ISOMORPHISMUS DER KARDINALPOTENZEN

EDUARD FUCHS, BRNO

(Eingegangen am 2. Dezember 1964)

Folgendes Problem ist analog zu dem Problem, welches Chang in [3] formulierte:

Es seien K, G, G_1 geordnete. Mengen. Unter welchen Bedingungen folgt aus der Isomorphie der Kardinalpotenzen K^G und K^{G_1} auch die Isomorphie der Mengen G, G_1?

In der Arbeit [4] hat M. Novotný bewiesen, dass es vorauszusetzen genügt, dass K eine Kette mit mindestens zwei Elementen ist (vgl. [4], Satz 8.1.) In einer anderen Arbeit, welche bisher nicht publiziert ist, verallgemeinte M. Novotný dieses Ergebnis. Er hat bewiesen, dass es vorauszusetzen genügt, dass K ein Vereinigungshalbverband mit dem kleinsten Element ist und man durch den Typus der Menge aller irreduziblen Elemente in K immer in dem Kardinalprodukt kürzen darf.

In dieser Arbeit wird das gegebene Problem unter Voraussetzung, dass K, G, G_1 endliche geordnete Mengen sind, studiert. Es ist klar, dass es keinen Sinn hat den Fall zu studieren, wo die Mächtigkeit einer dieser Mengen gleich 1 ist. Deswegen wird unter einer endlichen Menge immer eine endliche Menge, welche mindestens zwei Elemente hat, verstanden.

In dieser Arbeit wird bewiesen: Ist K eine endliche Gegenkette, d. h. eine solche geordnete Menge, dass jede zwei verschiedene Elemente von K unvergleichbar sind, so folgt nicht aus der Isomorphie der Kardinalpotenzen K^G und K^{G_1} die Isomorphie der Mengen G, G_1 (Satz 1.) Ist K eine endliche geordnete Menge mit dem kleinsten Element, so folgt aus der Isomorphie der Kardinalpotenzen K^G und K^{G_1} die Isomorphie der Mengen G, G_1 (Satz 5.) Mit dualen Betrachtungen kann man bewiesen, dass es vorauszusetzen genügt, dass K eine endliche geordnete Menge mit dem grössten Element ist.

Damit sind alle bisher bekannten Sätze verallgemeinert, die das angeführte Problem betreffen.

Im folgenden bezeichnen wir mit $A \,.\, B$ bzw. A^B das Kardinalprodukt bzw. die Kardinalpotenz geordneter Mengen A, B. Die Verbandsoperationen werden durch $\wedge$, $\vee$, die Ordnung durch $\leqq$, die Unvergleichbarkeit durch $||$, die Isomorphie durch $\simeq$ symbolisiert. Ist G eine geordnete Menge, so ist $\breve{G}$ die zu G dual geordnete Menge. Wir bezeichnen mit $\{x \mid E(x)\}$ die Menge aller Elemente x mit der Eigenschaft E, eine endliche Menge mit Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bezeichnen wir mit

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. $\emptyset$ ist die leere Menge, card A ist die Mächtigkeit der Menge A. Eine eineindeutige Abbildung, welche dem Element x das Element $\varphi(x)$ zuordnet, wird auch mit $x \leftrightarrow \varphi(x)$ bezeichnet.

Es sei G eine geordnete Menge. Für die Elemente $t_1, t_2 \in G$ setzen wir $t_1 \equiv t_2$, wenn es solche Elemente $x_0, x_1, \ldots, x_n$ in G gibt, dass $t_1 = x_0$, $t_2 = x_n$ und die Elemente x_{i-1}, x_i für $i = 1, 2, \ldots, n$ vergleichbar sind. Die Relation $\equiv$ ist eine Äquivalenz, die eine Zerlegung in Klassen auf der Menge G definiert. Die Klassen dieser Zerlegung heissen *Komponenten* der Menge G.

Offenbar gilt

Satz 1. *Es seien K, G, G_1 endliche geordnete Mengen, es sei K eine Gegenkette. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(A) *Die Mengen K^G, K^{G_1} sind zueinander isomorph.*

(B) *Die Mengen G und G_1 haben dieselbe Zahl von Komponenten.*

Lemma 1. *Es seien A, B geordnete Mengen, $M \subseteq A^B$. Dann sind folgende Behauptungen richtig:*

(A) *Ist $x_0(t) = \sup_A \{x(t) \mid x \in M\}$ für jedes $t \in B$, so ist $x_0 \in A^B$ und $x_0 = \sup_{A^B} M$.*

(B) *Ist A ein Vereinigungshalbverband und gilt $x_0 = \sup_{A^B} M$, so ist $x_0(t) = \sup_A \{x(t) \mid x \in M\}$ für jedes $t \in B$.*

(C) *Hat A das grösste Element 1 und gilt $x_0 = \sup_{A^B} M$, so ist $x_0(t) = \sup_A \{x(t) \mid x \in M\}$ für jedes $t \in B$.*

Beweis. I. Es sei $x_0(t) = \sup_A \{x(t) \mid x \in M\}$ für jedes $t \in B$. Aus $t_1, t_2 \in B$, $t_1 < t_2$ folgt $x(t_1) \leqq x(t_2)$ für jedes $x \in M$ und daher $x_0(t_1) \leqq x_0(t_2)$, d. h. x_0 ist ein Element von A^B. Ferner gilt $x_0 \geqq x$ für jedes $x \in M$. Es sei $y \in A^B$ ein beliebiges Element in A^B mit der Eigenschaft $y \geqq x$ für jedes $x \in M$. Dann gilt $y(t_0) \geqq x(t_0)$ für jedes $t_0 \in B$ und $x \in M$ und daher $y(t_0) \geqq x_0(t_0)$. Daraus folgt $y \geqq x_0$; also gilt $x_0 = \sup_{A^B} M$.

II. Es sei A ein Vereinigungshalbverband und es sei $x_0 = \sup_{A^B} M$. Es sei ferner $t_0 \in B$ ein beliebiges Element in B. Dann gilt $x_0(t_0) \geqq x(t_0)$ für jedes $x \in M$. Es sei $\alpha \in A$ ein beliebiges Element mit der Eigenschaft $\alpha \geqq x(t_0)$ für jedes $x \in M$. Wir setzen

$$y(t) = \begin{cases} \alpha & \text{für jedes } t \in B, t \leqq t_0 \\ x_0(t) \vee \alpha & \text{für jedes } t \in B, t \nleqq t_0. \end{cases}$$

Dann ist offenbar $y \in A^B$ und es gilt $y \geqq x$ für jedes $x \in M$, d. h. $y \geqq x_0$. Daraus folgt $\alpha = y(t_0) \geqq x_0(t_0)$ und daher $x_0(t_0) = \sup_A \{x(t_0) \mid x \in M\}$ für jedes $t_0 \in B$.

III. Es sei A eine geordnete Menge mit dem grössten Element 1 und es sei $x_0 = \sup_{A^B} M$. Es sei $t_0 \in B$ ein beliebiges Element in B. Es gilt

$x_0(t_0) \geqq x(t_0)$ für jedes $x \in M$. Es sei $\alpha \in A$ ein beliebiges Element mit der Eigenschaft $\alpha \geqq x(t_0)$ für jedes $x \in M$. Wir setzen

$$z(t) = \begin{cases} 1 \text{ für jedes } t \in B,\ t \nleqq t_0 \\ \alpha \text{ für jedes } t \in B,\ t \leqq t_0 . \end{cases}$$

Es ist offenbar $z \in A^B$, $z \geqq x$ für jedes $x \in M$, also $z \geqq x_0$. Daraus folgt $\alpha = z(t_0) \geqq x_0(t_0)$ und es gilt $x_0(t_0) = \sup_A \{x(t_0) \mid x \in M\}$.

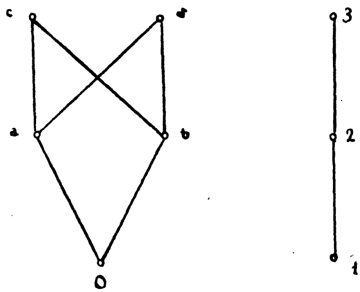
Bemerkung 1. Aus folgendem Beispiel geht hervor, dass die Behauptung (A) nicht umgekehrt werden kann.

Beispiel 1. Die Menge A ist kein Vereinigungshalbverband und hat auch kein grösstes Element.

Wir setzen

$y(3) = c$	$z(3) = c$	$x_0(3) = c$
$y(2) = a$	$z(2) = b$	$x_0(2) = c$
$y(1) = 0$	$z(1) = 0$	$x_0(1) = 0$

Es ist offenbar $x_0, y, z \in A^B$, ${}_0x = y \vee z$, jedoch $x_0(2) \neq y(2) \vee z(2)$, weil $y(2) \vee z(2) = a \vee b$ nicht existiert.



A B

Definition. Es sei G eine geordnete Menge, $A \subseteq G$ eine nicht leere Teilmenge von G. Die Menge A heisse *Ideal* in G, wenn sie die folgende Eigenschaft hat:

Aus $t_1 \in A$, $t_2 \in G$, $t_2 \leqq t_1$ folgt $t_2 \in A$.

Das Ideal A in G heisse *Hauptideal* in G, wenn ein Element $t_0 \in G$ mit der Eigenschaft $A = \{x \mid x \in G,\ x \leqq t_0\}$ existiert. In diesem Falle schreiben wir $A = \mathbf{A}(t_0)$.

Ist G eine geordnete Menge, so sei $\mathscr{H}(G)$ die Menge aller Hauptideale in G; die Menge $\mathscr{H}(G)$ ist durch Inklusion geordnet. Offenbar ist G zu der Menge $\mathscr{H}(G)$ isomorph.

Die Definition eines dualen Ideals in G ist zu der eben angeführten dual. Ein duales Ideal in der Menge G ist offenbar ein Ideal in der Menge $\breve{G}$.

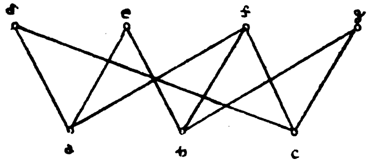
Ein duales Hauptideal in G mit dem kleinsten Element t_0 bezeichnen wir mit $\mathbf{E}(t_0)$, d. h. $\mathbf{E}(t_0) = \{t \mid t \in G,\ t \geqq t_0\}$. Offenbar ist $\breve{G}$ zu der Menge $\mathscr{H}(\breve{G})$ isomorph.

Definition. Es sei H eine geordnete Menge. Das Element $a \in H$ heisse *irreduzibel* in H, wenn a nicht das kleinste Element in H ist und wenn aus $a = x \vee y$ immer $a = x$ oder $a = y$ folgt. Mit $\mathcal{J}(H)$ bezeichnen wir die Menge aller irreduziblen Elemente in H.

Bemerkung 2. Existiert in einer endlichen geordneten Menge das kleinste Element O, so ist offenbar die Menge $\mathcal{J}(H)$ nicht leer, weil z. B. jedes Atom in H, d. h. ein oberer Nachbar von O, irreduzibel ist. Aus dem folgenden Beispiel geht folgendes hervor: Wenn H eine geordnete Menge und $x_0 \in \mathcal{J}(H)$ ein Element mit der Eigenschaft $x_0 = \sup_H L$ ist, wo $L \subseteq H$ eine endliche Menge ist, dann muss $x_0 \in L$ nicht sein.

Beispiel 2.

Das Element f der gegebenen Menge ist offenbar irreduzibel, jedoch $f = \sup \{a, b, c\}$



Lemma 2. *Es sei G eine endliche geordnete Menge, K eine endliche geordnete Menge mit dem kleinsten Element O, $x_0 \in K^G$ ein beliebiges irreduzibles Element in K^G. Dann gibt es ein solches in K irreduzibles Element $\alpha \in K$ und ein solches duales Hauptideal $E \subseteq G$ in G, dass*

$$x_0(t) = \begin{cases} \alpha \text{ für jedes } t \in E \\ O \text{ für jedes } t \in G - E \end{cases}$$

ist.

Beweis. Wir setzen $E = \{t \mid t \in G,\ x_0(t) > 0\}$, $A = \{x_0(t) \mid t \in E\}$. Da x_0 nicht das kleinste Element von K^G ist, ist E eine nicht leere Menge und daher auch A eine nicht leere Menge. Wir nehmen an, dass card $A > 1$ ist. Es sei $t_0 \in E$ ein beliebiges minimales Element von E. Wir setzen

$$y(t) = \begin{cases} x_0(t_0) & \text{für jedes } t \in G,\ t \geqq t_0 \\ O & \text{für jedes } t \in G,\ t \ngeqq t_0, \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{für jedes } t \in G,\ t \neq t_0 \\ O & \text{für jedes } t \in G,\ t = t_0. \end{cases}$$

Es ist offenbar $y \in K^G$, $z \in K^G$, $y \neq x_0 \neq z$ und für jedes $t \in G$ gilt $x_0(t) = y(t) - z(t)$. Nach Lemma 1 ist $x_0 = y \vee z$. Daher ist x_0 nicht irreduzibel, was ein Widerspruch ist. Also gibt es genau ein Element $\alpha \in K$ mit der Eigenschaft $A = \{\alpha\}$. Dieses Element $\alpha \in K$ ist offenbar irreduzibel.

Wir nehmen an, dass das duale Ideal $E \subseteq G$ nicht das duale Hauptideal in G ist. Dann gibt es in E minimale Elemente $m_1, m_2, \ldots, m_n$, $n \geqq 2$. Wir setzen

$$y(t) = \begin{cases} x_0(t) \text{ für jedes } t \in G, t \geqq m_1 \\ O \quad \text{ für jedes } t \in G, t \ngeqq m_1, \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} x_0(t) \text{ für jedes } t \in G, t \neq m_1 \\ O \quad \text{ für } t = m_1. \end{cases}$$

Es ist offenbar $y \in K^G$, $z \in K^G$, $y \neq x_0 \neq z$ und für jedes $t \in G$ es $x_0(t) = y(t) \vee z(t)$ gilt. Dann ist $x_0 = y \vee z$. Daher ist x_0 nicht irreduzibel, was ein Widerspruch ist. Also ist E ein duales Hauptideal in G.

Bezeichnung. Es sei H eine beliebige geordnete Menge. Es seien $x, y \in H$ beliebige Elemente in H. Wir setzen

$$(x \sqcup y) = \{t \mid t \in H, t \text{ minimal in } \mathbf{E}(x) \cap \mathbf{E}(y)\}.$$

Definition. Eine endliche geordnete Menge K heisse Menge mit der Eigenschaft (α), wenn zu zweien beliebigen Elementen $x, y \in K$ in K und zu beliebigen Elementen $a, b \in (x \sqcup y)$ ein Element $c \in K$ in K mit der Eigenschaft $c \geqq a$, $c \geqq b$ existiert.

Bemerkung 3. Jede endliche Kette, jeder endliche Vereinigungshalbverband, jede endliche geordnete Menge mit dem grössten Element und jede endliche Gegenkette hat die Eigenschaft (α).

Definition. Es sei K eine endliche geordnete Menge, $t_0 \in K$ ein Element in K. Das Element t_0 heisse Element mit der Eigenschaft (β), wenn aus $x, y \in K$, $t_0 \in (x \sqcup y)$ entweder die Beziehung $(x \sqcup y) = \{t_0\}$ oder die Existenz eines Elementes $t_1 \in (x \sqcup y)$, $t_1 \neq t_0$ mit der Eigenschaft $\mathbf{E}(t_0) \cap \mathbf{E}(t_1) \neq \emptyset$ folgt.

Bemerkung 4. Hat eine geordnete Menge K die Eigenschaft (α), so hat jedes Element in K die Eigenschaft (β).

Lemma 3. *Es sei K eine endliche geordnete Menge mit dem kleinsten Element O, $a_0 \in K$ ein von O verschiedenes Element mit der Eigenschaft* (β). *Es sei ferner G eine geordnete Menge, $E \subseteq G$ ein duales Ideal in G. Wir setzen*

$$x_0(t) = \begin{cases} a_0 \text{ für jedes } t \in E \\ O \text{ für jedes } t \in G - E \end{cases}$$

Es seien $y, z \in K^G$ beliebige Elemente mit der Eigenschaft $x_0 = y \vee z$. Dann gilt $x_0(t) = y(t) \vee z(t)$ für jedes $t \in G$.

Beweis. Es sei $t_0 \in G$ ein beliebiges Element. Ist $t_0 \in G - E$, so gilt es $O = x_0(t_0) = y(t_0) \vee z(t_0)$. Es sei also $t_0 \in E$. Es

$x_0(t_0) \geqq z(t_0)$. Es sei $\alpha \in K$ ein beliebiges Element mit der Eigenschaft $\alpha \geqq y(t_0)$, $\alpha \geqq z(t_0)$. Wir beweisen, dass $\alpha \geqq x_0(t_0)$ ist.

Wir nehmen zuerst an, dass $\alpha < x_0(t_0)$ ist. Wir setzen

$$x_1(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{für jedes } t \in E, t \nleqq t_0 \\ \alpha & \text{für jedes } t \in E, t \leqq t_0 \\ O & \text{für jedes } t \in G - E. \end{cases}$$

Es ist offenbar $x_1 \in K^G$, $x_1 \geqq y$, $x_1 \geqq z$, $x_1 < x_0$, was ein Widerspruch ist, da wir annehmen, dass $x_0 = y \vee z$ gilt. Daher gilt $x_0(t_0) = a_0 \in \in [y(t_0) \sqcup z(t_0)]$.

Wir nehmen jetzt an, dass $\alpha \parallel x_0(t_0)$ ist. Dann ist die Beziehung $\{x_0(t_0)\} = [y(t_0) \sqcup z(t_0)]$ nicht richtig. Da $x_0(t_0) = a_0$ die Eigenschaft (β) hat, gibt es ein Element $\gamma \in K$, $\gamma \neq x_0(t_0)$, $\gamma \in [y(t_0) \sqcup z(t_0)]$ mit der Eigenschaft, dass ein Element $\delta \in K$, $\delta \geqq x_0(t_0)$, $\delta \geqq \gamma$ existiert. Wir setzen

$$x_2(t) = \begin{cases} \delta & \text{für jedes } t \in E, t \nleqq t_0 \\ \gamma & \text{für jedes } t \in E, t \leqq t_0 \\ O & \text{für jedes } t \notin G - E. \end{cases}$$

Es ist offenbar $x_2 \in K^G$, $x_2 \geqq y$, $x_2 \geqq z$, $x_2 \parallel x_0$, was ein Widerspruch ist, da wir annehmen, dass $x_0 = y \vee z$ gilt.

Daher gilt $\alpha \geqq x_0(t_0)$; daraus folgt $x_0(t_0) = y(t_0) \vee z(t_0)$.

Bemerkung 5. Aus dem Beispiel 1 geht folgendes hervor: Wenn das Element a_0 die Eigenschaft (β) nicht hat, gilt die Behauptung von Lemma 3 im allgemeinen nicht. Gleichzeitig sehen wir, dass das Lemma 2 nicht umgekehrt werden kann.

Lemma 4. *Es sei K eine endliche geordnete Menge mit dem kleinsten Element O, $\alpha \in K$ ein beliebiges irreduzibles Element in K mit der Eigenschaft* (β). *Es sei ferner G eine endliche geordnete Menge, $E \subseteq G$ ein beliebiges duales Hauptideal in G. Wir setzen*

$$x_0(t) = \begin{cases} \alpha & \text{für jedes } t \in E \\ O & \text{für jedes } t \in G - E. \end{cases}$$

Dann ist die Abbildung x_0 ein irreduzibles Element in K^G.

Beweis. Wir nehmen an, dass x_0 ein irreduzibles Element in K^G nicht ist. Dann gibt es Elemente $y, z \in K^G$, $y \neq x_0 \neq z$ mit der Eigenschaft $x_0 = y \vee z$. Es gilt $y < x_0$, $z < x_0$. Dann gibt es solche Elemente $t_1, t_2 \in E$, dass $y(t_1) < \alpha$, $z(t_2) < \alpha$ gilt. Es sei $t_0 \in E$ das kleinste Element in E. Es ist $t_0 \leqq t_1$, $t_0 \leqq t_2$ und daher gilt $y(t_0) < \alpha$, $z(t_0) < \alpha$. Wir setzen voraus, dass $x_0 = y \vee z$ ist. Nach Lemma 3 gilt $x_0(t_0) = \alpha =$

$= y(t_0) \vee z(t_0)$, was ein Widerspruch ist, da α ein irreduzibles Element ist. Das Element x_0 ist daher irreduzibel.

Lemma 5. *Es sei G eine endliche geordnete Menge, K eine endliche geordnete Menge mit dem kleinsten Element O. Es sei $\alpha \in K$ ein in K irreduzibles Element, welches nicht die Eigenschaft* (β) *hat, $E \subseteq G$ ein duales Hauptideal in G. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(A) *Es gibt ein Element $t_0 \in G$ in G mit der Eigenschaft $E = \{t_0\}$.*

(B) *Die Abbildung*

$$x_0(t) = \begin{cases} \alpha \text{ für jedes } t \in E \\ O \text{ für jedes } t \in G - E \end{cases}$$

ist ein irreduzibles Element in K^G.

Beweis. I. Es sei (A) in Kraft. Wir nehmen an, dass x_0 nicht irreduzibel ist. Dann gibt es Elemente $y, z \in K^G$, $y \neq x_0 \neq z$ mit der Eigenschaft $x_0 = y \vee z$. Es gilt $y < x_0$, $z < x_0$, d. h. $y(t_0) < \alpha$, $z(t_0) < \alpha$. Es ist offenbar $\alpha \in [y(t_0) \sqcup z(t_0)]$. Da α ein irreduzibles Element ist, kann es nicht $\{\alpha\} = [y(t_0) \sqcup z(t_0)]$ sein. Dann gibt es ein Element $\beta \in [y(t_0) \sqcup z(t_0)]$, $\beta \parallel \alpha$. Wir setzen

$$x_1(t) = \begin{cases} \beta \text{ für } t = t_0 \\ O \text{ für jedes } t \in G,\ t \neq t_0. \end{cases}$$

Es ist offenbar $x_1 \in K^G$, $x_1 \geqq y$, $x_1 \geqq z$, $x_1 \parallel x_0$, was ein Widerspruch ist, da $x_0 = y \vee z$ gilt. Also ist (B) in Kraft.

II. Es sei (B) in Kraft. Es sei card $E > 1$. Es sei t_1 das kleinste Element in E. Dann gibt es ein Element $t_2 \in E$ mit der Eigenschaft $t_2 > t_1$. Da α nicht die Eigenschaft (β) hat, gibt es solche Elemente $a, b \in K$, dass $\alpha \in (a \sqcup b)$, $\{\alpha\} \neq (a \sqcup b)$ gilt und für jedes $\beta \in K$ mit der Eigenschaft $\beta \in (a \sqcup b)$, $\beta \neq \alpha$ die Beziehung $\mathbf{E}(\alpha) \cap \mathbf{E}(\beta) = \emptyset$ richtig ist. Wir setzen

$$y(t) = \begin{cases} \alpha \text{ für jedes } t \in G,\ t > t_1 \\ a \text{ für } t = t_1 \\ O \text{ für jedes } t \in G,\ t \ngeq t_1, \end{cases} \qquad z(t) = \begin{cases} \alpha \text{ für jedes } t \in G,\ t > t_1 \\ b \text{ für } t = t_1 \\ O \text{ für jedes } t \in G,\ t \ngeq t_1. \end{cases}$$

Es ist offenbar $y \in K^G$, $z \in K^G$, $x_0 = y \vee z$, $y \neq x_0 \neq z$ und daher ist x_0 nicht irreduzibel in K^G, was ein Widerspruch ist. Also ist (A) in Kraft.

Das Lemma ist damit bewiesen.

Satz 2. *Es sei G eine endliche geordnete Menge, K eine endliche geordnete Menge mit dem kleinsten Element O. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(A) *Das Element $x_0 \in K^G$ ist irreduzibel in K^G.*

(B) *Es ist*

$$x_0(t) = \begin{cases} \alpha \text{ für jedes } t \in E \\ O \text{ für jedes } t \in G - E, \end{cases}$$

wo entweder α ein in K irreduzibles Element mit der Eigenschaft (β) *und E ein duales Hauptideal in G ist, oder α ein in K irreduzibles Element ohne die Eigenschaft* (β) *ist und ein solches Element t_0 in G existiert, dass $E = \{t_0\}$ gilt.*

Beweis. I. Es sei (A) in Kraft. Die Behauptung (B) folgt aus Lemma 2, 4, 5.

II. Es sei (B) in Kraft. Die Behauptung (A) folgt aus Lemma 4, 5.

Korollar 1. *Es sei G eine endliche geordnete Menge, K eine solche endliche geordnete Menge mit dem kleinsten Element O, dass jedes irreduzible Element in K die Eigenschaft* (β) *hat. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(A) *Das Element $x_0 \in K^G$ ist irreduzibel in K^G.*

(B) *Es gibt ein solches irreduzibles Element $\alpha \in K$ und ein solches duales Hauptideal $E \subseteq G$, dass*

$$x_0(t) = \begin{cases} \alpha \text{ für jedes } t \in E \\ O \text{ für jedes } t \in G - E \end{cases}$$

ist.

Korollar 2. *Es sei G eine endliche geordnete Menge, K eine solche endliche geordnete Menge mit dem kleinsten Element O, dass jedes irreduzible Element in K die Eigenschaft* (β) *hat. Dann gilt es $\mathscr{I}(K^G) \cong \cong \mathscr{I}(K) \,.\, \mathscr{H}(\breve{G})$.*

Beweis. Es sei $x_0 \in K^G$ ein beliebiges irreduzibles Element in K^G, d. h. $x_0 \in \mathscr{I}(K^G)$. Nach Korollar 1 gilt

$$x_0(t) = \begin{cases} \alpha \text{ für jedes } t \in E \\ O \text{ für jedes } t \in G - E, \end{cases}$$

wo $\alpha \in \mathscr{I}(K)$ und $E \in \mathscr{H}(\breve{G})$. Die eineindeutige Abbildung $x_0 \longleftrightarrow [\alpha, E]$ ist offenbar ein Isomorphismus der Menge $\mathscr{I}(K^G)$ auf das Kardinalprodukt $\mathscr{I}(K)\mathscr{H}(\breve{G})$.

Satz 3. *Es seien G, G_1 endliche geordnete Mengen, K eine solche endliche geordnete Menge mit dem kleinsten Element O, dass jedes irreduzible Element in K die Eigenschaft* (β) *hat. Sind die Mengen K^G, K^{G_1} zueinander isomorph, so sind auch die Mengen G, G_1 zueinander isomorph.*

Beweis. Sind die Mengen K^G, K^{G_1} zueinander isomorph, so sind auch die Mengen $\mathscr{I}(K^G)$, $\mathscr{I}(K^{G_1})$ zueinander isomorph, d. h. $\mathscr{I}(K^G) \cong \mathscr{I}(K^{G_1})$.

Nach Korollar 2 gilt es $\mathscr{I}(K)\,\mathscr{H}(\breve{G}) \cong \mathscr{I}(K)\,\mathscr{H}(\breve{G}_1)$. Die Menge $\mathscr{I}(K)$ ist eine endliche geordnete Menge und nach Bemerkung 2 $\mathscr{I}(K)$ ist eine nicht leere Menge. Daher gilt $\mathscr{H}(\breve{G}) \cong \mathscr{H}(\breve{G}_1)$ (vgl. [5], Satz 4.6), d. h. $\breve{G} \cong \breve{G}_1$ und also $G \cong G_1$.

Bemerkung 6. Aus Satz 3 und Bemerkung 3, 4 folgt: *Es seien G, G_1 endliche geordnete Mengen, K eine endliche Kette, ein endlicher Verband oder eine endliche geordnete Menge mit dem kleinsten und grössten Element. Sind die Mengen K^G, K^{G_1} zueinander isomorph, so sind auch die Mengen G, G_1 zueinander isomorph.*

Lemma 6. *Es sei G eine endliche geordnete Menge, K eine endliche geordnete Menge mit dem kleinsten Element O. Es sei $x_0 \in K^G$,*

$$x_0(t) = \begin{cases} \alpha \text{ für jedes } t \in E \\ O \text{ für jedes } t \in G - E, \end{cases}$$

wo α ein irreduzibles Element in K und E ein duales Hauptideal in G ist, ein irreduzibles Element in K^G. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:

(A) *Das Element α hat die Eigenschaft* (β).

(B) *Das Element x_0 hat die Eigenschaft* (β).

Beweis. I. Es sei (A) in Kraft. Wir zeigen, dass das Element x_0 die Eigenschaft (β) hat. Es seien $y, z \in K^G$ beliebige Elemente mit der Eigenschaft $x_0 \in (y \sqcup z)$. Gilt $y = x_0$ oder $z = x_0$, so ist $\{x_0\} = (y \sqcup z)$ und es gibt nichts zu beweisen. Es sei daher $y \neq x_0 \neq z$. Es ist $y < x_0$, $z < x_0$ und offenbar $x_0(t_0) = \alpha \in [y(t_0) \sqcup z(t_0)]$. Da α irreduzibel ist, so gilt $\{\alpha\} \neq [y(t_0) \sqcup z(t_0)]$. Das Element α hat die Eigenschaft (β). Daraus folgt, dass es solche Elemente γ, δ gibt, dass $\gamma \neq \alpha$, $\gamma \in [y(t_0) \sqcup z(t_0)]$, $\delta \in K$, $\delta \geqq \alpha$, $\delta \geqq \gamma$ gilt. Wir setzen $E_\gamma = \{t \mid t \in E,\ y(t) \leqq \gamma,\ z(t) \leqq \gamma\}$. Es ist offenbar $E_\gamma \neq \emptyset$, weil z. B. $t_0 \in E_\gamma$ ist. Dabei ist E_γ ein Ideal in E. Wir setzen

$$x_1(t) = \begin{cases} \delta \text{ für jedes } t \in E - E_\gamma \\ \gamma \text{ für jedes } t \in E_\gamma \\ O \text{ für jedes } t \in G - E. \end{cases}$$

Es ist offenbar $x_1 \in K^G$, $x_1 \geqq y$, $x_1 \geqq z$, $x_1 \parallel x_0$. Es sei $x_2 \in (y \sqcup z)$ ein beliebiges Element mit der Eigenschaft $x_2 \leqq x_1$. Wir setzen

$$x_3(t) = \begin{cases} \delta \text{ für jedes } t \in E \\ O \text{ für jedes } t \in G - E. \end{cases}$$

Es ist offenbar $x_3 \in K^G$, $x_3 \geqq x_1 \geqq x_2$, $x_3 \geqq x_0$, d. h. das Element x_0 hat die Eigenschaft (β).

II. Wir setzen voraus, dass das Element α die Eigenschaft (β) nicht hat. Dann gibt es Elemente $a, b \in K$ mit der Eigenschaft $\alpha \in (a \sqcup b)$, $\{\alpha\} \neq (a \sqcup b)$ und aus $\beta \neq \alpha$, $\beta \in (a \sqcup b)$ folgt immer $\mathbf{E}(\alpha) \cap \mathbf{E}(\beta) = \emptyset$. Da x_0 irreduzibel ist, so folgt aus dem Satz 2 $E = \{t_0\}$. Wir setzen

$$y(t) = \begin{cases} a \text{ für jedes } t \in E \\ O \text{ für jedes } t \in G - E, \end{cases} \qquad z(t) = \begin{cases} b \text{ für jedes } t \in E \\ O \text{ für jedes } t \in G - E. \end{cases}$$

Es ist $y, z \in K^G$, $x_0 = (y \sqcup z)$, $y \neq x_0 \neq z$. Da x_0 irreduzibel ist, so gilt $\{x_0\} \neq (y \sqcup z)$. Es sei $x_1 \neq x_0$ ein beliebiges Element mit der Eigenschaft $x_1 \in (y \sqcup z)$. Dann ist $x_0(t_0) = \alpha \neq x_1(t_0)$ und $x_1(t_0) \in (a \sqcup b)$. Wir nehmen an, dass es ein Element $x_2 \in K^G$ mit der Eigenschaft $x_2 \geqq x_0$, $x_2 \geqq x_1$ gibt. Dann gilt $x_2(t_0) \geqq x_0(t_0)$, $x_2(t_0) \geqq x_1(t_0)$, was ein Widerspruch ist, da $[x_0(t_0) \sqcup x_1(t_0)] = \emptyset$ gilt. Daher gilt $\mathbf{E}(x_0) \cap \mathbf{E}(x_1) = \emptyset$, d. h. das Element x_0 hat nicht die Eigenschaft (β). Das Lemma ist damit bewiesen.

Aus Satz 2 und Lemma 6 folgt

Satz 4. *Es sei G eine endliche geordnete Menge, K eine endliche geordnete Menge mit dem kleinsten Element O. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(A) *Das Element $x_0 \in K^G$ ist irreduzibel und hat die Eigenschaft* (β).

(B) *Es gibt ein irreduzibles Element $\alpha \in K$ mit der Eigenschaft* (β) *und ein duales Hauptideal $E \subseteq G$ in G, dass*

$$x_0(t) = \begin{cases} \alpha \text{ für jedes } t \in E \\ O \text{ für jedes } t \in G - E \end{cases}$$

ist.

Bemerkung 7. Es sei H eine geordnete Menge. Mit $\mathscr{I}_\beta(H)$ bezeichnen wir die Menge aller irreduziblen Elemente in H mit der Eigenschaft (β). Existiert in einer endlichen geordneten Menge H das kleinste Element, so ist offenbar die Menge $\mathscr{I}_\beta(H)$ nicht leer, weil z. B. jedes Atom in H ein irreduzibles Element mit der Eigenschaft (β) ist.

Korollar 3. *Es sei G eine endliche geordnete Menge, K eine endliche geordnete Menge mit dem kleinsten Element O. Dann sind die Mengen* $\mathscr{I}_\beta(K^G)$ und $\mathscr{I}_\beta(K) \,.\, \mathscr{H}(\breve{G})$ zueinander isomorph.

Beweis. Es sei $x_0 \in \mathscr{I}_\beta(K^G)$ ein beliebiges irreduzibles Element mit der Eigenschaft (β). Nach Satz 3 gibt es solches $\alpha \in \mathscr{I}_\beta(K)$ und $E \in \mathscr{H}(\breve{G})$, dass

$$x_0(t) = \begin{cases} \alpha \text{ für jedes } t \in E \\ O \text{ für jedes } t \in G - E \end{cases}$$

ist. Die Abbildung $x_0 \longleftrightarrow [\alpha, E]$ ist offenbar ein Isomorphismus der Menge $\mathscr{I}_\beta(K^G)$ auf das Kardinalprodukt $\mathscr{I}_\beta(K) \,.\, \mathscr{H}(\breve{G})$.

Satz 5. *Es sei K eine endliche geordnete Menge mit einem kleinsten Element, welche mindestens zwei Elemente hat. Es seien ferner G, G_1 endliche geordnete Mengen. Sind die Mengen K^G, K^{G_1} zueinander isomorph, so sind auch die Mengen G, G_1 zueinander isomorph.*

Beweis. Sind die Mengen K^G, K^{G_1} zueinander isomorph, so sind auch die Mengen $\mathscr{I}_\beta(K^G)$, $\mathscr{I}_\beta(K^{G_1})$ zueinander isomorph. Aus Korollar 3 folgt $\mathscr{I}_\beta(K) . \mathscr{H}(\breve{G}) \cong \mathscr{I}_\beta(K) . \mathscr{H}(\breve{G}_1)$. Die Menge $\mathscr{I}_\beta(K)$ ist eine endliche Menge und nach Bemerkung 7 ist $\mathscr{I}_\beta(K)$ nicht leer. Nach [5], Satz 4.6, ist $\mathscr{H}(\breve{G}) \cong \mathscr{H}(\breve{G}_1)$. Daraus folgt $\breve{G} \cong \breve{G}_1$ und daher gilt $G \cong G_1$.

LITERATUR

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, rev. ed., New York, 1948.

[2] G. Szász, *Einführung in die Verbandstheorie*, Budapest, 1962.

[3] C. C. Chang, *Cardinal and ordinal multiplication of relation types*. Proceedings of Symposia in pure Mathematics, vol. II, 1961, 123—128.

[4] M. Novotný, *Über gewisse Eigenschaften von Kardinaloperationen*. Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, No. 418 (1960), 465—484.

[5] M. Novotný, *Über Kardinalprodukte*. Zeitschritt f. math. Logik und Grundlagen d. Matd. Bd. 9, (1963), 13—20.

[6] M. Benado, *Les ensembles partiellement ordonnés et le theorème de raffinement de Schreier*, II., Čechosl. mat. ž., 5 (80), 308—344.