Ladislav Skula

Eine Bemerkung über Kardinalpotenzen

Archivum Mathematicum, Vol. 1 (1965), No. 2, 95--98

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104585

EINE BEMERKUNG ÜBER KARDINALPOTENZEN

LADISLAV SKULA, BRNO

(Eingegangen am 16. Februar 1965)

Definition. Es sei M eine teilweise geordnete Menge, $x \in M$, $y \in M$. Unter der Menge $Z(x, y)$ verstehen wir die Menge aller Elemente $z \in M$, welche folgende Bedingungen erfüllen:

1. $z \geqq x, z \geqq y$,
2. $z' \geqq x, z' \geqq y \Rightarrow z' \nless z$.

Ein Element a von M wird ein *z-Element der Menge M* genannt, wenn es nicht minimal ist und wenn aus $x < a$, $y < a$ die Beziehung $a \notin Z(x, y)$ folgt.

In den Hilfssätzen 1—3 werden mit K, G nicht leere teilweise geordnete Mengen bezeichnet; K hat ein kleinstes Element $-\infty$ und genügt der Minimalbedingung. Die Menge aller z-Elemente der Menge K wird mit Z und die Menge aller z-Elemente der Menge K^G mit Z' bezeichnet. Wir werden die Menge aller Anfänge der Menge G mit $\mathfrak{A}(G)$ bezeichnen. Wir setzen $I(K, G) = \{x_{\alpha,E} \mid \alpha \in L, E \in (\mathfrak{A}(\tilde{G}) - \{\emptyset\})$, wo $L = K - \{-\infty\}$ und $x_{\alpha,E} \in K^G$ durch

$$x_{\alpha,E}(t) = \begin{cases} \alpha & \text{für } t \in E \\ -\infty & \text{für } t \in G - E \end{cases}$$

definiert ist.

Hilfssatz 1. *Es sei $f \in Z'$. Dann gilt $f \in I(K, G)$.*

Beweis. Ist $\operatorname{card} f^1(G) = 1$, so gilt $f = x_{f^1(G), G} \in I(K, G)$.

Wir nehmen an, dass $\operatorname{card} f^1(G) > 1$ ist.

I. Wir zeigen, dass $-\infty \in f^1(G)$ gilt.

a) Wir nehmen an, dass $f^1(G)$ gerade ein minimales Element o hat. o ist das kleinste Element in der Menge $f^1(G)$ (K genügt der Minimalbedingung). Ist $o \neq -\infty$, so setzen wir

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\infty & \text{für } t \in f^{-1}(o) \\ f(t) & \text{für } t \in G - f^{-1}(o), \end{cases} \qquad \psi(t) = o \text{ für } t \in G.$$

Es ist $\varphi \in K^G$, $\psi \in K^G$, $\varphi < f$, $\psi < f$, $\sup\{\varphi, \psi\} = f$, also $f \in Z(\varphi, \psi)$, was ein Widerspruch ist.

b) Wir nehmen an, dass $f^1(G)$ wenigstens zwei verschiedene minimale Elemente o_1, o_2 enthält.

Wir setzen

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} -\infty & \text{für } t \in f^{-1}(o_i) \\ f(t) & \text{für } t \in G - f^{-1}(o_i),\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Es ist $\varphi_i \in K^G$, $\varphi_i < f$ für $i = 1{,}2$ und $\sup\{\varphi_1, \varphi_2\} = f$, was ein Widerspruch ist.

II. Wir zeigen, dass $\operatorname{card} f^1(G) = 2$.

Wir setzen voraus, dass $\operatorname{card} f^1(G) \geqq 3$ ist. Dann ist $\operatorname{card}\{f^1(G) - \{-\infty\}\} \geqq 2$.

a) Wir nehmen an, dass die Menge $f^1(G) - \{-\infty\}$ ein kleinstes Element o hat.

Wir setzen

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\infty & \text{für } t \in f^{-1}(-\infty) \cup f^{-1}(o) \\ f(t) & \text{für } t \in G - f^{-1}(-\infty) \cup f^{-1}(o), \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} -\infty & \text{für } t \in f^{-1}(-\infty) \\ o & \text{für } t \in G - f^{-1}(-\infty). \end{cases}$$

Es ist $\varphi \in K^G$, $\psi \in K^G$, $\varphi < f$, $\psi < f$, $f = \sup\{\varphi, \psi\}$, was ein Widerspruch ist.

b) Wir nehmen an, dass es in der Menge $f^1(G) - \{-\infty\}$ zwei verschiedene minimale Elemente o_1, o_2 gibt.

Wir setzen

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} -\infty & \text{für } t \in f^{-1}(-\infty) \cup f^{-1}(o_i) \\ f(t) & \text{für } t \in G - f^{-1}(-\infty) \cup f^{-1}(o_i),\ i = 1{,}2. \end{cases}$$

Es ist $\varphi_i \in K^G$, $\varphi_i < f$ für $i = 1{,}2$ und $\sup\{\varphi_1, \varphi_2\} = f$, was ein Widerspruch ist. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Ferner werden wir die Menge aller nicht leeren nach oben gerichteten Anfänge der Menge $\breve{G}$ mit in [1] wie $\mathfrak{D}(\breve{G})$ bezeichnen.

Hilfssatz 2. *Es sei $x_{\alpha,E} \in Z'$. Dann gilt $\alpha \in Z$, $E \in \mathfrak{D}(\breve{G})$.*

Beweis. I. Wir zeigen, dass $\alpha \in Z$ gilt.

Wir nehmen an, dass $\alpha \notin Z$ gilt. Weil $\alpha \neq -\infty$ ist, gibt es Elemente $b_1 \in K$, $b_2 \in K$, so dass $b_1 < \alpha$, $b_2 < \alpha$, $\alpha \in Z(b_1, b_2)$ ist.

Wir setzen

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} b_i & \text{für } t \in E \\ -\infty & \text{für } t \in G - E,\ i = 1{,}2. \end{cases}$$

Es gilt $\varphi_i \in K^G$, $\varphi_i < x_{\alpha,E}$ für $i = 1{,}2$. Weil $x_{\alpha,E} \in Z'$ ist, gilt $x_{\alpha,E} \notin Z(\varphi_1, \varphi_2)$. Also gibt es ein Element $g \in K^G$, so dass $g \geqq \varphi_1$, $g \geqq \varphi_2$, $g < x_{\alpha,E}$ ist. Für $t \in G - E$ gilt $g(t) = -\infty$. Es gibt also ein

Element $t_o \in E$, so dass $g(t_o) < x_{\alpha,E}(t_o) = \alpha$ ist. Es gilt $b_i = \varphi_i(t_o) \leqq g(t_o)$ für $i = 1,2$, was ein Widerspruch ist.

II. Wir zeigen, dass $E \in \mathfrak{D}(\breve{G})$ gilt.

Wir nehmen an, dass $E \notin \mathfrak{D}(\breve{G})$ gilt. Weil $E \neq \emptyset$ ist, gibt es Elemente $t_1 \in E$, $t_2 \in E$, so dass für jedes Element $t \in E$ nicht gleichzeitig $t \leqq t_1$, $t \leqq t_2$ gilt.

Wir setzen

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \alpha & \text{für } t \in G - A_i \\ -\infty & \text{für } t \in A_i,\ i = 1,2, \end{cases}$$

wo $A_i = \{t \mid t \in G,\ t \leqq t_i\} \cup (G - E)$ ist. Es ist $\varphi_i \in K^G$, $\varphi_i < x_{\alpha,E}$ für $i = 1,2$, $\sup\{\varphi_1, \varphi_2\} = x_{\alpha,E}$, was ein Widerspruch ist.

Hilfssatz 3. *Es sei $\alpha \in Z$, $E \in \mathfrak{D}(\breve{G})$. Dann ist $x_{\alpha,E} \in Z'$.*

Beweis. $x_{\alpha\,E}$ ist kein minimales Element. Wir nehmen an, dass $x_{\alpha,E} \notin Z'$ ist. Dann gibt es solche Elemente $\varphi \in K^G$, $\psi \in K^G$, dass $\varphi < x_{\alpha,E}$, $\psi < x_{\alpha,E}$, $x_{\alpha,E} \in Z(\varphi, \psi)$. Für $t \in G - E$ gilt $\varphi(t) = \psi(t) = -\infty$. Wir setzen $\varphi^{-1}(\alpha) = M_\varphi$, $\psi\,\psi^{-1}(\alpha) = M_\psi$. Es ist $M_\varphi \neq E \neq M_\psi$ und es gilt $M_\varphi \cup M_\psi \neq E$. Wenn es nämlich $M_\varphi \cup M_\psi = E$ wäre, dann gäbe es Elemente $t_\varphi \in E - M_\varphi$, $t_\psi \in E - M_\psi$ und $t^* \in E$, so dass $t^* \leqq t_\varphi$, $t^* \leqq t_\psi$ ist. Das ist ein Widerspruch, weil die Mengen M_φ und M_ψ die Anfänge der Menge $\breve{G}$ sind.[1])

Es gibt wenigstens ein Element $t_o \in E - M_\varphi \cup M_\psi$, so dass $\varphi(t_o) \neq \neq \psi(t_o)$. Wenn es nämlich $\varphi(t) = \psi(t)$ für jedes Element $t \in E - - M_\varphi \cup M_\psi$ wäre, dann setzen wir

$$f(t) = \begin{cases} \alpha & \text{für } t \in M_\varphi \cup M_\psi \\ \varphi(t) & \text{für } t \in E - M_\varphi \cup M_\psi \\ -\infty & \text{für } t \in G - E. \end{cases}$$

Es ist $f \in K^G$, $f < x_{\alpha,E}$, $f \geqq \varphi$, $f \geqq \psi$, also $x_{\alpha,E} \notin Z(\varphi, \psi)$, was ein Widerspruch ist.

Es gilt $\varphi(t_o) < \alpha$, $\psi(t_o) < \alpha$. Weil $\alpha \in Z$, gibt es $\beta \in K$, so dass $\beta \geqq \varphi(t_o)$, $\beta \geqq \psi(t_0)$, $\beta < \alpha$.

Wir setzen

$$f(t) = \begin{cases} \alpha & \text{für } t \in E - M_o \\ \beta & \text{für } t \in M_o \\ -\infty & \text{für } t \in G - E, \end{cases}$$

[1]) Professor M. Novotný hat in seinem nicht publizierten Vortrag folgenden Satz bewiesen: „Es sei G eine teilweise geordnete Menge. Dann $\mathfrak{D}(G)$ ist die Menge aller vereinigungsirreduziblen Elemente in $\mathfrak{A}(G)$." Die Behauptung $M_\varphi \cup M_\psi \neq E$ folgt aus diesem Satz. Weil der Vortrag des Professors Novotný nicht publiziert wurde, habe ich den Beweis der Behauptung $M_\varphi \cup M_\psi \neq E$ laut diesem Vortrag geschrieben.

wo $M_0 = \{t \mid t \in E,\ t \leqq t_0\}$ ist. Es ist $f \in K^G$, $f \geqq \varphi$, $f \geqq \psi$, $f < x_{\alpha,E}$, was ein Widerspruch ist.

Satz 1. *Es sei K eine teilweise geordnete Menge mit einem kleinsten Element, welche der Minimalbedingung genügt. Es sei Z die Menge aller z-Elemente der Menge K und G eine teilweise geordnete Menge.*

Dann ist die Menge aller z-Elemente der Menge K^G zu der Menge $Z \,.\, \mathfrak{D}(\breve{G})$ isomorph.

Beweis. Nach den Hilfssätzen 1—3 ist die Menge aller z-Elemente der Menge K^G die Menge aller $x_{\alpha,E}$, wo $\alpha \in Z$, $E \in \mathfrak{D}(\breve{G})$ ist.

Satz 2. *Es sei K eine teilweise geordnete Menge mit einem kleinsten Element, welche der Minimalbedingung genügt. Es sei Z die Menge aller z-Elemente der Menge K; wir nehmen an, dass man immer durch den Typus der Menge Z bei der Kardinalmultiplikation kürzen kann. Es seien G, G_1 teilweise geordnete Mengen und $K^G \cong K^{G_1}$.*

Dann gilt $G \cong G_1$.

Beweis. Ist $K^G \cong K^{G_1}$, so ist nach dem Satz 1 $Z \,.\, \mathfrak{D}(\breve{G}) \cong Z \,.\, \mathfrak{D}(\breve{G}_1)$, also ist $\mathfrak{D}(\breve{G}) \cong \mathfrak{D}(\breve{G}_1)$ und nach [1] 2 auch $\breve{G} \cong \breve{G}_1$.

Satz 3. *Es seien K, G, G_1 nicht leere endliche teilweise geordnete Mengen,* card $K > 1$, *wir nehmen an, dass K ein kleinstes Element hat. Es sei $K^G \cong K^{G_1}$.*

Dann gilt $G \cong G_1$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Satz 1, aus [1] 2 und daraus, dass man bei der Kardinalmultiplikation von endlichen Typen durch jeden nicht leeren endlichen Typus kürzen darf ([2]4.6).

LITERATUR

[1] M. Novotný, *Über gewisse Probleme der Kardinalarithmetik.* Publ. Fac. Sci. Univ. Brno. 457 (1964), S. 478—481

[2] M. Novotný, *Über Kardinalprodukte.* Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd. 9, S. 13—20 (1963).