Marko Švec

Fixpunktsatz und monotone Lösungen der Differentialgleichung $y^{(n)} + B(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})y = 0$

Archivum Mathematicum, Vol. 2 (1966), No. 2, 43--55

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104606`

FIXPUNKTSATZ UND MONOTONE LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

$y^{(n)} + B(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\, y = 0$

MARKO ŠVEC, BRATISLAVA

(Eingegangen am 27. Jänner 1966)

Die vorliegende Arbeit hat zwei Teile. Im ersten Teil ist eine Verallgemeinerung des Schauderschen Fixpunktsatzes gegeben. Im zweiten Teil ist mittels dieses Fixpunktsatzes die Existenz der monotonen Lösungen der Gleichung (E) bewiesen.

I.

Wir führen zuerst einige Definitionen ein und beweisen einige Hilfssätze und Sätze und zum Schluß vier Fixpunktsätze.

Definition 1. S_n möge die Menge aller Funktionen bedeuten, die auf einem Intervall J stetige und beschränkte Ableitungen bis zu der n-ten Ordnung inklusive haben. Ist $f(x) \in S_n$, so sei $\| f(x) \| = \max_{0 \leq i \leq n} \{\sup_J | f^{(i)}(x)|\}$ die Norm von $f(x)$. Bei dieser Norm ist S_n ein Banachscher Raum.

Definition 2. Seien $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, f(x)$ die Funktionen, die auf J stetige Ableitungen bis zu der n-ten Ordnung inklusive haben. Wir werden sagen, daß die Folge $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ zu $f(x)$ auf J quasi-gleichmäßig konvergiert (kurz: q-konvergiert), wenn für jedes $x \in J$ und $i = 0, 1, \dots, n$

$$\lim_{k \to \infty} f_k^{(i)}(x) = f^{(i)}(x)$$

ist. Wir werden schreiben: $f_k(x) \xrightarrow{q} f(x)$ auf J.

Bemerkung 1. Es ist leicht zu ersehen, daß jede Teilfolge einer zu $f(x)$ q-konvergenten Folge selbst zu $f(x)$ q-konvergiert.

Bemerkung 2. Aus der Konvergenz nach der Norm $\| \quad \|$ in S_n folgt die q-Konvergenz.

Definition 3. Die Menge $M \subset S_n$ heißt quasikompakt (kurz: q-kompakt) in S_n, wenn jede unendliche Teilmenge von M eine in S_n q-konvergente Folge enthält.

Definition 4. Die Funktionen der Menge $M \subset S_n$ heißen gleichgradig stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nur von ε abhängende Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$

derart gibt, daß für $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$, $x, x' \in J$ und jede Funktion $f(x) \in M$

$$|f^{(i)}(x) - f^{(i)}(x')| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

ist. Die Funktionen der Menge $M \subset S_n$ heißen gleichmäßig beschränkt, wenn es eine solche Zahl K gibt, daß für jede Funktion $f(x) \in M$ und für jedes $x \in I$ und $i = 0, 1, \ldots n$, $|f^{(i)}(x)| \leqq K$ ist.

Definition 5. Ist M eine Menge der auf J definierten Funktionen und $\langle a, b\rangle$ ein Intervall aus J, so bedeute $M\langle a, b\rangle$ die Menge aller partiellen Funktionen, die durch M und das Intervall $\langle a, b\rangle$ bestimmt sind.

Hilfssatz 1. *M sei eine unendliche Menge von S_n. Sei weiter $M\langle a, b\rangle$ für jedes abgeschlossene Intervall $\langle a, b\rangle$ aus J C-kompakt, d. h. im Sinne der Norm: ist $g(x) \in M\langle a, b\rangle$, so ist $\| g(x) \|_C = \max\limits_{0 \leqq i \leqq n} \{ \max\limits_{\langle a,b\rangle} |g^{(i)}(x)| \}$ die Norm von $g(x)$. Dann kann man aus M eine Folge $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ auswählen, die auf J zu irgendeiner Funktion $v(x)$ q-konvergiert. Ist M beschränkt, so ist $v(x) \in S_n$, also M ist q-kompakt.*

Beweis. Man bildet die Folge der Intervalle $\langle a_j, b_j\rangle$, $j = 1, 2, \ldots$, so, daß $\langle a_j b_j\rangle \subset \langle a_{j+1}, b_{j+1}\rangle$, $\lim\limits_{j\to\infty} a_j$ gleich dem linken Randpunkt und $\lim\limits_{j\to\infty} b_j$ gleich dem rechten Randpunkt von J ist. Nach der Voraussetzung ist $M\langle a_j, b_j\rangle$ C-kompakt. Man kann also die Teilfolgen $\{f_{jk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $j = 1, 2, \ldots$, aus M so auswählen, daß $\{f_{jk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ auf $\langle a_j, b_j\rangle$ nach der Norm C und darum auch q-konvergiert und daß $\{f_{j+1,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ eine Teilfolge von $\{f_{jk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ist. Bildet man die Diagonalfolge $\{f_{kk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ aus den Folgen $\{f_{jk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $j = 1, 2, \ldots$, so sieht man leicht, daß diese Diagonalfolge zu irgendeiner Funktion $v(x)$ auf J q-konvergiert.

Wenn M beschränkt ist, d. h. wenn $\| f(x) \| \leqq K$ für jede Funktion $f(x) \in M$, so ist $|v^{(i)}(x)| \leqq K$ für $x \in J$ und $i = 0, 1, \ldots, n$. Das bedeutet, daß $v(x) \in S_n$ ist. Also M ist q-kompakt.

Hilfssatz 2. *Die Funktionen der Menge $M \subset S_n$ seien gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Dann ist M q-kompakt.*

Beweis. Aus dem Satz von Arzelà folgt, daß $M\langle a, b\rangle$ für jedes Intervall $\langle a, b\rangle$ aus J C-kompakt ist. Die Behauptung des Hilfssatzes 2 folgt dann aus dem Hilfssatz 1.

Definition 6. Ein Operator T auf $S_n: S_n \to S_n$, heißt quasistetig (kurz: q-stetig), wenn aus $f_k(x) \xrightarrow{q} f(x)$, $f_k(x), f(x) \in S_n$ folgt, daß $\lim\limits_{k\to\infty} \| Tf_k(x) - Tf(x) \| = 0$ ist.

Hilfssatz 3. *Ist T auf S_n q-stetig, so ist T auf S_n stetig.*

Beweis. Nach der Bemerkung 2, aus $\lim\limits_{k\to\infty} \| f_k(x) - f(x) \| = 0$ folgt, daß $f_k(x) \xrightarrow{q} f(x)$ und daraus, da T q-stetig ist, $\lim\limits_{k\to\infty} \| Tf_k(x) - Tf(x) \| = 0$ ist.

Satz 1. *Sei F ein Funktional auf $S_n \times S_n$ und T ein Operator auf S_n. Es sei*

1. *F q-stetig, d. h. aus $f_k(x) \xrightarrow{q} f(x)$, $g_k(x) \xrightarrow{q} g(x)$ folgt $\lim\limits_{k\to\infty} \{F[f_k(x), g_k(x)] - F[f(x), g(x)]\} = 0$;*
2. *$F[f(x), f(x)] = 0$;*
3. *$\| Tf_1(x) - Tf_2(x) \| \leqq F[f_1(x), f_2(x)]$.*

Dann ist T q-stetig und darum auch stetig.

Beweis. Aus $f_k(x) \xrightarrow{q} f(x)$ folgt $\lim\limits_{k\to\infty} F[f_k(x), f(x)] = F[f(x), f(x)] = 0$ und daraus nach 3. $\lim\limits_{k\to\infty} \| Tf_k(x) - Tf(x) \| = \lim\limits_{k\to\infty} F[f_k(x), f(x)] = 0$.

Hilfssatz 4. Sei $M \subset S_n$ *eine q-kompakte Menge und T ein auf S_n q-stetiger Operator. Dann ist TM kompakt.*

Beweis. Sei $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ irendeine unendliche Folge aus TM und $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ die zu ihr gehörige Folge aus M, so daß $Tf_k(x) = g_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, ist. Da M q-kompakt ist, kann man aus $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ eine in S_n q-konvergente Folge $\{f_{lk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ auswählen. Nun aber aus der q-Stetigkeit von T folgt die Konvergenz von $\{Tf_{lk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ nach der Norm. Die Folge $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ enthält also eine Teilfolge, $\{g_{lk}(x)\} = \{Tf_{lk}(x)\}$, die nach der Norm konvergiert.

Satz 2. *Sei T ein q-stetiger Operator auf S_n. Sei $M \subset S_n$ eine konvexe, abgeschlossene und q-kompakte Menge und sei $TM \subset M$. Dann hat T mindestens einen Fixpunkt in M.*

Beweis. Da T q-stetig ist, ist er auch stetig. Nach dem Hilfssatz 4 ist TM kompakt. Die Existenz wenigstens eines Fixpunktes von T in M folgt aus dem Fixpunktsatz von Schauder.

Fixpunktsatz von Schauder. *Sei M eine konvexe, abgeschloßene Teilmenge des Banachschen Raum R. Sei T ein stetiger Operator auf M. Sei TM kompakt und $TM \subset M$. Dann hat T mindestens einen Fixpunkt in M.*

Hilfssatz 5. *Sei $M \subset S_n$ die Menge der gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Funktionen. Dann:*

a) Die Konvexe Hülle $\hat{M}$ von M ist ebenfalls eine Menge der gleichmässig beschränkten und gleichgradig stetigen Funktionen von S_n.

a) Die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ von M ist ebenfalls eine Menge der gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Funktionen von S_n.

Beweis. a) Die konvexe Hülle $\hat{M}$ besteht aus allen Funktionen $f(x)$ der Form

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x), \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \qquad \alpha_i \geqq 0,$$

wo $f_i(x) \in M$ sind. Gilt für jede Funktion $f_i(x) \in M$, daß $| f_i^{(j)}(x) | \leqq K$, $j = 0,1,\ldots, n$ ist, so sieht man gleich, daß

$$| f^{(j)}(x) | \leqq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, | f_i^{(j)}(x) | \leqq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i K = K$$

ist.

Sei nun M die Menge der gleichgradig stetigen Funktionen, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt eine nur von ε abhängende Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$, so daß $| f_i^{(j)}(x) - f_i^{(j)}(x') | < \varepsilon$, $j = 0, 1, \ldots, n$, für $| x - x' | < \delta(\varepsilon)$ und jede Funktion $f_i(x) \in M$. Dann aber erhalten wir für die Funktion $f(x)$ aus (1), daß $| f^{(j)}(x) - f^{(j)}(x') | \leqq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, | f_i^{(j)}(x) - f_i^{(j)}(x') | < \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \varepsilon = \varepsilon$, $j = 0, 1, \ldots, n$, für $| x - x' | < \delta(\varepsilon)$. Das bedeutet, daß $\hat{M}$ eine Menge der gleichgradig stetigen Funktionen ist.

b) Für jede $f(x) \in \overline{M}$ gelte nun, daß $| f(x)^{(j)} | \leqq K$, $j = 0,1\ldots, n$. Es sei $g(x) \in \overline{M}$, $g(x) \,\overline{\in}\, M$. Dann gibt es eine Folge $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ aus M derart, daß $\lim \| f_k(x) - g(x) \| = 0$ ist. Also $\lim | f_k^{(j)}(x) - g^{(j)}(x) | = 0$, $j = 0,1, \ldots, n$. Nun aus $| g^{(j)}(x) | \leqq | f_k^{(j)}(x) | + | f_k^{(j)}(x) - g^{(j)}(x) | \leqq K + | f_k^{(j)}(x) - g^{(j)}(x) |$ erhalten wir für $k \to \infty$, dass $| g^{(j)}(x) | \leqq K$, $j = 0,1, \ldots, n$, ist.

Sei nun M eine Menge der gleichgradig stetigen Funktionen. Also zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine nur von ε abhängende Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß für $| x - x' | < \delta(\varepsilon)$ und für jede Funktion $f(x) \in \underline{M}$ und $j = 0, 1, \ldots, n$ gilt: $| f^{(j)}(x) - f^{(j)}(x') | < \varepsilon/2$. Sei nun $h(x) \in \overline{M}$ beliebig gewählt. Es gibt dann eine Folge $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ in M derart, daß $\lim\limits_{k \to \infty} \| f_k(x) - h(x) \| = 0$ ist. Nun aber für $| x - x' | < \delta(\varepsilon)$ erhalten wir, daß $| h^{(j)}(x) - h^{(j)}(x') | \leqq | f_k^{(j)}(x) - h^{(j)}(x) | + | f_k^{(j)}(x) - f_k^{(j)}(x') | + | f_k^{(j)}(x') - h^{(j)}(x') | < | f_k^{(j)}(x) - h^{(j)}(x) | + \varepsilon/2 + | f_k^{(j)}(x') - h^{(j)}(x') |$, $j = 0, 1, \ldots, n$, ist. Daraus erhalten wir durch Limesbildung, daß $| h^{(j)}(x) - h^{(j)}(x') | < \varepsilon$, $j = 0, 1, \ldots, n$, ist.

Hilfssatz 6. (*Siehe* [1], *S.* 351.) *Ist* $M \subset S_n$ *eine konvexe Menge, so ist die abgeschlossene Hülle* $\overline{M}$ *von* M *ebenfalls konvex.*

Satz 3. *T sei ein q-stetiger Operator auf* S_n. *Sei weiter* $M \subset S_n$ *eine konvexe, abgeschlossene Menge und TM eine Menge der gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Funktionen und sei* $TM \subset M$. *Dann hat T mindestens einen Fixpunkt in M.*

Beweis. Sei $TM = M_1$ und $\hat{M}_1 = \hat{N}$ die konvexe Hülle von M_1. Nach dem Hilfssatz 5 ist N eine Menge der gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Funktionen. Sei weiter $\overline{N}$ die abgeschlossene Hülle von N. Nach dem Hilfssatz 5 ist $\overline{N}$ ebenfalls eine Menge der gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Funktionen, also nach dem Hilfssatz 2 ist sie q-kompakt. Da N konvex ist, ist $\overline{N}$ (nach dem Hilfssatz 6) ebenfalls konvex. Also, $\overline{N}$ ist konvex, abgeschlossen und q-kompakt.

Nun, $TM = M_1 \subset M$. Da M konvex ist, ist $\hat{M}_1 = N \subset M$ und da M auch abgeschlossen ist, ist $\overline{N} \subset M$. Daraus folgt, daß $T\overline{N} \subset TM = M_1 \subset \hat{M}_1 = N \subset \overline{N} \subset M$ ist. Nach dem Satz 2 hat T mindestens einen Fixpunkt in $\overline{N}$, und darum auch in M.

Satz 4. *T sei ein Operator auf S_n solcher Art, daß aus*

(2) $\quad f_k(x) \xrightarrow{q} f(x),\ f_k(x) \in S_n,\ f(x) \in S_n,\ \{\| f_k(x) \|\}_{k=1}^{\infty}$ *beschränkt*

folgt

$$\| Tf_k(x) - Tf(x) \| \to 0 \quad \textit{für} \quad k \to \infty.$$

Sei $M \subset S_n$ eine konvexe, abgeschlossene Menge und TM eine Menge der gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Funktionen und sei $TM \subset M$. Dann hat T mindestens einen Fixpunkt in M.

Beweis. Man sieht leicht, daß aus der Bedingung (2) die Stetigkeit von T auf S_n folgt. M_1, N, $\overline{N}$ sollen dieselbe Bedeutung wie im Beweise des Satzes 3 haben. Wir haben dort gezeigt, daß $\overline{N}$ eine konvexe, abgeschloßene und q-kompakte Menge ist und daß $T\overline{N} \subset \overline{N}$ ist. Wir brauchen nur zu beweisen, daß $T\overline{N}$ kompakt ist. Sei $D \subset T\overline{N}$ irgendeine unendliche Teilmenge von $T\overline{N}$. Dann gibt eine Teilmenge $C \subset \overline{N}$, daß $TC = D$ ist. Da $\overline{N}$ q-kompakt ist, kann man in C eine Folge $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ und eine Funktion $g(x)$ in S_n auswählen, daß $g_k(x) \xrightarrow{q} g(x)$. Da $\overline{N}$ gleichmäßig beschränkt ist, ist $\{\| g_k(x) \|\}_{k=1}^{\infty}$ beschränkt. Dann aber nach (2) $\lim_{k\to\infty} \| Tg_k(x) - Tg(x) \| = 0$ ist. Damit ist bewiesen, daß $T\overline{N}$ kompakt ist. Die Behauptung des Satzes folgt nun aus dem Schauderschen Fixpunktsatz, den man auf $\overline{N}$ verwendet.

Definition 7. Eine Menge $M \subset S_n$ heißt q-abgeschlossen, wenn aus $f_k(x) \in S_n, f(x) \xrightarrow{q} f_k(x)$ folgt $f(x) \in M$.

Satz 5. *Sei $M \subset S_n$ eine konvexe und q-abgeschlossene Menge. Sei T ein auf M definierter und q-stetiger Operator, d. h. aus $f_k(x) \xrightarrow{q} f(x)$, $f_k(x) \in M$, $f(x) \in M$ folgt $\lim_{k\to\infty} \| Tf_k(x) - Tf(x) \| = 0$.*

Sei weiter TM eine Menge der gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Funktionen und sei $TM \subset M$.

Dann hat T mindestens einen Fixpunkt in M.

Beweis. Man beweist leicht folgende Behauptungen: Ist M q-abgeschlossen, so ist M abgeschlossen. Ist T auf M q-stetig, so ist er auf M stetig.

Nun habe $\overline{N}$ dieselbe Bedeutung wie im Beweise des Satzes 3 und 4. Also $\overline{N}$ ist konvex, abgeschlossen und q-kompakt und $T\overline{N} \subset \overline{N}$. Wir haben nur zu beweisen, daß $T\overline{N}$ kompakt ist. Sei $D \subset T\overline{N}$ eine beliebige unendliche Menge. Dann gibt in $\overline{N}$ eine unendliche Menge C derart, daß $TC = D$ ist. Da $\overline{N}$ q-kompakt ist, existiert eine Folge $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ in C, daß $g_k(x) \xrightarrow{q} g(x)$. Da $g_k(x) \in \overline{N} \subset M$ und M q-abgeschlossen ist, ist $g(x) \in M$. Nun aus der q-Stetigkeit von T folgt, daß $\lim_{k\to\infty} \| Tg_k(x) - - Tg(x) \| = 0$ ist. Also D enthält die Folge $\{Tg_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, die nach der Norm konvergiert, d. h. $T\overline{N}$ ist kompakt.

Die Sätze 2—5 gelten auch für einige andere Banachräume als S_n.

Definition 8. Sei A_n die Menge aller Funktionen, die auf J stetige Ableitungen bis zu der n-ten Ordnung inklusive haben. Sei $R_n \subset A_n$ ein Banachscher Raum mit solcher Norm $\| \; \|_R$, daß aus der Konvergenz nach diesser Norm die q-Konvergenz folgt.

Satz 6. *Ersetzt man S_n durch R_n, so gilt folgendes:*

I. Der Satz 2 bleibt richtig.

II. Gilt der Hilfssatz 2, so gelten auch die Sätze 3, und *5.* Wenn noch *aus der gleichmäßigen Beschränkheit die Beschränkheit nach der Norm $\| \; \|_R$ folgt, so gilt auch der Satz 4.*

Der Beweis ist leicht. Wir werden ihn nicht durchführen.

II.

Im diesen Teil werden wir uns mit der Differentialgleichung

$$\text{(E)} \qquad y^{(n)} + (-1)^{n+1} B(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\, y = 0$$

beschäftigen. Wir führen zuerst einen Hilfssatz ein.

Hilfssatz 7. *Es sei $Q(x)$ eine auf dem Intervall (a, ∞), $-\infty \leqq a$, stetige, nichtnegative Funktion, die in keinem Teilintervall von (a, ∞) identisch verschwindet. Dann hat die Gleichung*

$$y^{(n)} + (-1)^{n+1} Q(x)\, y = 0$$

eine Lösung $u(x)$ mit den Eigenschaften:

$$\text{(V)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} (-1)^k u^{(k)}(x) > 0 \text{ oder } (-1)^{k+1} u^{(k)}(x) > 0, \\ \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \lim\limits_{x\to\infty} u^{(k)}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x) \text{ existiert und ist endlich.} \end{array} \right.$$

$\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$ *dann und nur dann, wenn* $\int^{\infty} x^{n-1} Q(x) dx = \infty$.

Wenn $\int^{\infty} x^{n-1}Q(x)dx < \infty$ *ist, dann existiert genau eine (bis auf die lineare Abhängigkeit) Lösung* $u(x)$ *mit den Eigenschaften* (V_1) *und für diese ist* $\lim_{x\to\infty} u(x) \neq 0$. *Wir werden sagen, dass dann* $u(x)$ *die Eigenschaften* (V) *hat.*

Den Beweis für n ungerade siehe in [2], Sätze 1, 2, 3. Für n gerade ist der Beweis fast derselbe. Ich danke dem Herrn Š. Belohorec, der mich darauf aufmerksam gemacht hat, daß der Hilfssatz 7 und weitere Sätze auch für die gerade natürliche Zahl n gelten.

Satz 7. *Es sei folgendes erfüllt:*

1° *Die Funktion* $B(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ *ist auf dem Gebiete*

$$\Omega : a < x < \infty, \; -\infty < u_i < \infty, \; i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

stetig und nichtnegativ so, daß für jeden Punkt $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \neq$ $\neq (0, 0, \ldots, 0)$ *die Funktion* $B(x, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ *in keinem Teilintervall des Intervalles* (a, ∞) *identisch verschwindet.*

2° *Die Funktion* $B(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ *ist monoton in jeder der Veränderlichen* u_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *für* $u_i \geqq 0$, *so wie auch für* $u_i < 0$. *(Die Monotonie für* $u_i \geqq 0$ *braucht nicht dieselbe zu sein wie für* $u_i < 0$.)

3° *Für jeden Punkt* $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ *ist*

$$\int^{\infty} x^{n-1}B(x, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})\, dx < \infty.$$

4° *Es ist*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\int^{\infty} x^{n-2}B(x, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})\, dx = 0,$$

wenn $|c_i| \leqq k$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *ist.*

Dann geht durch jeden Punkt (x_0, y_0), $x_0 \in (a, \infty)$, $y_0 \neq 0$, *mindestens eine Lösung* $y(x)$ *von* (E), *welche auf dem Intervall ihrer Existenz die Eigenschaften* (V) *hat.*

Beweis. Sei U_k die Menge aller Punkte $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$, für welche $\|\boldsymbol{u}\| = \max_i |u_i| \leqq k$ ist. Sei $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1})$ ein solcher Punkt aus U_k, im welchen $B(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ das Maximum auf U_k hat. Aus der Monotonie der Funktion $B(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ in jeder ihrer Veränderlichen u_i foglt, daß ϑ_i einer aus der Zahlen O, k, $-k$ gleich ist. Es ist also

$$B(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \leqq B(x, \vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) \tag{3}$$

für $x \in (a, \infty)$, $\boldsymbol{u} \in U_k$.

Sei nun $J = \langle x_0, \infty\rangle$ und S_{n-1} der Banachsche Raum (s. Definition 1.) Sei $f(x) \in S_{n-1}$, $\|f(x)\| \leqq k$. Dann ist

$$B(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)) \leqq B(x, \vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) \tag{4}$$

für $x \in \langle x_0, \infty)$ und mit Rücksicht auf 3°

$$\int^{\infty} x^{n-1}B(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x))\,dx \leqq \tag{5}$$
$$\leqq \int^{\infty} x^{n-1}B(x, \vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1})\,dx < \infty.$$

Dies erlaubt uns einen Operator T auf S_{n-1} folgendermaßen zu definieren:

Ist $f(x) \in S_{n-1}$, so sei $Tf(x) = u(x)$, wo $u(x)$ die Lösung der Gleichung

$$y^{(n)} + (-1)^{n+1}B(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x))\,y = 0, \quad x \in J \tag{6}$$

ist, die durch den Punkt (x_0, y_0) geht und auf J die Eigenschaften (V) hat.

Aus dem Hilfssatz 7 und aus (5) folgt, daß genau eine solche Lösung $u(x)$ von (6) existiert.

Im weiteren werden wir $B(x, \mathbf{f}(x))$ statt $B(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x))$ und $B(x, \boldsymbol{\vartheta})$ statt $B(x, \vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1})$ schreiben.

Integriert man die Gleichung (6) mehrmal und berücksichtigt dabei die Eigenschaften (V) von $u(x)$, erhält man folgende Formeln:

$$u^{(i)}(x) = (-1)^{n+1}\int_x^{\infty} \frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\,u(t)\,dt, \tag{7}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\begin{aligned} u(x) = y_0 - (-1)^{n+1}\int_{x_0}^{\infty} \frac{(x_0-t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\,u(t)\,dt\, + \\ + (-1)^{n+1}\int_x^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\,u\,(t\,dt). \end{aligned} \tag{8}$$

Aus den Eigenschaften (V) folgt, daß $0 < u(x) \leqq y_0$ für $x \in J$ ist. Berücksichtigt man (4), so erhalten wir aus (7) folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} |u^{(i)}(x)| \leqq y_0 \int_x^{\infty} \frac{(t-x)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, \boldsymbol{\vartheta})\,dt \leqq \\ \leqq y_0 \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-2} B(t, \boldsymbol{\vartheta})\,dt = y_0\,A(k), \end{aligned} \tag{9}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

wo

$$A(k) = \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-2} B(t, \boldsymbol{\vartheta})\,dt \tag{10}$$

ist. Aus diesen Abschätzungen erhalten wir, daß

$$\| Tf(x) \| = \| u(x) \| \leqq \max\{y_0, y_0 A(k)\} = L(k) \tag{11}$$

ist. Das bedeutet, daß $u(x) \in S_{n-1}$ und $TS_{n-1} \subset S_{n-1}$. Sei nun $M_k = \{f(x) \in S_{n-1} \mid \|f(x)\| \leqq k\}$, also eine Kugel. Dann bedeutet (11), daß TM_k eine Menge der gleichmäßig beschränkten Funktionen ist. Aus (7) für $i = n - 1$ haben wir, daß

$$|u^{(n-1)}(x)| = \int_x^\infty B(t, \mathbf{f}(t)]\, u(t)\, dt \leqq y_0 \int_x^\infty B(t, \vartheta)\, dt < \infty$$

ist. Daraus beweist man leicht, daß die Menge der $(n-1)$-ten Ableitungen der Funktionen von TM_k gleichgradig stetig ist. Das aber, zusammen mit (11), bedeutet, daß TM_k eine Menge der gleichgradig stetigen Funktionen (im Sinne der Definition 4) ist.

Nun werden wir zeigen, daß T auf M_k q-stetig ist. Sei $f_j(x) \in M_k$, $j = 1, 2, \ldots, f_j(x) \xrightarrow{q} f(x)$, $f(x) \in M_k$. Bezeichnen wir $Tf_j(x) = u_j(x)$, $Tf(x) = u(x)$. Nach dem, was wir oben bewiesen haben, sind die Funktionen der Folge $\{Tf_j(x)\}_{j=1}^\infty = \{u_j(x)\}_{j=1}^\infty$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Es gibt darum eine Teilfolge $\{u_{1j}(x)\}_{j=1}^\infty = \{Tf_{1j}(x)\}_{j=1}^\infty$ der Folge $\{u_j(x)\}_{j=1}^\infty$, die auf J zu irgendeiner Funktion $v(x)$ q-konvergiert. Da weiter $\{f_{1j}(x)\}_{j=1}^\infty$ eine Teilfolge der Folge $\{f_j(x)\}_{j=1}^\infty$ ist, q-konvergiert sie zu $f(x)$. Nun für $u_{1j}(x)$ gelten die Formeln:

$$u_{1j}^{(i)}(x) = (-1)^{n+1} \int_x^\infty \frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, \mathbf{f}_{1j}(t))\, u_{1j}(t)\, dt,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$u_{1j}(x) = y_0 - (-1)^{n+1} \int_{x_0}^\infty \frac{(x_0-t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, \mathbf{f}_{1j}(t))\, u_{1j}(t)\, dt +$$

$$+ (-1)^{n+1} \int_x^\infty \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, \mathbf{f}_{1j}(t))\, u_{1j}(t)\, dt.$$

Da die Funktionen unter dem Integralzeichen integrierbare Majoranten $y_0(x_0 - t)^{n-i-1} B(t, \vartheta)/(n-i-1)!$ haben, erhalten wir durch Verwendung des Lebesgueschen Satzes, daß

$$v^{(i)}(x) = (-1)^{n+1} \int_x^\infty \frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, v(t)\, dt,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$v(x) = y_0 - (-1)^{n+1} \int_x^\infty \frac{(x_0-t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, v(t)\, dt +$$

$$+ (-1)^{n+1} \int_x^\infty \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, v(t)\, dt.$$

Das bedeutet aber, daß $v(x) = Tf(x) = u(x)$ ist.

Nun sieht man leicht, daß aus jeder Teilfolge der Folge $\{u_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ eine zu $v(x) = Tf(x) = u(x)$ q-konvergierende Teilfolge ausgewählt werden kann. Das bedeutet, daß die Folge $\{u_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ selbst zu $Tf(x) = u(x) = v(x)$ q-konvergiert.

Es bleibt zu beweisen, daß $\lim_{j\to\infty} \| u_j(x) - u(x) \| = 0$ ist. Aus den Formeln (7) und (8) und aus den ähnlichen Formeln, die wir für u_j erhalten, wenn wir in (7) und (8) $u_j(x)$ anstatt $u(x)$ und $\mathbf{f}_j(x)$ anstatt $\mathbf{f}(x)$ schreiben, erhalten wir die Abschätzungen:

$$| u_j^{(i)}(x) - u^{(i)}(x) | \leqq \int_x^{\infty} \frac{(t-x)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} | B(t, \mathbf{f}_j(t))\, u_j(t) - B(t, \mathbf{f}(t))\, u(t) | \, dt \leqq$$

$$\leqq \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-1} | B(t, \mathbf{f}_j(t))\, u_j(t) - B(t, \mathbf{f}(t))\, u(t) | \, dt,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$| u_j(x) - u(x) | \leqq \int_{x_0}^{\infty} \frac{(t-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} | B(t, \mathbf{f}_j(t))\, u_j(t) - B(t, \mathbf{f}(t))\, u(t) | \, dt +$$

$$+ \int_x^{\infty} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} | B(t, \mathbf{f}_j(t))\, u_j(t) - B(t, \mathbf{f}(t))\, u(t) | \, dt \leqq$$

$$\leqq 2 \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-1} | B(t, \mathbf{f}_j(t))\, u_j(t) - B(t, \mathbf{f}(t))\, u(t) | \, dt.$$

Daraus folgt, daß

$$\| u_j(x) - u(x) \| \leqq 2 \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-1} | B(t, \mathbf{f}_j(t))\, u_j(t) - B(t, \mathbf{f}(t))\, u(t) | \, dt.$$

Durch Verwendung des Lebesgueschen Satzes erhalten wir daraus $\lim_{j\to\infty} \| u_j(x) - u(x) \| = 0$. Damit ist der Beweis der q-Stetigkeit von T auf M_k beendet.

Kehren wir jetzt zu der Formel (11) zurück. Sie sagt, daß TM_k in der Kugel $\| f(x) \| \leqq L(k)$ liegt. Aus der Voraussetzung 4° folgt aber die Existenz einer solchen Zahl k_0, daß $L(k_0) \leqq k_0$ ist. Nehmen wir also die Menge M_{k_0}. So erhalten wir, daß $TM_{k_0} \subset M_{k_0}$ ist.

Jetzt haben wir folgende Situation: M_{k_0} ist eine Kugel, also sie ist konvex und man beweist leicht, daß sie q-abgeschlossen ist. T ist auf M_{k_0} q-stetig, $TM_{k_0} \subset M_{k_0}$ und TM_{k_0} ist eine Menge der Funktionen, die gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind. Nach dem Satz 5 hat T in M_{k_0} mindestens einen Fixpunkt. Dieser Fixpunkt ist die Lösung $y(x)$ von (E) auf J, die durch den Punkt (x_0, y_0) geht und auf J die Eigenschaften (V) hat.

Diese Lösung kann links auf ein Intervall (b, ∞), $a \leqq b < x_0$, fortgesetzt werden. Es macht gar keine Schwierigkeiten zu beweisen, daß diese fortgesetzte Lösung die Eigenschaften (V) auf (b, ∞) hat.

Satz 8. *Seien die ersten drei Voraussetzungen des Satzes 7 erfüllt. Dann gibt es zu jeder Zahl $m_0 \neq 0$ eine Lösung $u(x)$ von (E) mit den Eigenschaften (V) auf ihrem Existenzbereich derart, daß $\lim_{x\to\infty} u(x) = m_0$ ist.*

Beweis. Wir können voraussetzen, daß $m_0 > 0$ ist. Es sei $k > m_0$. U_k und $B(x, \vartheta)$ sollen dieselbe Bedeutung haben wie im Beweise des Satzes 7. Da nach der Voraussetzung $\int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-1} B(t, \vartheta)\, dt < \infty$ ist, können wir die Zahl x_0 so wählen, daß

$$(12) \qquad \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-1} B(t, \vartheta)\, dt = s(k) < 1$$

und

$$(13) \qquad \frac{m_0}{1 - s(k)} \leqq k$$

ist. Sei $J = \langle x_0, \infty)$ und S_{n-1} der Banachsche Raum wie im Beweise des Satzes 7. Wir definieren auf S_{n-1} einen Operator T_1 folgendermaßen: Ist $f(x) \in S_{n-1}$, so sei $T_1 f(x) = y(x)$, wo $y(x)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$(14) \qquad z^{(n)} + (-1)^{n+1} B(x, \mathbf{f}(x))\, z(x) = 0$$

ist, die auf J die Eigenschaften (V) hat und für welche $\lim_{x\to\infty} y(x) = m_0$ ist. Es gibt genau eine solche Lösung, wie es aus dem Hilfssatz 7 folgt. Für diese Lösung und ihre Ableitungen erhalten wir die Formeln

$$(15) \qquad y^{(i)}(x) = (-1)^{n+1} \int_{x^0}^{\infty} \frac{(x - t)^{n-i-1}}{(n - i - 1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, y(t)\, dt,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n - 1,$$

$$(16) \qquad y(x) = m_0 + (-1)^{n+1} \int_{x}^{\infty} \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)} B(t, \mathbf{f}(t))\, y(t)\, dt.$$

Sei

$$M_k = \{f(x) \in S_{n-1} \mid \|f(x)\| \leqq k\}.$$

Sei $f(x) \in M_k$ beliebig gewählt und sei $T_1 f(x) = y(x)$. Aus den Eigenschaften (V) folgt, daß $y(x)$ auf J abnimmt. Es gilt also $0 < y(x) \leqq y(x_0)$. Aus (16) erhalten wir weiter, daß

$$0 < y(x) \leqq m_0 + y(x_0) \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-1} B(t, \vartheta)\, dt = m_0 + y(x_0)\, s(k),\ x \in J,$$

ist. Daraus erhalten wir zuerst, daß $y(x_0) \leqq m_0 + y(x_0)\, s(k)$ und daraus, mit Rücksicht auf (13),

$$0 < y(x_0) \leqq \frac{m_0}{1 - s(k)} \leqq k. \tag{17}$$

Also,

$$0 < y(x) \leqq y(x_0) \leqq k.$$

Nun können wir schon aus (15) die Abschätzungen für $y^{(i)}(x)$ finden:

$$| y^{(i)}(x) | \leqq y(x_0) \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-1} B(t, \vartheta) = y(x_0)\, s(k) < y(x_0) \leqq k,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{18}$$

Aus diesen letzten Erwägungen folgt, daß $\| T_1 f(x) \| = \| y(x) \| \leqq k$, und daß $y(x) \in M_k$ ist. Das bedeutet aber, daß $T_1 M_k \subset M_k$ ist und daß die Funktionen der Menge $T_1 M_k$ gleichmäßig durch k beschränkt sind. Daraus und aus der Tatsache, daß

$$|y^{(n-1)}(x)| = \int_x^{\infty} B(t, \mathfrak{f}(t))\, y(t)\, dt \leqq y(x_0) \int_x^{\infty} B(t, \vartheta)\, dt \leqq k \int_x^{\infty} B(t, \vartheta)\, dt < \infty$$

ist, folgt die gleichgradige Stetigkeit der Funktionen von $T_1 M_k$.

Die q-Stetigkeit von T_1 auf M_k beweist man auf demselben Wege wie die q-Stetigkeit von T im Beweise des Satzes 7 bewiesen wurde.

Also, alle Voraussetzungen des Satzes 5 erfüllt sind. Darum hat T_1 auf M_k mindestens einen Fixpunkt. Dieser Fixpunkt ist die gesuchte Lösung $u(x)$ von (E).

Bemerkung 3. Die Sätze 7 und 8 verallgemeinern die Resultate von [2], wo man anstatt der Monotonie der Funktion $B(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ in u_i, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, die Existenz einer zu $B(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ majoranten Funktion $F(x)$ verlangt, so daß $B(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \leqq$ $\leqq F(x)$ für jeden Punkt $(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \Omega$ und $\int^{\infty} x^{n-1} F(x)\, dx < \infty$. Die Voraussetzung 4° vom Satze 7 ist dann überflüßig.

Durchschaut man grundlich den Beweis des Satzes 7 und auch des Satzes 8, so macht es keine Schwierigkeiten den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 9. 1° *Die Funktion $P(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ sei auf dem Gebiete Ω stetig und nichtnegativ derart, daß für jeden Punkt $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \neq$ $\neq (0, 0, \ldots, 0)$ die Funktion $P(x, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ in keinem Teilintervall des Intervalles (a, ∞) identisch verschwindet.*

2° *Für jeden Punkt aus Ω gelte*

$$P(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \leqq B(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$$

und $B(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ *erfülle die Bedingungen des Satzes 7 (bzw. des Satzes 8).*

Dann gelten für die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + (-1)^{n+1} P(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\, y = 0 \tag{P}$$

die Behauptungen des Satzes 7 (bzw. 8).

LITERATURVERZEICHNISS

[1] Collatz L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1964.

2] Švec M.: Monotone Solutions of some Differential Equations. Colloqium mathematicum (im Druck).