

Archivum Mathematicum

Jan Hanák

Bemerkung zu Definition des Vektorraumes

Archivum Mathematicum, Vol. 1 (1965), No. 2, 99--100

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104586>

Terms of use:

© Masaryk University, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

BEMERKUNG ZUR DEFINITION DES VEKTORRAUMES

JAN HANÁK, BRNO

(Eingegangen am 12. März 1965)

Es sei T ein Körper; es sei 0 sein Nullelement, 1 sein Einselement, und (-1) sei sein Element ein solches, daß $(-1) + 1 = 0$ gilt.

Als *Vektorraum* (linearer Raum) über dem Körper T verstehen wir die nichtleere Menge L zusammen mit den Operationen \cdot ($T \times L \rightarrow L$) und $+$ ($L \times L \rightarrow L$), wenn gilt:

(1) $(L, +)$ ist eine abelsche Gruppe

$$(2) \lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$$

$$(3) (\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$$

$$(4) \lambda \cdot (\mu \cdot a) = (\lambda \cdot \mu) \cdot a$$

$$(5) 1 \cdot a = a$$

für alle $a, b \in L$ und für alle Elemente λ, μ des Körpers T .

Diese Definition läßt sich vereinfachen:

Satz. *Aus der angeführten Definition entstehen äquivalente, wenn wir Axiom (1) ersetzen entweder*

(A) *durch das Axiom*

(1') $(L, +)$ ist eine Semigruppe (d. i. eine Halbgruppe mit den Kürzungsregeln)

oder

(B) *durch die Axiome*

(1'') $(L, +)$ ist eine Halbgruppe

$$(6) 0 \cdot a = 0 \cdot b.$$

Beweis. Im Falle A ist vor allem die Operation $+$ kommutativ (für beliebiges $a, b \in L$ ist $a + a + b + b = (1 + 1) \cdot a + (1 + 1) \cdot b = (1 + 1) \cdot (a + b) = 1 \cdot (a + b) + 1 \cdot (a + b) = a + b + a + b$, daher durch Kürzung $a + b = b + a$ ¹⁾) und weiter tritt der Fall B ein (für beliebiges $a, b \in L$ ist $1 \cdot a + 0 \cdot a + 1 \cdot b = 1 \cdot a + 1 \cdot b = 1 \cdot a + + 0 \cdot b + 1 \cdot b$, daher durch Kürzung $0 \cdot a = 0 \cdot b$). Im Falle B ist

¹⁾ Eine ähnliche Wendung hat bereits D. Hilbert angewendet: Über den Zahlbegriff (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 8 (1899), S. 180–184), S. 183.

$(L, +)$ eine Gruppe²⁾ (die Gleichung $a + x = b$ hat die Lösung $x = (-1) \cdot a + b$, weil $a + (-1) \cdot a + b = [1 + (-1)] \cdot a + b = 0 \cdot a + b = 0 \cdot b + 1 \cdot b = 1 \cdot b = b$, ähnlich hat die Gleichung $y + a = b$ die Lösung $y = b + (-1) \cdot a$), es tritt also der Fall A ein. In beiden Fällen ist daher Axiom (1) erfüllt.

²⁾ d. h., daß $(L, +)$ eine Halbgruppe ist, in welcher für beliebiges $a, b \in L$ jede der Gleichungen $a + x = b$, $y + a = b$ wenigstens eine Lösung hat (die Äquivalenz dieser Definition der Gruppe mit den geläufigeren Definitionen siehe z. B.: O. Borůvka: Základy teorie grupoidů a grup (Nakladatelství ČSAV, Praha 1962), S. 137–138).