Miloš Ráb

Les développements asymptotiques des solutions de l'équation $(py')' + qy = 0$

Archivum Mathematicum, Vol. 2 (1966), No. 1, 1--17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104601

LES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION

$$(py')' + qy = 0$$

PAR MILOŠ RÁB, BRNO

Présenté le 13 décembre 1965

Dans un travail récent [9] j'ai déduit des formules asymptotiques concernant les solutions de l'équation

$$y'' + q(x)y = 0.$$

Il s'agissait des formules de la forme

$$y = \varphi(x)\{[c_1 + \varepsilon_1(x)]\, U[\Phi(x)] + [c_2 + \varepsilon_2(x)]\, V[\Phi(x)]\}$$

où U, V forment un système fondamental des solutions de l'équation

$$Y'' + Q(x)\, Y = 0,$$

φ, Φ sont des fonctions qui remplissent certaines conditions et ε_1, ε_2 des fonctions continues qui tendent vers zéro pour $x \to \infty$.

Au point de vue numérique, il est important d'estimer la vitesse avec laquelle les fonctions ε_1, ε_2 convergent vers zéro, ou notamment, de déduire des formules asymptotiques concernant ces fonctions. M. G. Ascoli [1], [2] s'occupait de la majorisation des fonctions ε_i pour l'équation

$$y'' + [q + q(x)]\, y = 0. \tag{1}$$

M. U. Richard [11] a déduit des formules asymptotiques concernant les fonctions ε_i dans la forme

$$\varepsilon_i(x) = \eta_i(x) + r_i(x), \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{r_i(x)}{\sup\limits_{t>x} |\,\varepsilon_i(t)\,|} = 0,$$

d'une part pour l'équation

$$y'' + [1 + \psi(x) + r(x)]\, y = 0$$

sous les hypothèses

$$\int_0^\infty |\,\psi'(x)\,|\, dx < \infty, \qquad \int_0^\infty |\,r(x)\,|\, dx < \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} [1 + \psi(x)] > 0,$$

et d'autre part pour l'équation

$$(2) \qquad [p(x)\, y']' + q(x)\, y = 0$$

sous les hypothèses suivantes: les fonctions p, q sont absolument continues dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$, au moins une des intégrales $\int\limits_0^x \mathrm{d}t/p(t)$, $\int\limits_0^x q(t)\,\mathrm{d}t$ diverge pour $x \to \infty$, la fonction $\omega = \frac{1}{2}[p(pq)^{-\frac{1}{2}}]'$ est à variation bornée dans $\langle 0, \infty)$ et remplit la condition $-1 < \lim\limits_{x\to\infty} \omega(x) < 1$.

Un joli résultat est déduit dans le livre de M. G. Sansone [12]; les solutions de (1) sont exprimées, sous les hypothèses $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = 0$, $\int\limits_{x_0}^{\infty} |\, q(x)\,|\,\mathrm{d}x < \infty$, à l'aide des séries infinies qui rendent possible d'approximer les solutions avec une exactitude arbitraire sur tout l'intervalle $\langle a, \infty)$, $a \geqq x_0$.

Le but de ce travail est de résoudre le même problème sous les hypothéses beaucoup plus générales pour l'équation (2) en se servant de la méthode de Fubini [4] et de la méthode de Peano-Baker [6], [3]. Comme cas spécial du théorème 4 on peut obtenir, au fond, les résultats de M. U. Richard.

Conventions et notations. Dans tout le travail I signifie l'intervalle $\langle a, \infty)$. Soit k un nombre naturel; C_k signifie le système de toutes les fonctions qui possèdent dans I les dérivées continues jusqu' à l'ordre k inclusivement. Là, où nous n'avons pas besoin de craindre de malentendu, nous supprimons la variable indépendante en écrivant par ex. $p \in C_1$, $y = \varphi U(\Phi)$, $f > 0$ dans I, au lieu de $p(x) \in C_1$, $y(x) = \varphi(x)\, U[\Phi(x)]$, $f(x) > 0$ pour $x \geqq a$. Le symbole $\int\limits_a^x f$ signifie $\int\limits_a^x f(t)\, dt$.

Théorème 1.

Nous supposons $q, Q \in C_0$, $p, P \in C_1$, $p > 0$, $P > 0$ *dans l'intervalle* I. *Soient* φ, Φ *des fonctions qui satisfont aux conditions* $\varphi, \Phi \in C_2$, $\varphi > 0$, $\Phi > 0$, $\Phi' > 0$. *Soient* U, V *des solutions indépendantes de l'équation*

$$(3) \qquad (PY')' + QY = 0,$$

$W = UV' - U'V$. Posons

$$k = \frac{1}{W(\Phi)} \left[\log \frac{P(\Phi)}{p\varphi^2\Phi'}\right]',$$

$$l = \frac{1}{p\varphi\Phi' W(\Phi)} \left[(p\varphi')' + q\varphi - p\varphi\Phi'^2 Q(\Phi)\, P^{-1}(\Phi)\right],$$

$$\text{(4)}\qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} V(\Phi)[lU(\Phi) - k\dot{U}(\Phi)], & V(\Phi)[lV(\Phi) - k\dot{V}(\Phi)] \\ U(\Phi)[k\dot{U}(\Phi) - lU(\Phi)], & U(\Phi)[k\dot{V}(\Phi) - lV(\Phi)] \end{pmatrix}$$ [1]

et supposons

$$\text{(5)}\qquad \int_a^\infty |\,k\,|\{|\,U(\Phi)| + |\,V(\Phi)|\}\{|\,\dot{U}(\Phi)| + |\,\dot{V}(\Phi)|\} < \infty,$$

$$\text{(6)}\qquad \int_a^\infty |\,l\,|\{U^2(\Phi) + V^2(\Phi)\} < \infty.$$

Dans ces conditions l'équation (2) *possède la solution générale*

$$\text{(7)}\qquad y = \varphi(x)\,(U[\Phi(x)],\quad V[\Phi(x)])\sum_0^\infty (-1)^n \mathbf{R}^n(x)\mathbf{c},$$

$$\text{(8)}\qquad y' = (\{\varphi(x)\,U[\Phi(x)]\}',\quad \{\varphi(x)\,V[\Phi(x)]\}')\sum_0^\infty (-1)^n \mathbf{R}^n(x)\,\mathbf{c},$$

où $\mathbf{c}$ *signifie un vecteur constant non nul et*

$$\text{(9)}\qquad \mathbf{R}^\circ(x) = \begin{pmatrix} 1\;0 \\ 0{,}1 \end{pmatrix},\qquad \mathbf{R}^n(x) = \int_x^\infty \mathbf{A}\mathbf{R}^{n-1}.$$

Démonstration. Envisageons les équations

$$\text{(10)}\qquad Z'' + (\log p\varphi^2)'Z' + \left[\frac{(p\varphi')'}{p\varphi} + \frac{q}{p}\right]Z = 0$$

et

$$\text{(11)}\qquad z'' + \left[\log\frac{P(\Phi)}{\Phi'}\right]'z' + \frac{Q(\Phi)}{P(\Phi)}\Phi'^2 z = 0$$

dont la première vient de (2) par le changement

$$\text{(12)}\qquad y = \varphi Z,$$

et la seconde de (3) en y posant

$$\text{(13)}\qquad z = Y[\Phi(x)].$$

Si nous supposons la solution Z de (10) dans la forme

$$\text{(14)}\qquad Z = y_1 z_1 + y_2 z_2,$$

---

[1] $' = \dfrac{d}{dx}$, $\quad \cdot = \dfrac{d}{d\Phi}$.

z_1, z_2 étant des solutions indépendantes de (11), par ex. $z_1 = U[\Phi(x)]$, $z_2 = V[\Phi(x)]$, nous obtenons pour y_1, y_2 le système des équations

$$y_1' z_1 + y_2' z_2 = 0,$$

$$y_1' z_1' + y_2' z_2' = \left[\log \frac{P(\Phi)}{p\varphi^2 \Phi'}\right]' (y_1 z_1' + y_2 z_2') + \left[\frac{Q(\Phi)}{P(\Phi)} \cdot \Phi'^2 - \frac{(p\varphi')'}{p\varphi} - \frac{q}{p}\right] \cdot (y_1 z_1 + y_2 z_2).$$

Le déterminant des coefficients étant le wronskien des solutions z_1 et z_2, est différent de zéro et on peut remplacer ce système par

$$(15) \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

$\mathbf{A}$ étant la matrice définie par (4).

On vérifie facilement que l'intégrale $\int_a^\infty \| \mathbf{A} \|$[2]) converge pour $x \to \infty$.

En effet, en tenant compte de l'inégalité $| UV | \leqq U^2 + V^2$ et d'après (5) et (6) on a

$$\int_a^x \| \mathbf{A} \| \leqq \int_a^x |k| \{ |U(\Phi)| + |V(\Phi)| \} \{ |\dot{U}(\Phi)| + |\dot{V}(\Phi)| \} + \\ + 4 \int_a^x |l| \{ U^2(\Phi) + V^2(\Phi) \} < \infty.$$

Sous cette condition le système (15) possède la solution $\mathbf{y} = \sum_0^\infty (-1)^n \mathbf{R}^n(x)\, \mathbf{c}$, $\mathbf{R}^n$ étant définie par les relations (9) (cf. [10]). En vertu de (12), (13) et (14) on a alors (7) et de $y' = \varphi' Z + \varphi Z' = \varphi'(y_1 z_1 + y_2 z_2) + \varphi(y_1 z_1' + y_2 z_2') = y_1(\varphi z_1)' + y_2(\varphi z_2)'$ découle (8). Le théorème se trouve ainsi démontré.

Note. Sous les hypothèses du théorème existe la limite

$$\lim_{x \to \infty} p(x)\, \varphi^2(x)\, \Phi'(x)\, P^{-1}[\Phi(x)] > 0.$$

En effet, de l'inégalité $(|U| + |V|)(|U'| + |V'|) \geqq |UV' - U'V| = |W|$ et de (5) découle la convergence de l'intégrale

$$\int_a^\infty \left[\log \frac{P(\Phi)}{p\varphi^2 \Phi'}\right]'$$

et alors l'existence de la limite $\lim_{x \to \infty} p(x)\, \varphi^2(x)\, \Phi'(x)\, P^{-1}[\Phi(x)] > 0$.

---

[2]) Sous la norme $\| \mathbf{A} \|$ on entend la somme des valeurs absolues des éléments de la matrice $\mathbf{A}$.

Etant données les équations (2) et (3) nous allons nous occuper de la question si l'on peut déterminer les fonctions φ et Φ de la manière que la série figurant dans les formules (7), (8) ne possède qu'un nombre fini des termes. Nous allons démontrer que l'on peut déterminer une constante $\xi \geqq a$ et des fonctions φ et Φ de la façon que la matrice **A** possède tous les éléments égaux à zéro en supposant que les équations (2) et (3) sont en même temps oscillatoires ou non-oscillatoires dans I. Dans ce cas les formules (7), (8) possèdent pour $x \geqq \xi$ la forme simple

$$y = \varphi(x)\{c_1 U[\Phi(x)] + c_2 V[\Phi(x)]\},$$

$$y' = c_1\{\varphi(x)\ U[\Phi(x)]\}' + c_2\{\varphi(x)\ V[\Phi(x)]\}'.$$

Cette proposition découle des théorèmes 2 et 3 que nous allons démontrer.

Théorème 2.

Soient p, q des fonctions définies dans l'intervalle I, $p \in C_1$, $q \in C_0$. Soient u, v des solutions de l'équation (2), $w = uv' - u'v$. Soient $\zeta \geqq a, A, B, C$ des constantes telles que la fonction $\sigma = Au^2 + 2Buv + Cv^2$ est positive pour tout $x \geqq \zeta$. Posons dans cet intervalle $\varrho^2 = \sigma$. Alors, on a

$$\varrho^3(p\varrho')' + q\varrho^4 = (AC - B^2)\, pw^2. \tag{16}$$

Démonstration. De la relation $\varrho\varrho' = Auu' + B(u'v + uv') + Cvv'$ vient $(p\varrho\varrho')' = p\varrho'^2 + \varrho(p\varrho')' = p(Au'^2 + 2Bu'v' + Cv'^2) - q\varrho^2$ et enfin, après un calcul simple, $\varrho^3(p\varrho')' + q\varrho^4 = p(Au'^2 + 2Bu'v' + Cv'^2)(Au^2 + 2Buv + Cv^2) - p[Auu' + B(u'v + uv') + Cvv']^2 = p(AC - B^2)(uv' - u'v)^2 = (AC - B^2)\, pw^2$.

Théorème 3.

Nous supposons $q, Q \in C_0$, $p, P \in C_1$, $p > 0$, $P > 0$ dans l'intervalle I. Soient u, v des solutions de l'équation (2), $w = uv' - u'v$ et U, V des solutions indépendantes de l'équation (3), $W = UV' - U'V$. Soient $\zeta \geqq a$, A, B, C des constantes telles que les fonctions

$$\sigma = Au^2 + 2Buv + Cv^2,\quad \sum = AU^2 + 2BUV + CV^2$$

soient positives pour $x \in J = \{x : x \geqq \zeta\}$. Posons dans cette intervalle

$$\varrho^2 = \sigma,\quad \Psi^2 = \Sigma,\quad \varkappa = \frac{pw}{PW}\ (= \text{constante}).$$

Dans ces conditions, quels que soient les nombres ξ, $\eta \in J$, l'équation

$$F' = \varkappa \frac{P(F)\ \Psi^2(F)}{p(x)\ \varrho^2(x)} \tag{17}$$

possède une solution et une seule $F(x)$ qui, pour $x = \xi$, prend la valeur $F(\xi) = \eta$. Cette solution est définie dans un tel intervalle $j \subset J$ que, pour tout $x \in j$ les inégalités

$$\inf_{t \in J} \int_{\eta}^{t} P^{-1}\Psi^{-2} \leqq \int_{\xi}^{x} \varkappa p^{-1}\varrho^{-2} \leqq \sup_{t \in J} \int_{\eta}^{t} P^{-1}\Psi^{-2} \tag{18}$$

sont valables.

Si nous posons pour $x \in j$

$$f = \varrho\Psi^{-1}(F) \tag{19}$$

alors on a

$$f^2F' = \varkappa\frac{P(F)}{p}, \tag{20}$$

$$(pf')' + \left[q - \frac{Q(F)}{P(F)}pF'^2\right]f = 0. \tag{21}$$

Démonstration. L'existence et l'unicité de la solution de (17) dans j est évidente, car il s'agit d'une équation à variables séparées (cf. par ex. M. E. Kamke [5] p. 11). Alors, il suffit de démontrer la validité des formules (20) et (21).

On a d'abord d'après (19) et (17)

$$f^2F' = \varrho^2\Psi^{-2}(F)\,\varkappa P(F)\,\Psi^2(F)\,p^{-1}\varrho^{-2} = \varkappa P(F)\,p^{-1}$$

et ce n'est que l'équation (20). Des formules (19) et (17) on obtient

$$f' = \varrho'\Psi^{-1}(F) - \varrho\Psi^{-2}(F)\,\dot{\Psi}(F)\,F' = \varrho'\Psi^{-1}(F) - \varkappa\varrho^{-1}\dot{\Psi}(F)\,P(F)\,p^{-1},$$

et, en se servant de l'équation (16) et d'une équation analoque pour Ψ, on a

$$\begin{aligned}(pf')' &= [p\varrho'\Psi^{-1}(F) - \varkappa P(F)\,\dot{\Psi}(F)\,\varrho^{-1}]' = (p\varrho')'\Psi^{-1}(F) - \\ &- p\varrho'\Psi^{-2}(F)\,\dot{\Psi}(F)\,F' - \varkappa[P(F)\,\dot{\Psi}(F)]^{\boldsymbol\cdot}\,F'\varrho^{-1} + \varkappa P(F)\,\dot{\Psi}(F)\,\varrho^{-2}\varrho' = \\ &= (p\varrho')'\Psi^{-1}(F) - \varkappa^2[P(F)\,\dot{\Psi}(F)]^{\boldsymbol\cdot}\,\varrho^{-1}\,.\,P(F)\,\Psi^2(F)\,p^{-1}\varrho^{-2} = \\ &= [-q\varrho + (AC - B^2)\,pw^2\varrho^{-3}]\,\Psi^{-1}(F) - \varkappa^2[-Q(F)\,\Psi(F) + \\ &+ (AC - B^2)\,P(F)\,W^2(F)\,\Psi^{-3}(F)]\,P(F)\,\Psi^2(F)\,p^{-1}\varrho^{-3} = -q\varrho\Psi^{-1}(F) + \\ &+ \varkappa^2Q(F)\,P(F)\,\Psi^3(F)\,p^{-1}\varrho^{-3} = -qf + Q(F)\,F'^2fpP^{-1}(F).\end{aligned}$$

Le théorème se trouve ainsi démontré.

Remarque. De l'équation (20) on tire immédiatement que la fonction F est croissante, décroissante ou une constante selon que $\varkappa$ est positif, négatif ou égal à zéro. Le dernier cas a lieu si le wronskien w est égal à zéro, alors si les solutions u, v de l'équation (2) sont dépendentes.

Dans le cas $\varkappa \neq 0$, la fonction F possède donc pour x tendant vers l'extrémité droite de l'intervalle j la limite propre ou bien impropre. On voit aussi immédiatement de l'équation

$$\int_{\eta}^{F(x)} P^{-1}\Psi^{-2} = \varkappa \int_{\xi}^{x} p^{-1}\varrho^{-2},$$

laquelle s'obtient en intégrant l'équation (17) de ξ à x, que cette limite est ∞ si et seulement si $\varkappa > 0$ et

$$\int_{\eta}^{\infty} P^{-1}\Psi^{-2} \leqq \varkappa \int_{\xi}^{\infty} p^{-1}\varrho^{-2}.$$

Des inégalités (18) on tire aussi que l'extrémité droite de l'intervalle j est pour $\varkappa > 0$ égal à ∞ sil'on a

$$\int_{\eta}^{\infty} P^{-1}\Psi^{-2} \geqq \varkappa \int_{\xi}^{\infty} p^{-1}\varrho^{-2}.$$

Si les équations (2) et (3) ont le même caractère dans I, c'est à dire, si elles sont en même temps oscillatoires ou non-oscillatoires, on peut choisir des sonstantes A, B, C de façon que les intégrales $\int_{\xi}^{x} p^{-1}\varrho^{-2}$, $\int_{\xi}^{x} P^{-1}\Psi^{-2}$ soient divergentes pour $x \to \infty$. Cf. par ex. [7] p. 338 et [9] p. 212.

Alors, en supposant $\varkappa > 0$, $\int_{\xi}^{\infty} p^{-1}\varrho^{-2} = \infty$, $\int_{\xi}^{\infty} P^{-1}\Psi^{-2} = \infty$, toute solution de l'équation (17) peut être prolongée pour $x \geqq \xi$ et $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$. Si nous posons $\Phi = F$, $\varphi = f = \varrho\Psi^{-1}(F)$, les fonctions l, k dans le théorème 1 sont identiquement nulles au moin pour $x \geqq \xi$.

Dans ce qui suit, nous allons déduire des formules asymptotiques concernant les solutions de l'équation (2) qui s'obtiennent du théorème 1 en comparant cette équation avec l'équation $Y'' + \varepsilon Y = 0$, $\varepsilon = 0, \pm 1$.

Theorème 4.

Nous supposons $q \in C_0$, $p \in C_1$, $p > 0$ dans l'intervalle I. Soient φ, Φ des fonctions qui satisfont aux conditions φ, $\Phi \in C_2$, $\varphi > 0$, $\Phi > 0$, $\Phi' > 0$. Posons

$$k = (\log p\varphi^2\Phi')',$$

$$l = \frac{1}{p\varphi\Phi'}\left[p\varphi\Phi'^2 - (p\varphi')' - q\varphi\right],$$

$$h = \sqrt{k^2 + l^2}.$$

Soit ψ *la fonction définie par les équations* $\sin\psi = \frac{k}{h}$, $\cos\psi = \frac{l}{h}$ *pour* $h \neq 0$ *et* $\psi = 0$ *pour* $h = 0$.

Sous la condition

$$\int_a^\infty h < \infty$$

l'équation (2) *possède la solution générale*

$$y = \varphi(x)\,(\sin\Phi(x),\, \cos\Phi(x))\,\Big[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathbf{R}^k(x)\,\mathbf{c} + \boldsymbol{\delta}^n(x)\Big], \tag{22}$$

$$y' = ([\varphi(x)\sin\Phi(x)]',\, [\varphi(x)\cos\Phi(x)]')\Big[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathbf{R}^k(x)\,\mathbf{c} + \boldsymbol{\delta}^n(x)\Big]. \tag{23}$$

Dans ces formules $\mathbf{R}^k(x)$ *signifie la matrice définie par* (9), *où il faut poser*

$$\mathbf{A} = h\begin{pmatrix} \cos\Phi\sin(\Phi-\psi), & \cos\Phi\cos(\Phi-\psi) \\ -\sin\Phi\sin(\Phi-\psi), & -\sin\Phi\cos(\Phi-\psi)\end{pmatrix} \tag{24}$$

et

$$\|\boldsymbol{\delta}^n(x)\| \leqq \frac{\|\mathbf{c}\|}{(n+1)!}\,\varkappa^{n+1}(x)\,e^{\varkappa(x)}, \quad \varkappa(x) = 4\int_x^\infty h. \tag{25}$$

Démonstration. Le théorème est une conséquence du théorème 1 pour $P = 1$, $Q = 1$, $U = \sin x$, $V = \cos x$, $W = -1$. Dans ce cas la matrice (4) possède, la forme (24) et en posant

$$\boldsymbol{\delta}^n(x) = \begin{pmatrix}\delta_1^n(x)\\ \delta_2^n(x)\end{pmatrix} = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k \mathbf{R}^k(x)\,\mathbf{c}$$

on obtient immédiatement les formules (22) et (23). Il reste encore à démontrer l'inégalité (25).

Posons, dans ce but, $\varepsilon(x) = \int_x^\infty \|\mathbf{A}\|$ et notons qu'on a $-\varepsilon'(x) = \|\mathbf{A}(x)\|$. Nous allons démontrer

$$\|\mathbf{R}^k(x)\| \leqq \frac{\varepsilon^k(x)}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{26}$$

On a

$$\|\mathbf{R}^1(x)\| = \Big\|\int_x^\infty \mathbf{A}\Big\| \leqq \int_x^\infty \|\mathbf{A}\| = \varepsilon(x)$$

et en supposant la validité de (26) pour $n = 1, \ldots, k - 1$, on obtient

$$\| \mathbf{R}^k(x) \| = \| \int_x^\infty \mathbf{A} \mathbf{R}^{k-1} \| \leqq \int_x^\infty \| \mathbf{A} \| \frac{\varepsilon^{k-1}}{(k-1)!} = - \int_x^\infty \varepsilon' \frac{\varepsilon^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \frac{\varepsilon^k(x)}{k!}$$

et par suite

$$\| \delta^n(x) \| \leqq \| \mathbf{c} \| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k(x)}{k!} = \| \mathbf{c} \| \frac{\varepsilon^{n+1}(x)}{(n+1)!} \left(1 + \frac{\varepsilon(x)}{n+2} + \right.$$

$$\left. = \frac{\varepsilon^2(x)}{(n+2)(n+3)} + \ldots \right) \leqq \| \mathbf{c} \| \frac{\varepsilon^{n+1}(x)}{(n+1)!} \mathrm{e}^{\varepsilon(x)}.$$

En tenant compte de l'inégalité $\varepsilon(x) = \int_x^\infty \| \mathbf{A} \| \leqq 4 \int_x^\infty h = \varkappa(x)$ on a (25) et le théorème se trouve démontré.

Conséquence.

Nous supposons valables les hypothèses et les notations du théorème précédent. Posons

$$g(x) = \sqrt{\varphi'^2(x) + \varphi^2(x)\, \Phi'^2(x)}$$

et définissons la fonction $\omega(x)$ *par les relations* $\sin \omega = \dfrac{\varphi \Phi'}{g}$, $\cos \omega =$ $= \dfrac{\varphi'}{g}$ *pour* $g \neq 0$ *et* $\omega = 0$ *pour* $g = 0$.

Alors, la solution générale de l'équation (2) *possède la forme*

$$(27)\quad y = \lambda \varphi(x) \{ \sin [\Phi(x) + \alpha] - \int_x^\infty h(t) \sin [\Phi(x) - \Phi(t)] \sin [\Phi(t) -$$

$$- \psi(t) + \alpha] \,\mathrm{d}t + \eta_1(x),$$

$$(28)\quad y' = \lambda g(x) \{ \sin [\Phi(x) + \omega(x) + \alpha] - \int_x^\infty h(t) \sin [\Phi(t) - \psi(t) +$$

$$+ \alpha] \,.\, \sin [\omega(x) + \Phi(x) - \Phi(t)] \,\mathrm{d}t \} + \eta_2(x)$$

et

$$(29)\qquad | \eta_1(x) | \leqq | \lambda | \, \varphi(x) \, \varkappa^2(x) \, \mathrm{e}^{\varkappa(x)},$$

$$(30)\qquad | \eta_2(x) | \leqq | \lambda | \, g(x) \, \varkappa^2(x) \, \mathrm{e}^{\varkappa(x)}, \quad \varkappa(x) = 4 \int_x^\infty h.$$

Démonstration. Pour $n = 1$ nous obtenons du théorème précédent la solution générale de l'équation (2) dans la forme

$$y = \varphi(x)\,(\sin\Phi(x),\ \cos\Phi(x))\,(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{R}^1(x)\,\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\delta}^1(x)),$$

$$(31)\quad y' = ([\varphi(x)\sin\Phi(x)]',\ [\varphi(x)\cos\Phi(x)]')\,(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{R}^1(x)\,\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\delta}^1(x))$$

où $\boldsymbol{R}^1(x)\,\boldsymbol{c}$ signifie la matrice

$$\begin{pmatrix} \int\limits_x^\infty h(t)\cos\Phi(t)\,\{c_1\sin[\Phi(t)-\psi(t)] + c_2\cos[\Phi(t)-\psi(t)]\}\,\mathrm{d}t \\ -\int\limits_x^\infty h(t)\sin\Phi(t)\,\{c_1\sin[\Phi(t)-\psi(t)] + c_2\cos[\Phi(t)-\psi(t)]\}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Après un calcul simple nous obtenons

$$y = \varphi(x)\,\langle c_1\sin\Phi(x) + c_2\cos\Phi(x) - \int\limits_x^\infty h(t)\,[\sin\Phi(x)\cos\Phi(t) -$$
$$-\cos\Phi(x)\sin\Phi(t)]\,\{c_1\sin[\Phi(t)-\psi(t)] + c_2\cos[\Phi(t)-\psi(t)]\}\,\mathrm{d}t\rangle + \eta_1(x)$$

où nous avons posé

$$\eta_1(x) = \varphi(x)\,[\sin\Phi(x)\,\delta_1^1(x) + \cos\Phi(x)\,\delta_2^1(x)].$$

En introduisant des constantes nouvelles définies par les formules

$$\lambda = \sqrt{c_1^2 + c_2^2},\quad \cos\alpha = \frac{c_1}{\lambda},\quad \sin\alpha = \frac{c_2}{\lambda},$$

nous obtenons (27) et en vertu de (25) nous avons immédiatement (29).

D'une manière analogue on obtient de la formule (31) en introduisant les constantes λ, α

$$y' = \lambda\{\varphi'(x)\sin[\Phi(x)+\alpha] - \varphi'(x)\int\limits_x^\infty h(t)\sin[\Phi(x)-\Phi(t)]\sin[\Phi(t) -$$
$$-\psi(t)+\alpha]\,\mathrm{d}t + \varphi(x)\,\Phi'(x)\cos[\Phi(x)+\alpha] - \varphi(x)\,\Phi'(x)\int\limits_x^\infty h(t)\cos[\Phi(x) -$$
$$-\Phi(t)]\sin[\Phi(t)-\psi(t)+\alpha]\,\mathrm{d}t\} + \eta_2(x) = \lambda g(x)\,\langle\sin[\Phi(x) +$$
$$+\alpha]\cos\omega(x) + \cos[\Phi(x)+\alpha]\sin\omega(x) - \int\limits_x^\infty h(t)\sin[\Phi(t)-\psi(t) +$$
$$+\alpha]\,\{\sin[\Phi(x)-\Phi(t)]\cos\omega(x) + \cos[\Phi(x)-\Phi(t)]\sin\omega(x)\}\,\mathrm{d}t\rangle +$$
$$+\eta_2(x),$$

où nous avons posé

$$\eta_2(x) = [\varphi(x)\sin\Phi(x)]'\,\delta_1^1(x) + [\varphi(x)\cos\Phi(x)]'\,\delta_2^1(x).$$

On tire d'ici facilement (28) et (30) et le théorème se trouve démontré.

Théorème 5.

Nous supposons $q \in C_0$, $p \in C_1$, $p > 0$ *dans l'intervalle* I. *Soient* φ, Φ *des fonctions qui satisfont aux conditions* φ, $\Phi \in C_2$, $\varphi > 0$, $\Phi > 0$, $\Phi' > 0$. *Posons*

$$k = \frac{1}{2}[\log p\varphi^2\Phi']', \quad l = \frac{-1}{2p\varphi\Phi'}[(p\varphi')' + q\varphi + p\varphi\Phi'^2].$$

Sous la condition

$$\int_a^\infty (|k| + |l|) < \infty$$

l'équation (2) *possède la solution générale*

$$y = \varphi(x)\,(e^{\Phi(x)}, e^{-\Phi(x)})\Big[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathbf{R}^k(x)\,\mathbf{c} + \boldsymbol{\delta}^n(x)\Big], \tag{32}$$

$$y' = ([\varphi(x)\,e^{\Phi(x)}]', [\varphi(x)\,e^{-\Phi(x)}]')\Big[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathbf{R}^k(x)\,\mathbf{c} + \boldsymbol{\delta}^n(x)\Big], \tag{33}$$

où $\mathbf{R}^k(x)$ *est la matrice définie par la formule* (9) *dans laquelle* $\mathbf{A}$ *signifie la matrice*

$$\begin{pmatrix} l - k, & e^{-2\Phi}(l + k) \\ e^{2\Phi}(k - l), & -l - k \end{pmatrix}.$$

Les composantes $\delta_1^n(x)$, $\delta_2^n(x)$ *du vecteur* $\boldsymbol{\delta}^n(x)$ *remplissent les inégalités*

$$|\delta_i^n(x)| \leqq \frac{\|\mathbf{c}\|}{(n+1)!}[2\varkappa(x)]^{n+1}\exp\{2\varkappa(x) - 2(n + 2 - i)\,\Phi(x)\}, \tag{34}$$
$$i = 1, 2.$$

Démonstration. La proposition découle du théorème 1 pour $P = 1$, $Q = -1$, $U = e^x$, $V = e^{-x}$, $W = -2$.

Posons

$$\mathbf{R}^k(x) = \begin{pmatrix} r_{11}^k(x), & r_{12}^k(x) \\ r_{21}^k(x), & r_{22}^k(x) \end{pmatrix}, \tag{35}$$

$$\varepsilon(x) = |k(x)| + |l(x)|, \quad \varkappa(x) = \int_x^\infty \varepsilon\, e^{2\Phi}. \tag{36}$$

Nous allons démontrer les inégalités

(37) $$| r^k_{1i}(x) | \leqq \frac{1}{2k!} [2e^{-2\Phi(x)}\varkappa(x)]^k,$$

(38) $$| r^k_{2i}(x) | \leqq \frac{1}{2k!} e^{2\Phi(x)}[2e^{-2\Phi(x)}\varkappa(x)]^k, \quad i = 1, 2.$$

Pour $k = 1$ on a

$$| r^1_{11}(x)| = |\int_x^\infty (l - k)| \leqq \int_x^\infty \varepsilon \leqq e^{-2\Phi(x)}\varkappa(x),$$

$$| r^1_{12}(x)| = |\int_x^\infty e^{-2\Phi(x)}(l + k)| \leqq e^{-2\Phi(x)}\int_x^\infty \varepsilon \leqq e^{-2\Phi(x)}\varkappa(x),$$

$$| r^1_{21}(x)| = |\int_x^\infty e^{2\Phi}(k - l)| \leqq \varkappa(x),$$

$$| r^1_{22}(x)| = |\int_x^\infty (-l - k)| \leqq \int_x^\infty \varepsilon \leqq \varkappa(x).$$

En procédant par induction on a d'après (9), (37) et (38)

$$| r^{k+1}_{1i}(x)| = |\int_x^\infty [(l - k)\, r^k_{1i} + e^{-2\Phi}(l + k)r^k_{2i}]| \leqq \int_x^\infty \varepsilon(| r^k_{1i} | + e^{-2\Phi} | r^k_{2i} |) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{k!}\int_x^\infty \varepsilon(2e^{-2\Phi}\varkappa)^k \leqq \frac{2^k}{k!} e^{-2k\Phi(x)} \int_x^\infty \varepsilon\varkappa^k \leqq$$

$$\leqq \frac{2^k}{k!} e^{-2(k+1)\Phi(x)} \int_x^\infty e^{2\Phi}\varepsilon\varkappa^k = \frac{1}{2(k+1)!} [2e^{-2\Phi(x)}\varkappa(x)^1]^{k+1}$$

et

$$| r^{k+1}_{2i}(x) | = |\int_x^\infty [e^{2\Phi}(k - l)\, r^k_{1i} - (l + k)\, r^k_{2i}] | \leqq \int_x^\infty e^{2\Phi}\varepsilon(|r^k_{1i}| + e^{-2\Phi}|r^k_{2i}|) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{k!}\int_x^\infty \varepsilon e^{2\Phi}(2\, e^{-2\Phi}\varkappa)^k \leqq \frac{2^k}{k!} e^{-2k\Phi(x)} \int_x^\infty \varepsilon\, e^{2\Phi}\varkappa^k =$$

$$\frac{1}{2(k+1)!} e^{2\Phi(x)}[2\, e^{-2(k+1)\Phi(x)}\varkappa(x)]^{k+1}.$$

En posant maintenant $\delta^n = \begin{pmatrix}\delta^n_1\\ \delta^n_2\end{pmatrix}$, où

(39) $$\delta^n_1 = c_1 \sum_{k=n+1}^\infty (-1)^k\, r^k_{11} + c_2 \sum_{k=n+1}^\infty (-1)^k r^k_{12},$$

(40) $$\delta^n_2 = c_1 \sum_{k=n+1}^\infty (-1)^k r^k_{21} + c_2 \sum_{k=n+1}^\infty (-1)^k r^k_{22},$$

on obtient d'après (7) immédiatement (32) et pour les composantes δ_1^n, δ_2^n on trouve en vertu de (39) et (40)

$$| \delta_i^n(x) | \leqq || \mathbf{c} || \sum_{k=n+1}^{\infty} [| r_{i1}^k(x) | + | r_{i2}^k(x) |].$$

En tenant compte des inégalités (37) et (38) on tire d'ici

$$| \delta_i^n(x) | \leqq || \mathbf{c} || \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} [2\, e^{-2\Phi(x)}\varkappa(x)]^k e^{2(i-1)\Phi(x)} \leqq$$

$$\leqq \frac{|| \mathbf{c} ||}{(n+1)!} [2\, e^{-2\Phi(x)}\varkappa(x)]^{n+1} e^{2(i-1)\Phi(x)} \exp\{2\, e^{-2\Phi(x)}\varkappa(x)\} \leqq$$

$$\leqq \frac{|| \mathbf{c} ||}{(n+1)!} [2\varkappa(x)]^{n+1} \exp\{2\varkappa(x) - 2(n+2-i)\, \Phi(x)\}$$

ce qui achève la démonstration.

Conséquence.

Sous les conditions du théorème précédent la solution générale de l'équation (2) *possède la forme*

(41) $$y = c_1\varphi(x)\{e^{\Phi(x)} + \int_x^{\infty} e^{-\Phi(x)}[e^{2\Phi(x)} - e^{2\Phi(t)}]\, [k(t) - l(t)]\, dt\} +$$

$$+ c_2\varphi(x)\, \{e^{-\Phi(x)} + \int_x^{\infty} e^{\Phi(x)}[e^{-2\Phi(x)} - e^{-2\Phi(t)}]\, [k(t) + l(t)]\, dt\} + \eta_1(x),$$

(42)

$$y' = c_1\langle[\varphi'(x) + \varphi(x)\, \Phi'(x)]\, e^{\Phi(x)} + \int_x^{\infty} e^{-\Phi(x)}\{[\varphi'(x) + \varphi(x)\, \Phi'(x)]\, e^{2\Phi(x)} -$$

$$- [\varphi'(x) - \varphi(x)\, \Phi'(x)]\, e^{2\Phi(t)}\}\, [k(t) - l(t)]dt\rangle + c_2\langle[\varphi'(x) -$$

$$- \varphi(x)\, \Phi'(x)]\, e^{-\Phi(x)} + \int_x^{\infty} e^{\Phi(x)}\{[\varphi'(x) - \varphi(x)\, \Phi'(x)]\, e^{-2\Phi(x)} -$$

$$- [\varphi'(x) + \varphi(x)\, \Phi'(x)]\, e^{-2\Phi(t)}\}[k(t) - l(t)]\, dt\rangle + \eta_2(x)$$

et

(43) $$| \eta_1(x) | \leqq 4\, || \mathbf{c} ||\, \varphi(x)\varkappa^2(x)\, e^{2\varkappa(x)-3\Phi(x)},$$

(44) $$| \eta_2(x) | \leqq 2\, || \mathbf{c} ||\{| \varphi'(x) + \varphi(x)\, \Phi'(x) | + | \varphi'(x) - \varphi(x)\, \Phi'(x) |\}\, \varkappa^2(x)\, e^{2\varkappa(x)-3\Phi(x)}$$

où la fonction $\varkappa(x)$ *est définie par* (36).

Démonstration. Pour $n = 1$ on obtient du théorème précédent

$$y = \varphi(x)\,(e^{\Phi(x)}, e^{-\Phi(x)}) \begin{pmatrix} c_1 - \int\limits_x^\infty [c_1(l-k) + c_2\, e^{-2\Phi}(l+k)] + \delta_1^1(x) \\ c_2 + \int\limits_x^\infty [c_1\, e^{2\Phi}(l-k) + c_2(l+k)] + \delta_2^1(x) \end{pmatrix}$$

et en posant

$$\eta_1(x) = \varphi(x)[e^{\Phi(x)}\delta_1^1(x) + e^{-\Phi(x)}\delta_2^1(x)]$$

on obtient après un calcul simple la formule (41). En vertu de (34) on a

$$|\eta_1(x)| \leqq \varphi(x)\langle e^{\Phi(x)} \frac{\|\mathbf{c}\|}{2} [2\varkappa(x)]^2 \exp\{2\varkappa(x) - 4\Phi(x)\} +$$

$$+ e^{-\Phi(x)} \frac{\|\mathbf{c}\|}{2} [2\varkappa(x)]^2 \exp\{2\varkappa(x) - 2\Phi(x)\}\rangle =$$

$$= 4\|\mathbf{c}\|\,\varphi(x)\,\varkappa^2(x)\exp\{2\varkappa(x) - 3\Phi(x)\}$$

ce qui est (43). D'une manière analogue on trouve aussi les formules (42) et (44).

Théorème 6.

Nous supposons $q \in C_0$, $p \in C_1$, $p > 0$ *dans l'intervalle* I. *Soient* φ, Φ *des fonctions qui satisfont aux conditions* φ, $\Phi \in C_2$, $\varphi > 0$, $\Phi > 0$, $\Phi' > 0$. *Posons*

$$k = (\log p\varphi^2\Phi')', \quad l = -\frac{1}{p\varphi\Phi'}[(p\varphi')' + q\varphi].$$

Sous la condition

$$\int\limits_a^\infty (|k|\,\Phi + |l|\,\Phi^2) < \infty$$

l'équation (2) *possède la solution générale*

$$y = \varphi(x)\,(\Phi(x), 1)\Big[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathbf{R}^k(x)\,\mathbf{c} + \boldsymbol{\delta}^n(x)\Big], \tag{45}$$

$$y' = ([\varphi(x)\,\Phi(x)]', \varphi'(x))\Big[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathbf{R}^k(x)\,\mathbf{c} + \boldsymbol{\delta}^n(x)\Big], \tag{46}$$

où $\mathbf{R}^k(x)$ *est la matrice définie par la formule* (9) *dans laquelle* $\mathbf{A}$ *signifie la matrice*

$$\begin{pmatrix} l\Phi - k, & l \\ k\Phi - l\Phi^2, & -l\Phi \end{pmatrix}.$$

Les composantes $\delta_1^n(x)$, $\delta_2^n(x)$ *du vecteur* $\boldsymbol{\delta}^n(x)$ *remplissent les* ***inégalités***

$$| \delta_i^n(x) | \leqq \frac{\| \mathbf{c} \|}{2} \frac{\Phi^{i-1}(x)}{(n+1)!} [2\varkappa(x)\, \Phi^{-1}(x)]^{n+1} \exp\{2\varkappa(x)\, \Phi^{-1}(x)\} [1 + \Phi^{-1}(x)],$$

$$\varkappa(x) = \int_x^\infty (| k | \Phi + | l | \Phi^2). \tag{47}$$

Démonstration. La proposition découle du théorème 1 pour $P = 1$, $Q = 0$, $U = x$, $V = 1$, $W = -1$.

Si nous nous servons encore de la notation (35) nous obtenons pour les composantes r_{ij}^k de $\mathbf{R}^k$

$$| r_{1i}^k(x) | \leqq \frac{\Phi^{1-i}(x)}{2k!} [2\varkappa(x)\, \Phi^{-1}(x)]^k, \tag{48}$$

$$| r_{2i}^k(x) | \leqq \frac{\Phi^{2-i}(x)}{2k!} [2\varkappa(x)\, \Phi^{-1}(x)]^k, \quad i = 1, 2. \tag{49}$$

On a, en effet,

$$| r_{11}^1(x) | = | \int_x^\infty (l\Phi - k) | \leqq \varkappa(x)\, \Phi^{-1}(x),$$

$$| r_{12}^1(x) | = | \int_x^\infty l | \leqq \varkappa(x)\, \Phi^{-2}(x),$$

$$| r_{21}^1(x) | = | \int_x^\infty k\Phi - l\Phi^2 | \leqq \varkappa(x),$$

$$| r_{22}^1(x) | = | \int_x^\infty -l\Phi | \leqq \varkappa(x)\Phi^{-1}(x).$$

En supposant maintenant vraies les formule (48) et (49) et en posant, pour simplifier, $\varepsilon = | k | \Phi + | l | \Phi^2$, on obtient

$$| r_{1i}^{k+1}(x) | = | \int_x^\infty [l\Phi - k)\, r_{1i}^k + l r_{2i}^k] | \leqq \Phi^{-1}(x) \int_x^\infty \varepsilon (| r_{1i}^k | + \Phi^{-1} | r_{2i}^k |) \leqq$$

$$\leqq \Phi^{-i}(x) \int_x^\infty \frac{\varepsilon}{k!} [2\varkappa\Phi^{-1}]^k \leqq \frac{1}{k!} \Phi^{-i}(x)[2\Phi^{-1}(x)]^k \int_x^\infty \varepsilon\varkappa^k =$$

$$= \frac{1}{k!} \Phi^{-i}(x)[2\Phi^{-1}(x)]^k \frac{\varkappa^{k+1}(x)}{k+1} = \frac{\Phi^{1-i}(x)}{2(k+1)!} [2\varkappa(x)\, \Phi^{-1}(x)]^{k+1}$$

et d'une manière analogue

$$|r_{2i}^{k+1}(x)| = \Big|\int_x^\infty [(k\Phi - l\Phi^2)\, r_{1i}^k - l\Phi r_{2i}^k]\Big| \leqq \frac{1}{k!}\int_x^\infty \varepsilon\Phi^{1-i}[2\varkappa\Phi^{-1}]^k \leqq$$
$$\leqq \frac{\Phi^{2-i}(x)}{2(k+1)!}[2\varkappa(x)\,\Phi^{-1}(x)]^{k+1}$$

En posant maintenant $\delta^n = \begin{pmatrix}\delta_1^n\\ \delta_2^n\end{pmatrix}$ et en définissant les composantes δ_1^n, δ_2^n par les formules analogues comme au cas précédent on obtient en raison de (7) immédiatement (45) et (46). Les fonctions δ_i^n, $i = 1, 2$ remplissent l'inégalité

$$|\delta_i^n(x)| \leqq \|\mathbf{c}\| \sum_{k=n+1}^{\infty} [|r_{i1}^k(x)| + |r_{i2}^k(x)|]$$

et en tenant compte de (48) et de (49) on déduit immédiatement l'estimation (47).

Conséquence

Sous les conditions du théorème précédent la solution générale de l'equation (2) *possède la forme*

$$y = c_1\varphi(x)\{\Phi(x) + \int_x^\infty [\Phi(x) - \Phi(t)]\,[k(t) - l(t)\,\Phi(t)]\,\mathrm{d}t\} + \tag{50}$$
$$+ c_2\varphi(x)\{1 - \int_x^\infty [\Phi(x) - \Phi(t)]\; l(t)\,\mathrm{d}t\} + \eta_1(x).$$

$$y' = c_1\langle[\varphi(x)\,\Phi(x)]' + \int_x^\infty \{[\varphi(x)\,\Phi(x)]' - \tag{51}$$
$$- \Phi(t)\,\varphi'(x)\}\,[k(t) - l(t)\,\Phi(t)]\,\mathrm{d}t\rangle +$$
$$+ c_2\langle\varphi'(x) - \int_x^\infty \{[\varphi(x)\,\Phi(x)]' - \Phi(t)\,\varphi'(x)\}\; l(t)\,\mathrm{d}t\rangle + \eta_2(x),$$

$$|\eta_1(x)| \leqq 2\,\|\mathbf{c}\|\,\varphi(x)\,\Phi^{-1}(x)\,\varkappa^2(x)\exp\{2\varkappa(x)\,\Phi^{-1}(x)\}\,[1 + \Phi^{-1}(x)], \tag{52}$$

$$|\eta_2(x)| \leqq \|\mathbf{c}\|\{|[\varphi(x)\,\Phi(x)]'| + \tag{53}$$
$$+ |\varphi'(x)\,\Phi(x)|\}\,\varkappa^2(x)\,\Phi^{-2}(x)\exp\{2\varkappa(x)\,\Phi^{-1}(x)\}\,[1 + \Phi^{-1}(x)].$$

Démonstration. Du théorème précédent on obtient pour $n = 1$

$$y = \varphi(x)\,(\Phi(x), 1)\begin{pmatrix} c_1 - \int_x^\infty [c_1(l\Phi - k) + c_2 l] + \delta_1^1(x) \\ c_2 - \int_x^\infty [c_1(k\Phi - l\Phi^2) - c_2 l\Phi] + \delta_2^1(x)\end{pmatrix}$$

et en posant

$$\eta_1(x) = \varphi(x) [\Phi(x) \delta_1^1(x) + \delta_2^1(x)]$$

on obtient facilement la formule (50). En vertu de (47) on tire d'ici (52).
D'une manière analogue on trouve (51) et (53).

TRAVAUX CITÉS

[1] Ascoli G., *Sulla forma degli integrali dell' equazione differenziale $y'' + A(x) y = 0$ in un caso notevole di stabilità*, Revista Universidad nacional del Tucumán. Facultad de ciencias exactas y aplicadas. Tucumán. Ser A. Matemáticas y física teórica 2 (1941), p. 131—140.

[2] Ascoli G., *Sopra un caso di stabilità per la equazione differenziale $y'' + A(x)y = 0$*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (4) 26 (1947), p. 199—206.

[3] Baker H. F., *On the integration of linear differential equations*, Proceedings of the London Mathematical Society 35 (1903), p. 333—378.

[4] Fubini G., *Studi asintotici per alcune equazioni differenziali*, Atti della Accademia Nazionale dei Linzei. Rendiconti. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, (6) 26 (1937), p. 253—259.

[5] Kamke E., *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[6] Peano G., *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari*, Atti della Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche, Matematische e Naturali 22 (1887), p. 293—302.

[7] Ráb M., *Kriterien für die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung $[p(x)\, y']' + q(x)\, y = 0$*, Časopis pro pěstování matematiky, 84 (1959), p. 335—370.

[8] Ráb M., *Asymptotische Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung $y'' = A(x)\, y$ im nichtoszillatorischen Fall*, Czechoslovak Mathematical Journal (85) 10 (1960), p. 501—522.

[9] Ráb M., *Asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + q(x)\, y = 0$*, Czechoslovak Mathematical Journal, (89) 14 (1964), p. 203 bis 221.

[10] Ráb M., *Note sur les Formules asymptotiques pour les solutions d'un système des équations différentielles linéaires*, sous presse dans Czechoslovak Mathematical Journal.

[11] Richard U., *Sulla risoluzione asintitico-numerica dell'equazione differenziale $(py')' + qy = 0$*, Atti della Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali 97 (1962/63), p. 857—890.

[12] Sansone, G. *Equazioni differenziali nel campo reale*, Bologna 1949.