{f_{k_j}^{(i)}(x_0)\}_{j=1}^{\infty}$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$, sont bornées. En tenant compte de toutes ces choses on peut choisir une sous- suite $\{f_{k_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ de la suite $\{f_{k_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ telle que

$$\lim_{s\to\infty} f_{k_s}^{(n-1)}(x) = \varphi(x), \qquad \lim_{s\to\infty} f_{k_s}^{(i)}(x_0) = c_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-2,$$

$$|c_i| \leqq K, \qquad \sup_J |\varphi(x)| \leqq K.$$

La démonstration que $f_{k_s}(x) \xrightarrow{q} f(x)$ où

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-2} c_j \frac{(x-x_0)^j}{j!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \qquad f(x) \in C_{n-1n-1},$$

est analogue à celle dans la démonstration du lemme 1.

Soit T un operateur sur $C_{n-1,n-1}$ qui applique $C_{n-1,n-1}$ dans $C_{n-1,n-1}$. Nous dirons que T est quasicontinu (q-continu) sur $C_{n-1,n-1}$ si la q-convergence $f_k(x) \xrightarrow{q} f(x)$, $f_k(x)$, $f(x) \in C_{n-1,n-1}$ implique que $\lim_{k\to\infty} \| T_k(x) - - Tf(x) \| = 0$.

Nous dirons encore que l'operateur T, défini sur $M \subset C_{n-1,n-1}$ est q-continu sur M s'il vaut:

$$\{f_k(x) \xrightarrow{q} f(x), \quad f_k(x), \quad f(x) \in M\} \Rightarrow \| Tf_k(x) - Tf(x) \| \to 0, \qquad k \to \infty.$$

On démontre facilement

Lemme 3. *Si T est q- continu sur $C_{n-1,n-1}$ (sur $M \subset C_{n-1,n-1}$), alors il est continu sur $C_{n-1,n-1}$ (sur M).*

Lemme 4. *Soit $M \subset C_{n-1,n-1}$ un ensemble qui est q-compact dans $C_{n-1,n-1}$ (dans M) et soit T q-continu sur $C_{n-1,n-1}$ (sur M). Alors TM est compact dans $C_{n-1,n-1}$ (dans TM) (aus sens de la norme $\| \; \|$).*

Quant à la démonstration des lemmes 3 et 4 voir [1], Hilfssatz 3, 4. Nous aurons encore besoin du lemme suivant qu'on démontre focilement:

Lemme 5. *Si $M \subset C_{n-1,n-1}$ est un ensemble convexe, alors la fermeture $\overline{M}$ est aussi un ensemble convexe.*

Maintenant nous allons nous occuper de l'équtation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y^{(n)} + B(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \qquad n \geqq 1.$$

Théorème 1. *Soient* $B(x, \mathbf{u})$, $F(x, \mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$, *les fonctions continues dans* x, $\mathbf{u}$ *sur le domiane*

$$\Omega : a < x < \infty, \qquad -\infty < u_i < \infty, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

et soit $F(x, \mathbf{u})$ *nondécroissante dans chacune de ses variables* u_i *et telle que*

$$(1) \qquad |B(x, \mathbf{u})| \leqq F(x, \mathbf{u}), \qquad (x, \mathbf{u}) \in \Omega.$$

Soit $K > 0$, *et* $x_0 > a$,

$$\varphi(x) = K \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} (x - x_0)^i$$

et

$$(2) \qquad \int^{\infty} F(t, \varphi(t))\, \mathrm{d}t < \infty \qquad \textit{pour tout } K > 0,$$

$$(3) \qquad \lim_{K \to \infty} \frac{1}{K} \int^{\infty} F(t, \varphi(t))\, \mathrm{d}t = 0.$$

Soient $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ *les nombres réels arbitraires. Alors, par les conditions initiales* $(x_0; c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ *est determinée au moins une solution* $y(x)$ *de* (E) *qui existe au moins sur l' intervalle* $\langle x_0, \infty) = J$.

Si encore

$$(4) \qquad \int^{\infty} t^{n-1} F(t, \varphi(t))\, \mathrm{d}t < \infty \qquad \textit{pour tout } K > 0,$$

alors pour cette solution $y(x)$ *sont valables les formules*

$$(5) \qquad y^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n-1} c_k \frac{(x - x_0)^{k-i}}{(k-1)!} + 0(1), \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Démonstration. Sous les conditions posées la solution de l'équation intégrale

$$(6) \qquad y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{(x - x_0)^k}{k!} - \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, \mathbf{y}(t))\, \mathrm{d}t$$

est aussi la solution de l'équation (E) et remplit les conditions initiales données. Nous allons démontrer que cette solution de l'équation (6) existe sur J au moins. Definissons l'operateur T sur l'espace $C_{n-1, n-1}$ de la manière suivante: Si $f(x) \in C_{n-1, n-1}$, alors

$$(7) \qquad Tf(x) = v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{(x-x_0)^k}{k!} - \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, f(t))\, dt.$$

Soit maintenant $G_K = \{f(x) \in C_{n-1,n-1} \mid \| f(x) \| \leqq K\}$ la boule fermée. Alors pour toute $f(x) \in G_K$ il vaut:

$$(8) \qquad | f^{(i)}(x) | \leqq K \sum_{k=i}^{n-1} \frac{(x-x_0)^{k-i}}{(k-i)!} = \varphi^{(i)}(x)$$

et en respectant (1) et (2)

$$| (Tf(x))^{(n-1)} | = | v^{(n-1)}(x) | = | c_{n-1} - \int_{x_0}^{x} B(t, f(t))\, dt | \leqq$$

$$\leqq | c_{n-1} | + \int_{x_0}^{\infty} F(t, \varphi(t))\, dt.$$

Ce signifie que $Tf(x) = v(x) \in C_{n-1,n-1}$. Calculons maintenant la norme $\| Tf(x) \| = \| v(x) \|$, $f(x) \in G_K$. En respectant de nouveau (1) et (2) nous obtenons

$$\| Tf(x) \| = \sup | c_{n-1} - \int_{x_0}^{x} B(t, f(t))\, dt | + \sum_{i=0}^{n-2} | ci | \leqq$$

$$(9) \qquad \leqq \sum_{i=0}^{n-1} | ci | + \int_{x_0}^{\infty} F(t, \varphi(t))\, dt = A(K) < \infty.$$

En respectant (3) nous obtenous

$$\lim_{K \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} | c_i | + \int_{x_0}^{\infty} F(t, \varphi(t))\, dt}{K} = 0.$$

Il s'ensuit de cela quil' existe un nombre K_0 tel que pour tout $K \geqq K_0$

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} | c_i | + \int_{x}^{\infty} F(t, \varphi(t))\, dt}{K} = \frac{A(K)}{K} \leqq 1.$$

Dans ce qui suit prenons $K = K_0$. Alors de (9) nous obtenons que $\| Tf(x) \| \leqq A(K_0) \leqq K_0$, c'est qui signifie que $TG_{K_0} \subset G_{K_0}$.

Operateur T est q-continu sur G_{K_0}. En effet, soit $f_k(x) \xrightarrow{q} f(x)$, $f_k(x)$, $f(x) \in G_{K_0}$. Alors

$$(10) \qquad \| Tf_k(x) - Tf(x) \| \leqq \sup_J \int_{x_0}^{x} | B(t, f_k(t)) - B(t, f(t)) |\, dt.$$

La continuité de $B(x,u)$ sur Ω nous donne que $| B(t, f_k(t)) - B(t, f(t)) |$ converge vers 0 pour tout $t \in J$ et en tenant compte de (8), (1) et (2) nous obtenons que $\int_{x_0}^{\infty} | B(t, f_k(t)) - B(t, f(t)) | \, dt \leqq 2 \int_{x_0}^{\infty} F(t, \varphi(t)) \, dt$. Alors nous pouvons appliquer le théorème de Lebesque sur (10) ce qui donne $\| Tf_k(x) - Tf(x) \| \to 0$ pour $k \to \infty$.

L'ensemble TG_{K_0} est l'ensemble de toutes les fonctions de la forme (7), où $f(x)$ parcourt l'ensemble G_{K_0}. Soit N l'ensemble de toutes les fonctions de la forme

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, f(t)) \, dt, \tag{11}$$

où $f(t)$ parcourt l'ensemble G_{K_0}. Il est evident que $N \subset C_{n-1,n-1}$ et aussi $N \subset G_{K_0}$ parce que $\| z \| \leqq \| Tf(x) \| = \| v(x) \| \leqq K_0$.

Si S est un ensemble des fonctions, notons $S^{(i)}$ l'ensemble des dérivées d'ordre i de toutes les fonctions de S.

Nous allons démontrer que les fonctions de l'ensemble $N^{(n-1)}$ sont uniformément bornées sur J. En effet, il est

$$| z^{(n-1)}(x) | \leqq \int_{x_0}^{x} | B(t, f(t)) | \, dt \leqq \int_{x_0}^{\infty} F(t, \varphi(t)) \, dt = L \leqq K_0. \tag{12}$$

Les fonctions de l'ensemble $N^{(n-1)}$ sont aussi equicontinues. Cette affirmation résulte du fait que

$$| z^{(n-1)}(x_2) - z^{(n-1)}(x_1) | = \left| \int_{x_0}^{x_2} B(t, f(t)) \, dt - \int_{x_0}^{x_1} B(t, f(t)) \, dt \right| \leqq$$

$$\leqq \left| \int_{x_1}^{x_2} | B(t, f(t)) | \, dt \right| \leqq \left| \int_{x_1}^{x_2} F(t, \varphi(t)) \, dt \right|$$

et du fait que la fonction $F(t, \varphi(t))$ est continue sur J et l'intégrale $\int_{x_0}^{\infty} F(t, \varphi(t)) \, dt$ existe. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi. Il existe alors un nombre ξ tel que $\int_{x}^{\infty} F(t, \varphi(t)) \, dt < \varepsilon/2$ pour $x \geqq \xi$. Soit $M = \max\limits_{\langle x_0, \xi \rangle} F(t, \varphi(t))$ et $\delta = \varepsilon/(2M)$. Si $x_1, x_2 \in \langle x_0, \xi \rangle$ et $| x_2 - x_1 | < \delta$, alors $| z^{(n-1)}(x_2) - z^{(n-1)}(x_1) | \leqq \left| \int_{x_1}^{x_2} F(t, \varphi(t)) \, dt \right| \leqq M | x_2 - x_1 | < \varepsilon/2$.

Si $x_1 < \xi < x_2$ et $|x_2 - x_1| < \delta$, alors $|x_1 - \xi| < \delta$ et

$$|z^{(n-1)}(x_2) - z^{(n-1)}(x_1)| = |z^{(n-1)}(x_2) - z^{(n-1)}(\xi)| + $$
$$+ |z^{(n-1)}(\xi) - z^{(n-1)}(x_1)| \leqq \int_{\xi}^{x_2} F(t, \varphi(t))\, dt +$$
$$+ \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Pour $\xi \leqq x_1 < x_2$ nous obtenons immédiatement

$$|z^{(n-1)}(x_2) - z^{(n-1)}(x_1)| \leqq \int_{x_1}^{x_2} F(t, \varphi(t))\, dt < \varepsilon/2.$$

Soit $\hat{N}$ l'enveloppe convexe de N. Les fonctions de $(\hat{N})^{(n-1)}$ sont uniformément bornées sur J. En effet, si $u(x) \in N$, on peut trouver le nombre entier $m > 0$ et les nombres $c_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} c_i = 1$ et les elements $z_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, de N que $u(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i z_i(x)$. Il en résulte que $|u^{(n-1)}(x)| \leqq \sum_{i=1}^{m} c_i |z^{(n-1)}(x)| \leqq \sum_{i=1}^{m} c_i L = L$.

Les fonctions de $(\hat{N})^{(n-1)}$ sont aussi equicontinues sur J c'est qui résulte de la representation de $u(x) \in N : u(x) = \sum_{2=i}^{m} c_i z_i(x)$, $z_i(x) \in N$ et du fait que les fonctions de $N^{(n-1)}$ sont equicontinues.

Soit $\bar{\hat{N}} = F$ la fermeture de $\hat{N}$. Alors le fonctions de $F^{(n-1)}$ sont sur J uniformément bornées. En effet, si $y(x) \in F$, $y(x) \in \hat{N}$, alors $|y^{(n-1)}(x)| \leqq$ $\leqq L$. Si $y(x) \in F$, $y(x) \bar{\in} \hat{N}$, il existe une suite $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $u_k(x) \in \hat{N}$ que $\|u_k(x) - y(x)\| \to 0$ pour $k \to \infty$. Mais $|u_k^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x)| \leqq \sup_J |u_k^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x)| \leqq \|u_k(x) - y(x)\|$. Alors $|u_k^{(n-1)}(x) -$ $- y^{(n-1)}(x)| \to 0$ pour $k \to \infty$ uniformément sur J d'où il résulte que $|y^{(n-1)}(x)| \leqq |u_k^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x)| + |u_k^{(n-1)}(x)| \leqq |u_k^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x)| +$ $+ L$. Pour $k \to \infty$ nous obtenons que $|y^{(n-1)}(x)| \leqq L \leqq K_0$.

Les fonctions de $F^{(n-1)}$ sont aussi equicontinues sur J. En effet, si $y(x) \in F$, $y(x) \in \hat{N}$, alors les fonctions de $(N)^{(n-1)}$ étant equicontinues sur J il existe pour $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour $|x - x'| < \delta$, $x, x' \in J$, $|y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x')| < \varepsilon/2 < \varepsilon$. Si $y(x) \in F$, $y(x) \bar{\in} \hat{N}$, alors il existe une suite $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $u_k(x) \in \hat{N}$ telle que $\|u_k(x) - y(x)\| \to 0$

pour $k \to \infty$. et $|u_k^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x)| \leqq ||u_k(x) - y(x)|| \to 0$ pour $k \to \infty$ Maintenant pour $|x - x'| < \delta$ il est

$$\begin{aligned} |y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x')| &\leqq |y^{(n-1)}(x) - u_k^{(n-1)}(x)| + \\ + |u_k^{(n-1)}(x) - u_k^{(n-1)}(x')| &+ |u_k^{(n-1)}(x') - y^{(n-1)}(x')| < \\ < |y^{(n-1)}(x) - u_k^{(n-1)}(x)| &+ \varepsilon/2 + |u_k^{(n-1)}(x') - y^{(n-1)}(x')|, \end{aligned}$$

d'où pour $k \to \infty$

$$|y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x')| \leqq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Il est évident que pour $z(x) \in N$ et aussi pour $z(x) \in F$ est valable $z^{(i)}(x_0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Nous allons maintenant démontrer que F est q-compact dans G_{K_0}. Soit $F_1 \subset F$ un sous-ensemble infini. De l'ensemble $F_1^{(n-1)}$ qui est l'ensemble des fonctions uniformément bornées par L et equicontinues on peut extraire une suite $\{y_k^{(n-1)}(x)\}$ convergent sur J vers une fonction $g(x)$ continue et bornée par L et $g(x_0) = 0$. Cette convergence est uniforme sur chaque intervalle fini et fermé $\langle x_0, b\rangle$, $x_0 < b$. On démontre aisément que $y_k^{(n-2)}(x)$ converge vers $\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$ uniformément sur chaque intervalle fermé $\langle x_0, b\rangle$. Ainsi pousuivant l'idée et tenant compte de ce que $y_k^{(i)}(x_0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, nous obtenons que $\{y_k(x)\}_{k-1}^{\infty}$ converge vers $\int_{x_0}^{x} ((x-t)^{n-2}g(t)/(n-2)!)\,dt = \psi(x)$ uniformément sur chaque intervalle fermé $\langle x_0, b\rangle$. Alors $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ q-converge vers $\psi(x)$. On verifie aisément que $||\psi(x)|| \leqq L < K_0$. Alors $\psi(x) \in G_{K_0}$. C'est qui signifie que F est q-compact dans G_{K_0}.

Maintenant l'ensemble $M = \widehat{\overline{TG_{K_0}}}$ est l'ensemble de toutes les fonctions de la forme

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{(x-x_0)^k}{k!} - u(x),$$

où $y(x)$ parcourt l'ensemble F. Il est évident que M est q-compact, convexe et fermé. Parce que $TG_{K_0} \subset G_{K_0}$ et G_{K_0} est convexe et fermé, il est $M = \widehat{\overline{TG_{K_0}}} \subset G_{K_0}$. Alors $TM \subset TG_{K_0} \subset \widehat{\overline{TG_{K_0}}} = M$. Parce que M est q-compact et T l'operateur q-continu sur G_{K_0}, TM est compact. D'après le théorème de Schauder T a au moins un point fixe sur M. Cela signifie que l'équation intégrale (6) a au moins une solution définie sur J au moins et cette colution est aussi une solution de (E) satisfaisante aux conditions initiales données.

Si encore la condition (4) est satisfaite, on obtient les formules (5) immédiatement de l'équation (6).

Les théorèmes suivants donnent les résultats similaires sous les conditions un peu changées.

Théorème 2. *Soit $B(x, u)$ une fonction continue sur Ω. Soit $F(x)$ une fonction continue sur (a, ∞) et telle que*

$$(13) \qquad |B(x, u)| \leqq F(x) \text{ pour tout point } (x, u) \in \Omega.$$

Soit encore, $x_0 > a$,

$$(14) \qquad \int_{x_0}^{\infty} F(t)\,dt < \infty.$$

Alors par tout point $(x_0; c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$, où $x_0 \in (a, \infty)$ et c_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, sont les nombres réels arbitraires, passe au moins une solntions $y(x)$ de l'équation (E) et cette solution est definie sur l'intervalle J au moins.

Si encore $\int_{x_0}^{\infty} t^{n-1}F(t)\,dt < \infty$, alors les formules (5) *sont valables pour $y(x)$.*

La démonstration est presque la même que celle du théorème 1. On définie sur $C_{n-1,n-1}$ l'operateur T de la même façon. Pour $f(x) \in C_{n-1,n-1}$ arbitraire on a

$$\|Tf(x)\| = \sup_J |c_{n-1} - \int_{x_0}^{x} B(t, \mathbf{f}(t))\,dt| + \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| \leqq$$
$$\leqq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + \int_{x_0}^{\infty} |B(t, \mathbf{f}(t))|\,dt \leqq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| +$$
$$+ \int_{x_0}^{\infty} F(t)\,dt = K.$$

Cela signifie que $TC_{n-1,n-1} \subset G_K = \{f(x) \in C_{n-1,n-1} \mid \|f(x)\| \leqq K\}$ et aussi $TG_K \subset G_K$. On demontre comme dans le cas précedent que T est q-continue sur G_K et que $\overline{\widehat{TG_K}}$ est q-compact. Une application du théorème de Schauder donne l'existence de la solution $y(x)$ cherchée. Aussi le reste des affirmations du théorème résulte des mêmes idées.

Théorèrme 3. *Soit $B(x, \mathbf{u})$ une fonction continue sur Ω. Soit*

$$(15) \qquad |B(x, \mathbf{u})| \leqq a(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}(x) \, |u_i| = F(x, \mathbf{u})$$

pour tout $(x, \mathbf{u}) \in \Omega$. Soit

$$(16) \qquad \int_{x_0}^{\infty} x^{n-i-1} a_{n-i}(x) \, \mathrm{d}x < \infty, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} a(x) \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Alors pour $x_0 \in (a, \infty)$ assez grand par chaque point $(x_0; c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$, où c_i sont des nombres réels arbitraires, passe au moins une solution $y(x)$ de l'équation (E). Cette solution est définie sur l'intervalle $J = \langle x_0, \infty)$ au moins.

Si encore

$$(17) \qquad \int_{x_0}^{\infty} x^{2n-i-1} a_{n-i}(x) \, \mathrm{d}x < \infty, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

alors pour la solution $y(x)$ sont valables les formules (5).

Démonstration. Nous definissons l'operateur T sur la boule $G_K = \{f(x) \in C_{n-1,n-1} \mid \|f(x)\| \leqq K\}$ par la formule (7). Pour la norme $\| Tf(x) \|$ nous obtenons l'inégalité

$$\| Tf(x) \| = \sup_J \left| c_{n-1} - \int_{x_0}^{x} B(t, \mathbf{f}(t)) \, \mathrm{d}t \right| + \sum_{i=0}^{n-2} |c_i| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + \sup_J \int_{x_0}^{x} |B(t, \mathbf{f}(t))| \, \mathrm{d}t \leqq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| +$$

$$+ \sup \left[\int_{x_0}^{x} a(t) \, \mathrm{d}t + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{x} a_{n-i}(t) \, \varphi^{(i)}(t) \, \mathrm{d}t \right] \leqq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + \int_{x_0}^{\infty} a(t) \, \mathrm{d}t +$$

$$+ K \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{\infty} a_{n-i}(t) \sum_{k=i}^{n-1} \frac{(t - x_0)^{k-i}}{(k-i)!} \, \mathrm{d}t,$$

où $\varphi(x)$ est le polynome du théorème 1. Soit x_0 tel que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{\infty} a_{n-i}(t) \sum_{k=i}^{n-1} \frac{(t - x_0)^{k-i}}{(k-i)!} \, \mathrm{d}t \leqq 1.$$

Alors il existe un nombre K_0 tel que

$$\| Tf(x) \| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} | c_i | + \int_{x_0}^{\infty} a(t)\, \mathrm{d}t +$$

$$+ K_0 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{\infty} a_{n-i}(t) \sum_{k=i}^{n-1} \frac{(t - x_0)^{k-i}}{(k - i)!}\, \mathrm{d}t \leqq K_0,$$

où $f(x) \in G_{K_0}$. Le reste de la démonstration est le même comme dans les cas précédents.

LITTÉRATURE

[1] Švec M.: Fixpuntsatz und monotone Lösungen der Differentialgleichung $y^{(n)} + B(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\, y = 0$. Archivum mathematicum (Brno), T. 2 (1966), 43—55.