BEMERKUNG ZUR DEFINITION DES VEKTORRAUMES

JAN HANÁK, BRNO

(Eingegangen am 12. März 1965)

Es sei T ein Körper; es sei 0 sein Nullelement, 1 sein Einselement, und (—1) sei sein Element ein solches, daß $(-1) + 1 = 0$ gilt.

Als *Vektorraum* (linearer Raum) über dem Körper T verstehen wir die nichtleere Menge L zusammen mit den Operationen . $(T \times L \to L)$ und + $(L \times L \to L)$, wenn gilt:

(1) $(L, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(2) $\lambda . (a + b) = \lambda . a + \lambda . b$

(3) $(\lambda + \mu) . a = \lambda . a + \mu . a$

(4) $\lambda . (\mu . a) = (\lambda . \mu) . a$

(5) $1 . a = a$

für alle $a, b \in L$ und für alle Elemente λ, μ des Körpers T.

Diese Definition läßt sich vereinfachen:

Satz. *Aus der angeführten Definition entstehen äquivalente, wenn wir Axiom* (1) *ersetzen entweder*

(A) *durch das Axiom*

(1′) $(L, +)$ ist eine Semigruppe (d. i. eine Halbgruppe mit den Kürzungsregeln)

oder

(B) *durch die Axiome*

(1″) $(L, +)$ ist eine Halbgruppe

(6) $0 . a = 0 . b$.

Beweis. Im Falle A ist vor allem die Operation + kommutativ (für beliebiges $a, b \in L$ ist $a + a + b + b = (1 + 1) . a + (1 + 1) . b = (1 + 1) . (a + b) = 1 . (a + b) + 1 . (a + b) = a + b + a + b$, daher durch Kürzung $a + b = b + a$[1])) und weiter tritt der Fall B ein (für beliebiges $a, b \in L$ ist $1 . a + 0 . a + 1 . b = 1 . a + 1 . b = 1 . a + 0 . b + 1 . b$, daher durch Kürzung $0 . a = 0 . b$). Im Falle B ist

[1]) Eine ähnliche Wendung hat bereits D. Hilbert angewendet: Über den Zahlbegriff (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, *8* (1899), S. 180—184), S. 183.

(L, $+$) eine Gruppe[2]) (die Gleichung $a + x = b$ hat die Lösung $x = (-1) \cdot a + b$, weil $a + (-1) \cdot a + b = [1 + (-1)] \cdot a + b = 0 \cdot a + b = 0 \cdot b + 1 \cdot b = 1 \cdot b = b$, ähnlich hat die Gleichung $y + a = b$ die Lösung $y = b + (-1) \cdot a$), es tritt also der Fall A ein. In beiden Fällen ist daher Axiom (1) erfüllt.

[2]) d. h., daß (L, $+$) eine Halbgruppe ist, in welcher für beliebiges $a, b \in L$ jede der Gleichungen $a + x = b$, $y + a = b$ wenigstens eine Lösung hat (die Äquivalenz dieser Definition der Gruppe mit den geläufigeren Definitionen siehe z. B.: O. Borůvka: Základy teorie grupoidů a grup (Nakladatelství ČSAV, Praha 1962), S. 137—138).