Micheline Froda-Schechter

Préordres et équivalences dans l'ensemble des familles d'un ensemble

Archivum Mathematicum, Vol. 1 (1965), No. 1, 39--56

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104579`

PRÉORDRES ET ÉQUIVALENCES DANS L'ENSEMBLE DES FAMILLES D'UN ENSEMBLE

PAR MICHELINE FRODA-SCHECHTER, CLUJ.

Présenté le 7 Juillet 1964

Des familles d'ensembles interviennent dans divers chapitres des mathématiques. Leurs propriétés sont fréquemment utilisées sans être mises en évidence, mais l'emploi de certaines relations et opérations entre familles d'ensembles peut simplifier l'exposé dans certains domaines. Par exemple les ouvrages récents de topologie de C. **Berge** [3] et A. Czàszar [4] s'en servent déjà partiellement. D'autres exemples (la théorie des filtres, etc) ont déjà été exposés dans des ouvrages antérieurs ([1] et [2]) où ces définitions ont été présentées.

En ce qui suit on entreprend une étude approfondie des propriétés de ces relations et opérations. Les relations d'inclusion par éléments (D1 et D2) sont des préordres. Une dualité entre ces relations apparaît si l'on définit le complément par éléménts (D3). Les équvalences (D4 et D5) qu'on obtient de ces préordres conduisent à deux partitions duales de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ (§ 2). Chaque classe possède un maximum et l'on étudie les conditions dans lesquelles elle admet aussi un minimum (§ 3). L'ensemble des classes est partiellement ordonné par l'image du préordre respectif (D10 et D11) et constitue un treillis complet et distributif (§ 5). Ces derniers résultats utilisent les opérations de réunion et d'intersection par éléments (D8 et D9) et leurs propriétés (§ 4).

§ 1.

Soient E un ensemble donné quelconque et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Nous désignerons par famille de parties de E, un sous-ensemble $\mathscr{L} = \{L, L', L'', \ldots\}$ de $\mathscr{P}(E)$. A l'aide de ces notations on peut définir les deux relations suivantes

$$\mathscr{L}_1 \underset{e}{\subset} \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow \underset{L_2 \in \mathscr{L}_2}{\forall} \ \underset{L_1 \in \mathscr{L}_1}{\exists} \ L_1 \subseteq L_2 \tag{D1}$$

$$\mathscr{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow \underset{L_1 \in \mathscr{L}_1}{\forall} \ \underset{L_2 \in \mathscr{L}_2}{\exists} \ L_1 \subseteq L_2 \text{ [1])} \tag{D2}$$

qui se liront $\mathscr{L}_1$ est *inclus inférieurement (supérieurement) par éléments*

---

[1]) Si $\Phi_{\mathscr{P}}$ désigne la partie vide de $\mathscr{P}(E)$ c'est-àdire un élément de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ qu'on ne doit pas confondre avec la partie vide de E, l'ensemble vide Φ, élément

en $\mathscr{L}_2$, ou pour abréger, *inclus e-inférieur (e-supérieur)*. Les relations $\underset{e}{\subset}$ et $\overset{e}{\subset}$ se nommeront *inclusions e-inférieur* et *e-supérieur*.

Exemple 1. On sait que la topologie $\mathscr{T}_1$ sur un ensemble E est plus fine que la topologie $\mathscr{T}_2$ sur le même ensemble si quel que soit $x \in E$ l'on a $\mathscr{V}_1(x) \underset{e}{\subset} \mathscr{V}_2(x)$, $\mathscr{V}_i(x)$ désignant un système fondamental de voisinages de x dans $\mathscr{T}_i$.

On a donné ailleurs, [2], un procédé de construction de relations désignées par $\mathscr{R}_{ik}$ dans l'ensemble des parties de E à partir d'une relation $\mathscr{R}$ entre les éléments de E. En particulier l'on y a défini les relations $\mathscr{R}''_{01}$ et $\mathscr{R}'_{01}$

$$(E_1, E_2) \in \mathscr{R}'_{01} \Leftrightarrow \underset{e_2 \in E_2}{\forall} \ \underset{e_1 \in E_1}{\exists} \ (e_1, e_2) \in \mathscr{R}$$

$$(E_1, E_2) \in \mathscr{R}'_{01} \Leftrightarrow \underset{e_1 \in E_1}{\forall} \ \underset{e_2 \in E_2}{\exists} \ (e_1, e_2) \in \mathscr{R}$$

On y a montré aussi (§ 4) que si $\mathscr{R}$ est un préordre c'est à dire nne relation reflexive et transitive, $\mathscr{R}''_{01}$ et $\mathscr{R}'_{01}$ sont aussi des préordres. Les relations $\underset{e}{\subset}$ et $\overset{e}{\subset}$ sont les relations $\subseteq''_{01}$ et $\subseteq'_{01}$ de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$, obtenues à partir de la relation $\subseteq$ d'inclusion entre parties de E. L'inclusion étant une relation d'ordre[2]), on peut conclure.

(1.1) *Les relations* $\underset{e}{\subset}$ et $\overset{e}{\subset}$ *sont des préordres*, elles sont réflexives.

(1.2) $$\mathscr{L} \underset{e}{\subset} \mathscr{L}, \qquad \mathscr{L} \overset{e}{\subset} \mathscr{L}$$

et transitives

(1.3) $$\mathscr{L}_1 \underset{e}{\subset} \mathscr{L}_2, \ \mathscr{L}_2 \underset{e}{\subset} \mathscr{L}_3 \Rightarrow \mathscr{L}_1 \underset{e}{\subset} \mathscr{L}_3$$
$$\mathscr{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_2, \ \mathscr{L}_2 \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_3 \Rightarrow \mathscr{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_3.$$

Ces propriétés peuvent aussi se démontrer sans difficulté à partir des définitions.

La comparaison des inclusions par éléments à l'inclusion $\subseteq$ entre familles de parties conduit à remarquer que les premières sont des conséquences de la seconde, de la manière suivante

(1.4) $$\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_1 \Rightarrow \mathscr{L}_2 \underset{e}{\subset} \mathscr{L}_1$$

(1.5) $$\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_2 \Rightarrow \mathscr{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_2$$

---

de $\mathscr{P}(E)$, on a quel que soit la famille $\mathscr{L} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$.

$$\mathscr{L} \underset{e}{\subset} \Phi_{\mathscr{P}} \quad \text{et} \quad \Phi_{\mathscr{P}} \overset{e}{\subset} \mathscr{L}$$

convenant comme d'habitude (voir par exemple Kleene [6]), qu'une propriété arbitraire a lieu pour tout ensemble de la famille vide, mais qu'il est faux d'afifrmer l'existence d'un ensemble de $\Phi_{\mathscr{P}}$ qui satisfasse à une propriété quelconque.

[2]) L'antisymétrie ne se transmet pas de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}''_{01}$ et $\mathscr{R}'_{01}$.

On peut mettre en évidence une dualité entre les propriétés des inclusions e-inférieur et e-supérieur en introduisant la notion de *complément par éléments* ou *complément-e* d'une famille de parties

$$\text{(D3)} \qquad \overset{e}{\complement}\mathscr{L} = \{\complement L \in \mathscr{P}(E) / L \in \mathscr{L}\}, \qquad \mathscr{L} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E)).$$

(1.6) *L'application* $\overset{e}{\complement}$ *de* $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ *sur lui même qui fait correspondre à chaque famille de parties* $\mathscr{L}$ *son complément-e* $\overset{e}{\complement}\mathscr{L}$ *est biunivoque, idempotente, conserve l'inclusion des familles et transforme les inclusions par éléments*, c'est-à-dire on a

$$\text{(1.7)} \qquad \overset{e}{\complement}\overset{e}{\complement}\mathscr{L} = \mathscr{L}$$

car $L \in \overset{e}{\complement}\overset{e}{\complement}\mathscr{L} \Leftrightarrow \complement L \in \overset{e}{\complement}\mathscr{L} \Leftrightarrow \complement\complement L = L \in \mathscr{L}$

$$\text{(1.8)} \qquad \mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow \overset{e}{\complement}\mathscr{L}_1 \subseteq \overset{e}{\complement}\mathscr{L}_2$$

car $L \in \overset{e}{\complement}\mathscr{L}_1 \Leftrightarrow \complement L \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow \complement L \in \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow L \in \overset{e}{\complement}\mathscr{L}_2$

$$\text{(1.9)} \qquad \mathscr{L}_1 \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow \overset{e}{\complement}\mathscr{L}_2 \overset{e}{\subset} \overset{e}{\complement}\mathscr{L}_1$$

$$\text{(1.10)} \qquad \mathscr{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow \overset{e}{\complement}\mathscr{L}_2 \underset{e}{\subsetneq} \overset{e}{\complement}\mathscr{L}_1.$$

Les deux dernières relations sont équivalentes, selon (1.7), et

$$\mathscr{L}_1 \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow \forall_{L_2 \in \mathscr{L}_2} \exists_{L_1 \in \mathscr{L}_1} L_1 \subseteq L_2 \Leftrightarrow \forall_{\complement L_2 \in \overset{e}{\complement}\mathscr{L}_2} \exists_{\complement L_1 \in \overset{e}{\complement}\mathscr{L}_1} \complement L_2 \subseteq \complement L_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overset{e}{\complement}\mathscr{L}_2 \overset{e}{\subset} \overset{e}{\complement}\mathscr{L}_1.$$

(1.11) Corollaire. *Tout théorème* $T_e[\mathscr{L}, \underset{e}{\subsetneq}, \subseteq]$ *où l'inclusion* $\subseteq$ *se rapporte aux familles de E, admet son théorème dual* $T^e[\overset{e}{\complement}\mathscr{L}, \overset{e}{\supset}, \subseteq]$.

Voici quelques autres propriétés du complément-e. Signalons d'abord la permutabilité des deux compléments

$$\text{(1.12)} \qquad \overset{e}{\complement}\complement\mathscr{L} = \complement\overset{e}{\complement}\mathscr{L}$$

car $L \in \overset{e}{\complement}\complement\mathscr{L} \Leftrightarrow \complement L \in \complement\mathscr{L} \Leftrightarrow \complement L \in \mathscr{L} \Leftrightarrow L \in \overset{e}{\complement}\mathscr{L} \Leftrightarrow L \in \complement\overset{e}{\complement}\mathscr{L}$.

L'opérateur $\overset{e}{\complement}$ est complèment distributif par rapport à la réunion et l'instersection

$$\text{(1.13)} \qquad \overset{e}{\complement}\bigcup_{\iota \in I}\mathscr{L}_\iota = \bigcup_{\iota \in I}\overset{e}{\complement}\mathscr{L}_\iota, \qquad \overset{e}{\complement}\bigcap_{\iota \in I}\mathscr{L}_\iota = \bigcap_{\iota \in I}\overset{e}{\complement}\mathscr{L}_\iota.$$

En effet $L \in \overset{e}{\complement} \bigcup \mathcal{L}_\iota \Leftrightarrow \complement L \in \bigcup \mathcal{L}_\iota \Leftrightarrow \underset{\iota \in I}{\exists} \complement L \in \mathcal{L}_\iota \Leftrightarrow \underset{\iota \in I}{\exists} L \in \overset{e}{\complement} \mathcal{L}_\iota \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L \in \bigcup_{\iota \in I} \overset{e}{\complement} \mathcal{L}_\iota$ et de même pour l'intersection.

Enfin il est évident que

$$\text{(1.14)} \qquad \begin{array}{lll} \mathcal{L} \underset{e}{\subsetneq} \mathcal{L}' & \text{et} & \mathcal{M} \underset{e}{\subsetneq} \mathcal{M}' \Rightarrow \mathcal{L} \cup \mathcal{M} \underset{e}{\subsetneq} \mathcal{L}' \cup \mathcal{M}' \\ \mathcal{L} \overset{e}{\subseteq} \mathcal{L}' & \text{et} & \mathcal{M} \overset{e}{\subseteq} \mathcal{M}' \Rightarrow \mathcal{L} \cup \mathcal{M} \overset{e}{\subseteq} \mathcal{L}' \cup \mathcal{M}'. \end{array}$$

mais il n'y a pas de propriété analogue relative à l'intersection.

§ 2.

Les équivalences définies à partir des préordres $\underset{e}{\subsetneq}$ et $\overset{e}{\subseteq}$ (cf. [1] et [5]) seront désignées

$$\text{(D.4)} \qquad \mathcal{L}_1 \underset{e}{=} \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 \underset{e}{\subsetneq} \mathcal{L}_2 \;\&\; \mathcal{L}_2 \underset{e}{\subsetneq} \mathcal{L}_1$$

$$\text{(D.5)} \qquad \mathcal{L}_1 \overset{e}{=} \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 \overset{e}{\subseteq} \mathcal{L}_2 \;\&\; \mathcal{L}_2 \overset{e}{\subseteq} \mathcal{L}_1$$

on les appellera *équivalences e-inférieur, respectivement e-supérieur*.

En effet ce sont des relations réflexives et transitives comme les préordres dont elles proviennent et elles sont symétriques par définition.

Mentionnons les propriétés suivantes qui sont des conséquences immédiates des propriétés des préordres correspondants

$$\text{(2.1)} \qquad \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \underset{e}{=} \mathcal{L}_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_1 \overset{e}{=} \mathcal{L}_2$$

$$\text{(2.2)} \qquad \mathcal{L}_1 \underset{e}{=} \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \overset{e}{\complement} \mathcal{L}_1 \overset{e}{=} \overset{e}{\complement} \mathcal{L}_2$$

ou aussi

$$\mathcal{L}_1 \overset{e}{=} \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \overset{e}{\complement} \mathcal{L}_1 \underset{e}{=} \overset{e}{\complement} \mathcal{L}_2.$$

Considérons les classes d'équivalence e-inférieur et e-supérieur qui contiennent la famille de parties $\mathcal{L}$

$$\text{(D.6)} \qquad \mathfrak{K}_e(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) / \mathcal{L}^* \underset{e}{=} \mathcal{L}\}$$

$$\text{(D.7)} \qquad \mathfrak{K}^e(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) / \mathcal{L}^* \overset{e}{=} \mathcal{L}\}$$

qu'on désigne par *classes e-inférieur* respectivement *e-supérieur*. $\mathcal{L}$ est un *représentant* quelconque de la classe. Les classes sont donc des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$.

Voici d'abord quelques exemples.

Exemple 2. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble de parties $\{L\}$ contenant une seule partie $L \in \mathcal{P}(E)$. La classe $\mathfrak{K}_e(\mathcal{L})$ est constituée par toutes les familles $\mathcal{L}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ contenant L et dont les éléments incluent L. $\mathfrak{K}^e(\mathcal{L})$

se compose de toutes les familles contenant L et dont les éléments $L^* \in \mathscr{L}^*$ sont inclus dans L.

Exemple 3. Soit $\mathscr{T}$ une topologie sur E donnée par $\mathscr{V}(x)$ système fondamental des voisinages de chaque point $x \in E$. Pour chaque point x, $\mathscr{V}(x) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$, détermine la classe $\mathfrak{K}_e(\mathscr{V}(x))$ de tous les systèmes fondamentaux engendrant le même filtre des voisinages de x, définissant la topologie $\mathscr{T}$.

Un ensemble E étant donné, l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ des familles de parties de E peut se décomposer en classes d'équivalence des deux manières ci-dessus et l'on a le résultat suivant:

(2.3) Théorème. *L'application* $\overset{e}{\complement}$ *de* $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ *sur lui-même fait correspondre à chaque classe e-inférieur,* $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ *(e-supérieur,* $\mathfrak{K}^e(\mathscr{L})$*) une classe e-supérieur (e-inférieur), à savoir, la classe engendrée par* $\overset{e}{\complement}\mathscr{L}$ *que nous appellerons sa classe duale.*

En effet si $\mathscr{L}^* \in \mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ il résulte selon (2.2) $\overset{e}{\complement}\mathscr{L}^* \in \mathfrak{K}^e(\overset{e}{\complement}\mathscr{L})$ et de même $\mathscr{L}' \in \mathfrak{K}^e(\mathscr{L})$ implique $\overset{e}{\complement}\mathscr{L}' \in \mathfrak{K}_e(\overset{e}{\complement}\mathscr{L})$.

Ce résultat permet de compléter la règle de dualité (1.11) par le

(2.4) Corollaire. *A chaque théorème* $\mathrm{T}_e[\mathscr{L}_1, \underset{e}{\subsetneq}, \subseteq, \mathfrak{K}_e(\mathscr{L})]$ *correspond son théorème dual* $\mathrm{T}^e[\overset{e}{\complement}\mathscr{L}, \underset{e}{\supsetneq}, \subseteq, \mathfrak{K}^e(\overset{e}{\complement}\mathscr{L})]$.

Exemple 4. Soit $E = \{a, b\}$. Alors $\mathscr{P}(E) = \{\Phi, A, B, E\}$ où $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. L'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ contient 16 familles de parties de E qui peuvent se répartir en six classes e-supérieur de la manière indiquée sur le tableau suivant[3]):

[3]) Les classes duales se trouvent sur la même ligne, les familles de parties ayant la même position sur le tableau sont duales et leurs éléments correspondants complémentaires.

	Classes $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$	Classes $\mathfrak{K}^e(\overset{e}{\complement}\mathscr{L})$
I	$\Phi_{\mathscr{P}}$	$\Phi_{\mathscr{P}}$
II	$\{E\}$	$\{\Phi\}$
III	$\{A\}, \{A, E\}$	$\{B\}, \{B, \Phi\}$
IV	$\{B\}, \{B, E\}$	$\{A\}, \{A, \Phi\}$
V	$\{A, B\}, \{A, B, E\}$	$\{B, A\}, \{B, A, \Phi\}$
VI	$\{\Phi\}, \{A, \Phi\}, \{B, \Phi\}, \{E, \Phi\}, \{A, B, \Phi\}$ $\{A, E, \Phi\}, \{B, E, \Phi\}, \{A, B, E, \Phi\}$	$\{E\}, \{B, E\}, \{A, E\}, \{\Phi, E\}, \{B, A, E\}$ $\{B, \Phi, E\}, \{A, \Phi, E\}, \{B, A, \Phi, E\}$

Il est naturel de se demander s'il est possible qu'une des classes e-inférieur coïncide avec une classe e-supérieur. Si $\mathscr{L} = \Phi_{\mathscr{P}}$ on a évidemment,

$$\mathfrak{R}_e(\mathscr{L}) = \mathfrak{R}^e(\mathscr{L}) = \{\Phi_{\mathscr{P}}\}.$$

Mais hormi ce cas, la réponse est négative. Pour le montrer nous utiliserons les lemmes suivants:

(2.5) $$\mathscr{L} \in \mathfrak{R}_e(\{\Phi\}) \Leftrightarrow \Phi \in \mathscr{L}.$$

La classe $\mathfrak{R}_e(\{\Phi\})$ générée par la famille $\{\Phi\}$ est constituée uniquement de familles contenant Φ, car une classsse $\mathfrak{R}_e(\mathscr{L})$ se compose de familles $\mathscr{L}'$ qui contiennent au moins un sous-ensemble de chaque $L \in \mathscr{L}$. Réciproquement $\Phi \in \mathscr{L}$ implique $\mathscr{L} \in \mathfrak{R}_e(\{\Phi\})$ puisque l'on a

$$\{\Phi\} \subsetneq_e \mathscr{L} \qquad \text{car} \qquad \bigvee_{L \in \mathscr{L}} \Phi \subseteq L$$

et

$$\mathscr{L} \subsetneq_e \{\Phi\} \qquad \text{car} \qquad \underset{L \in \mathscr{L}}{\exists} L \subset \Phi \qquad \text{puisque} \qquad \Phi \in \mathscr{L}$$

(2.6) $$\mathscr{L} \in \mathfrak{R}^e(\{\Phi\}) \Leftrightarrow \mathscr{L} = \{\Phi\}.$$

Si $\mathscr{L} \stackrel{e}{=} \{\Phi\}$, $\mathscr{L}$ devant contenir uniquement des sous-ensembles de Φ, $\mathscr{L}$ ne contient que la partie vide.

(2.7) $$\bigvee_{\mathfrak{R}^e(\mathscr{L})} \ \underset{\mathscr{L} \in \mathfrak{R}^e(\mathscr{L})}{\exists} \Phi \in \mathscr{L}'.$$

En effet si $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{\Phi\}$ l'on a $\mathscr{L} \stackrel{e}{=} \mathscr{L}'$ puisque $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}'$ donc $\mathscr{L} \stackrel{e}{\subset} \mathscr{L}'$, (1.5), et $\bigvee_{L' \in \mathscr{L}} \ \underset{L \in \mathscr{L}}{\exists} L' \subseteq L$ car si $L' = \Phi$ alors $\Phi \subset L$ et si $L' \in \mathscr{L}$ l'on prend $L = L'$.

Le résultat qu'on peut maintenant obtenir facilement s'énonce

(2.8). *Une égalité* $\mathfrak{R}_e(\mathscr{L}) = \mathfrak{R}^e(\mathscr{L}')$ *n'est pas possible excepté la classe* $\{\Phi_{\mathscr{P}}\}$.

Cherchons à voir de quelle manière pourrait se réaliser une telle égalité: une classe $\mathfrak{R}_e(\mathscr{L})$ dont les familles ne contiennent aucune la partie vide Φ (2.5), ne peut être égale à aucune des classes $\mathfrak{R}^e(\mathscr{L})$ (2.7). Mais la classe $\mathfrak{R}_e(\{\Phi\})$ ne peut non plus être égale à une des classes $\mathfrak{R}^e(\mathscr{L})$ car la seule classe e-supérieur contenant la famille $\{\Phi\}$ ne contient que cette seule famille, (2.6).

§ 3.

L'ensemble des éléments d'une classe $\mathfrak{R}_e(\mathscr{L})$ ou $\mathfrak{R}^e(\mathscr{L})$ admet une borne supérieure et une borne inférieure en $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ car c'est un réseau complet par rapport à l'inclusion des familles de parties de E. On peut se demander si ces bornes qui sont, comme on le sait, la réunion respectivement l'intersection des familles de la classe, sont des familles de la même classe.

En ce qui concerne la borne supérieure il est facile à voir que

(3.1) *La réunion* $\bigcup_{\mathscr{L}^* \in \mathfrak{R}_e(\mathscr{L})} \mathscr{L}^*$ ($\bigcup_{\mathscr{L}^* \in \mathfrak{R}^e(\mathscr{L})} \mathscr{L}^*$) *est un élément de la classe* $\mathfrak{R}_e(\mathscr{L})$ ($\mathfrak{R}^e(\mathscr{L})$).

En effet si l'on désigne par $\mathscr{R}$ la réunion $\bigcup_{\mathscr{L}^* \in \mathfrak{R}^e(\mathscr{L})} \mathscr{L}^*$ l'on a d'abord $\mathscr{L} \subset \mathscr{R}$ donc $\mathscr{R} \subsetneq_e \mathscr{L}$. Si $R \in \mathscr{R}$ il existe une famille $\mathscr{L}' \in \mathfrak{R}_e(\mathscr{L})$ telle que $R \in \mathscr{L}'$; mais $\mathscr{L}' \underset{e}{=} \mathscr{L}$ ce qui implique par définition $\forall_{L' \in \mathscr{L}'} \exists_{L \in \mathscr{L}} L \subseteq L'$ donc l'on a aussi $\forall_{R \in \mathscr{R}} \exists_{L \in \mathscr{L}} L \subseteq R$. La proposition se démontre pour les classes e-supérieur par dualité (cf. (1.13) et (2.4)).

Il est intéressant de remarquer qu'il n'est pas nécessaire de connaitre tous les éléments d'une classe pour savoir quel est son plus grand élément, car on peut le construire à partir d'un élément quelconque $\mathscr{L}$ de la classe:

(3.2) Théorème. *La famille de parties de E*

$$\mathscr{M}_e(\mathscr{L}) = \{M \in \mathscr{P}(E) / \exists_{L \in \mathscr{L}} L \subseteq M\}\,^{4)}$$

est l'élément maximum de la classe $\mathfrak{R}_e(\mathscr{L})$ *et*

$$\mathscr{M}^e(\mathscr{L}) = \{M \in \mathscr{P}(E) / \exists_{L \in \mathscr{L}} M \subseteq L\}$$

l'élément maximum de la classe $\mathfrak{R}^e(\mathscr{L})$, *donc*

$$\mathscr{M}_e(\mathscr{L}) = \bigcup_{\mathscr{L}^* \in \mathfrak{R}^e(\mathscr{L})} \mathscr{L}^* \quad \text{et} \quad \mathscr{M}^e(\mathscr{L}) = \bigcup_{\mathscr{L}^* \in \mathfrak{R}^e(\mathscr{L})} \mathscr{L}^*.$$

Par définition $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{M}_e(\mathscr{L})$. Pour montrer que

$$\mathscr{M}_e(\mathscr{L}) \underset{e}{=} \mathscr{L}$$

il est donc suffisant de montrer que $\mathscr{L} \subsetneq_e \mathscr{M}_e(\mathscr{L})$; mais de la définition de $\mathscr{M}_e(\mathscr{L})$ on déduit $\forall_{M \in \mathscr{M}^e(\mathscr{L})} \exists_{L \in \mathscr{L}} L \subseteq M$.

---

4) Ce sont les opérateurs désignés dans [1] par $\mathscr{R}_3$ ($\mathscr{L}$) et $\mathscr{R}_4$ ($\mathscr{L}$).

Il ne reste plus qu'à démontrer quequel que soit $\mathscr{L}' \in \mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$

$$\mathscr{M}_e(\mathscr{L}) = \mathscr{M}_e(\mathscr{L}')$$

car, de $\mathscr{L}' \subseteq \mathscr{M}_e(\mathscr{L})$ il résulte par transitivité $\mathscr{L}' \subseteq \mathscr{M}_e(\mathscr{L})$ c'est-à-dire que $\mathscr{M}_e(\mathscr{L})$ est alors la plus grande famille de la classe $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$.

En effet $\mathscr{L} \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}'$ d'où $\mathscr{M}_e(\mathscr{L}') \subseteq \mathscr{M}_e(\mathscr{L})$ car si $M \in \mathscr{M}_e(\mathscr{L}')$, il existe $L' \in \mathscr{L}'$ tel que $L' \subseteq M$ et comme $\underset{L' \in \mathscr{L}'}{\forall} \ \underset{L \in \mathscr{L}}{\exists} \ L \subseteq L'$ il résulte l'existence de $L \in \mathscr{L}$ tel que $L \subseteq M$, donc $M \in \mathscr{M}_e(\mathscr{L})$. De la même manière on déduit de $\mathscr{L}' \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}$ que $\mathscr{M}_e(\mathscr{L}) \subseteq \mathscr{M}_e(\mathscr{L}')$.

On peut prouver la deuxième partie du théorème de la même manière, sou bien on peut observer que c'est la proposition duale de la première, car on a

$$\overset{e}{\complement} \mathscr{M}_e(\mathscr{L}) = \mathscr{M}^e(\overset{e}{\complement} \mathscr{L}).$$

En effet

$$\complement \mathscr{M}_e(\mathscr{L}) = \{\complement\, M \in \mathscr{P}(E) / M \in \mathscr{M}_e(\mathscr{L})\} = \{\complement\, M \in \mathscr{P}(E) / \underset{L \in \mathscr{L}}{\exists} \ L \subseteq M\} =$$

$$= \{M^* \in \mathscr{P}(E) / \underset{L \in \mathscr{L}}{\exists} \ L \subseteq \complement\, M^*\} = \{M^* \in \mathscr{P}(E) / \underset{L \in \mathscr{L}}{\exists} \ \complement\, L \supseteq M^*\} =$$

$$= \{M^* \in \mathscr{P}(E) / \underset{\complement L \in \overset{e}{\complement} \mathscr{L}}{\exists} \ M^* \subseteq \complement\, L\} = \mathscr{M}^e(\overset{e}{\complement} \mathscr{L}).$$

(3.3) *Remarque:* Les familles $\mathscr{M}_e(\mathscr{L})$ et $\mathscr{M}^e(\mathscr{L})$ permettent de constater si deux familles $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}^*$ appartiennent à la même classe $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ ou $\mathfrak{K}^e(\mathscr{L})$, s'il est plus facile de les construire que de vérifier la condition directe, car il, est évident que

$$\mathscr{L} \underset{e}{=} \mathscr{L}^* \Leftrightarrow \mathscr{M}_e(\mathscr{L}) = \mathscr{M}_e(\mathscr{L}^*) \text{ et } \mathscr{L} \overset{e}{=} \mathscr{L}^* \Leftrightarrow \mathscr{M}^e(\mathscr{L}) = \mathscr{M}^e(\mathscr{L}^*).$$

Exemple 5. Reprenons l'exemple 3: $\mathscr{M}_e(\mathscr{V}(x))$ est le filtre des voisinages de x.

Considérons maintenant la borne inférieure des éléments d'une classe, soit e-inférieur. Il est facile à voir que l'intersèction $\mathscr{I}$ des familles d'une classe n'appartient pas toujours à cette classe. En effet considérons l'exemple suivant.

Exemple 6. Soit $\mathscr{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots\}$ une famille d'intervalles strictement décroissants $L_k = \left(\frac{1}{k}, 1\right)$. On voit tout de suite que si $\mathscr{L}_k = \{L_k, L_{k+1}, \ldots\}$ l'on a $\mathscr{L}_k \underset{e}{=} \mathscr{L}$. Mais $\mathscr{I} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}_k = \{\Phi\}$ donc $\mathscr{I} = \{\Phi\} \in \mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ selon (2.5), car $\Phi \in \mathscr{L}$.

Il est évident que:

(3.4) *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'intersection* $\mathscr{I} = \bigcap_{\mathscr{L}^* \in \mathfrak{K}^e(\mathscr{L})} \mathscr{L}^*$ *appartienne à la classe* $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ *est*

(3.4)' $$\mathscr{I} \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}.$$

L'intersection peut se constuire à partir d'une seule famille (quelconque) de la classe. On introduit à cet effet l'opérateur $\mathscr{N}_e$ qu'on définit par le procédé suivant

$$\mathscr{N}_e(\mathscr{L}) = \{N \in \mathscr{L} / \forall_{L \in \mathscr{L} - \{N\}} N \not\supseteq L\}.$$

Pour démontrer que

(3.5) $$\mathscr{N}_e(\mathscr{L}) = \mathscr{I}$$

nous nous servirins du

(3.6) Théorème. *Si* $\mathscr{L} \underset{e}{=} \mathscr{L}^*$ *alors* $\mathscr{N}_e(\mathscr{L}) = \mathscr{N}_e(\mathscr{L}^*)$ *c'est-à-dire* $\mathscr{N}_e(\mathscr{L})$ *est le même ensemble de parties de E quel que soit l'élément* $\mathscr{L}$ *d'une classe.*

Soit $N \in \mathscr{N}_e(\mathscr{L})$. Montrons que $N \in \mathscr{N}_e(\mathscr{L}^*)$ c'est a dire que

(a) $$N \in \mathscr{L}^* \text{ et (b) } \forall_{L^* \in \mathscr{L}^* - \{N\}} N \not\supseteq L^*$$

a) $N \in \mathscr{N}_e(\mathscr{L})$ implique $N \in \mathscr{L}$, et comme $\mathscr{L}^* \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}$ l'on a $\exists_{L^* \in \mathscr{L}^*} L^* \subseteq N$ et puisque $\mathscr{L} \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}^*$, il résulte $\exists_{L \in \mathscr{L}} L \subseteq L^*$ c'est-à-dire que $L \subseteq L^* \subseteq N$ donc de la définition de $\mathscr{N}_e(\mathscr{L})$: $L = N$, par conséquent $L^* = N$ et $N \in \mathscr{L}^*$.

(b) Si par absurde l'on avait $\exists_{L^* \in \mathscr{L}^*} N \supset L^*$, de $\mathscr{L} \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}^*$ il résulterait $\exists_{L \in \mathscr{L}} L^* - L$ donc $N \supset L^* \supseteq L$ ce qui contredirait la définition de $\mathscr{N}_e(\mathscr{L})$, donc $N \not\supseteq L^*$ et $N \in \mathscr{N}_e(\mathscr{L}^*)$.

Par un raisonnement analogue on obtient l'inclusion inverse ce qui prouve (3.6).

Démontrons maintenant (3.5). Il résulte de (3.6) que

(3.7) $$\forall_{\mathscr{L}^* \in \mathfrak{K}_e(\mathscr{L})} \mathscr{N}_e(\mathscr{L}) \subseteq \mathscr{L}^*$$

donc

$$\mathscr{N}_e(\mathscr{L}) \supseteq \bigcap_{\mathscr{L}^* \in \mathfrak{K}_e(\mathscr{L})} \mathscr{L}^* = \mathscr{I}$$

Il ne reste plus qu'à prouver que $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{N}_e(\mathscr{L})$.

Soit $I \in \mathscr{I}$ et supposons par absurde que $\exists_{L_0 \in \mathscr{L}} I \supset L_0$. On pourrait alors construire une famille $\mathscr{L}_1 \in \mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ telle que $\mathscr{L}_1 \not\supseteq \mathscr{I}$. En effet $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L} - \{I\} \underset{e}{=} \mathscr{L}$ car $I \supset L_0$, $L_0 \in \mathscr{L}_1$ par hypothèse.

(3.8) *Remarque*, La réciproque du théorème (3.6) n'est vraie que si $\mathscr{N}_e(\mathscr{L}) \in \mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$. Un exemple simple le prouve.

Exemple 7. Soit $\mathscr{L}$ la famille des intervalles $L_n = \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$ et $\mathscr{L}^*$ la famille des intervalles $L_n^* = \left(-\frac{1}{n}, 1\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ces familles sont du même type que celle de l'exemple 6, donc selon (3.6), $\mathscr{N}_e(\mathscr{L}) = \mathscr{N}_e(\mathscr{L}^*) = \{\Phi\}$ mais on n'a pas $\mathscr{L} \underset{e}{=} \mathscr{L}^*$.

Une conséquence simple du théoreme (3.6) est:

(3.9) *Une famille $\mathscr{L}^* \in \mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ est la plus petite famille de sa classe si et seulement si $\mathscr{L}^* = \mathscr{N}_e(\mathscr{L})$.*

Nous montrerons maintenant que si une classe e-inférieur possède un élément minimal, celui-ci est le plus petit élément de la classe, c'est-à-dire:

(3.10) Théorème. *Si $\mathscr{N}$ est un élément minimal de la classe $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ l'on a $\mathscr{N} = \mathscr{N}_e(\mathscr{L})$.*

Prouvons d'abord que $\mathscr{N} = \mathscr{N}_e(\mathscr{N})$. L'énoncé en résultera car $\mathscr{N} \in \mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ par hypothèse, donc selon le théorème (3.6) $\mathscr{N}_e(\mathscr{N}) = \mathscr{N}_e(\mathscr{L})$.

Soit $N_0 \in \mathscr{N}$ et par absurde supposons $\underset{N_1 \in \mathscr{N}}{\exists} N_0 \supset N_1$. Alors $\mathscr{N}^* = \mathscr{N} - \{N_0\}$ est une famille de $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ car $\mathscr{N}^* \underset{e}{=} \mathscr{N}$. Mais $\mathscr{N}^* \subset \mathscr{N}$ ce qui contredit l'hypothèse de la minimalité de $\mathscr{N}$.

La proposition (3.4) permet de présenter encore une condition équivalente à l'existence du minimum d'une classe e-inférieur qui nous indique quel est l'aspect des classes qui ont un plus petit élément.

On experime d'abord (3.4) sous une forme différente qui résulte de (3.5).

(3.11) *Une condition nécessaire et suffisante pour que la classe $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ admette un minimum est que l'on ait*

(3.12) $$\mathscr{N}_e(\mathscr{L}) \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}.$$

(3.13) *Une classe e-inférieur contient sa borne inférieure si et seulement si il existe une famille de la classe qui ne contient aucune suite infinie strictement décroissante.*

(σ) $$L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \ldots.$$

La condition est suffisante. Selon (3.11) il est suffisant de montrer qu'une famille $\mathscr{L}$ ne contenant aucune suite (σ) satisfait la relation (3.12). Supposons par absurde qu'une famille $\mathscr{L}$ ne la satisfait pas, donc que

(α) $$\underset{L_0 \in \mathscr{L}}{\exists} \; \underset{N \in \mathscr{N}_e(\mathscr{L})}{\forall} L_0 \not\supseteq N.$$

Il en résultera que toutes les familles de la classe contiennent une suite (σ). Montrons d'abord que $\mathscr{L}$ en contient une. Il est clair que $L_0 \notin \mathscr{N}_e(\mathscr{L})$ sinon (α) serait contredit $(L_0 \underset{e}{\supseteq} L_0!)$. Mais de la définition de $\mathscr{N}_e(\mathscr{L})$ il résulte $\exists_{L_1 \in \mathscr{L}}\ L_0 \supset L_1$ sinon $L_0 \in \mathscr{N}_e(\mathscr{L})$. Raisonnant de même, $L_1 \notin \mathscr{N}_e(\mathscr{L})$ à cause de l'hypothèse (α).

On peut répeter le raisonnement précédent pour L_1 et l'on obtient un ensemble $L_2 \in \mathscr{L}$, $L_2 \subset L_1$, $L_2 \notin \mathscr{N}_e(\mathscr{L})$ et ainsi de suite. On forme ainsi une suite (σ) strictement décroissante infinie d'ensembles de $\mathscr{L}$. Mais l'hypothèse (α) nous assure que tout $\mathscr{L}^*$ de la classe contient une telle suite car si $\mathscr{L}$ ne vérifie pas (3.12), il en est de même pour toute famille $\mathscr{L}^* \in \mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ par transitivé: $\mathscr{L}^* \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{N}_e(\mathscr{L}^*)$ implique $\mathscr{L} \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{N}_e(\mathscr{L})$ car $\mathscr{L}^* \underset{e}{=} \mathscr{L}$ et $\mathscr{N}_e(\mathscr{L}) = \mathscr{N}_e(\mathscr{L}^*)$.

La condition est nécessaire: Si la classe contient $\mathscr{N}_e(\mathscr{L})$ celle-ci est une famille vérifiant la condition de l'énoncé. En effet elle ne peut, selon sa définition, contenir deux ensembles $N_1 \supset N_2$.

(3.14) Corollaire. *Une classe $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ contenant une famille finie $\mathscr{L}$, c'est à dire constituée par un nombre fini d'ensembles quelconques, possède toujours un minimum.*

(3.15) *Remarque.* Pour qu'une classe contienne sa borne inférieure il n'est point nécessaire qu'*aucune* famille ne contienne une suite infinie (σ). Considérons en effet l'exemple suivant

Exemple 8. Soit $\mathscr{L}$ la famille de parties de la droite réelle

$$\mathscr{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots \{p_1\}, \{p_2\}, \ldots, \{p_k\}, \ldots\}$$

où

$$L_k = \left(0, \frac{1}{k}\right), \qquad p_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) \in L_k$$

$\mathscr{L}$ contient la suite $L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_k \supset \ldots$ mais $\mathscr{N}_e(\mathscr{L}) = \{\{p_1\}, \ldots, \{p_k\}, \ldots\}$ et l'on a $\mathscr{N}_e(\mathscr{L}) \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}$.

On peut énoncer par dualite des propriétés analogues concernant l'intersection des familles d'une clase e-supérieur car cette intersection est la duale de l'intersection des familles de la classe duale $\mathfrak{K}_e(\overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L})$. En vérité, selon (1.7) et (1.13)

$$\bigcap_{\mathscr{L}^* \in \mathfrak{K}^e(\mathscr{L})} \mathscr{L}^* = \bigcap_{\mathscr{L}^* \in \mathfrak{K}^e(\mathscr{L})} \overset{e}{\mathrm{C}}\overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}^* = \overset{e}{\mathrm{C}} \bigcap_{\overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}^* \in \mathfrak{K}_e(\overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L})} \overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}^*$$

De plus, la famille

$$\mathscr{N}_e(\mathscr{L}) = \{N \in \mathscr{L} / \forall_{L \in \mathscr{L} - \{N\}}\ N \nsubseteq L\}$$

est la duale de $\mathcal{N}_e(\overset{e}{\complement}\mathcal{L})$. En effet

$$\mathcal{N}_e(\overset{e}{\complement}\mathcal{L}) = \{\complement N \in \overset{e}{\complement}\mathcal{L} / \underset{\complement L \in \complement\mathcal{L}}{\forall} \complement N \not\supseteq \complement L\}$$

$$\overset{e}{\complement}\mathcal{N}_e(\overset{e}{\complement}\mathcal{L}) = \{\complement(\complement N)/\complement N \in \mathcal{N}_e(\overset{e}{\complement}\mathcal{L})\} =$$

$$= \{\complement(\complement N) \in \overset{e}{\complement}(\overset{e}{\complement}\mathcal{L}) / \underset{\complement L \in \overset{e}{\complement}\mathcal{L} - \{\complement N\}}{\forall} \complement N \not\supseteq \complement L\} = \{N \in \mathcal{L} / \underset{L \in \mathcal{L} - \{N\}}{\forall} N \not\subseteq L\} =$$
$$= \mathcal{N}^e(\mathcal{L})$$

Il en résulte que si une classe $\mathfrak{R}_e(\mathcal{L})$ *contient sa borne inférieure la classe duale* $\mathfrak{R}^e(\overset{e}{\complement}\mathcal{L})$ *possède la même propriété et réciproquement.*

Enfin remarquons seulement que le théorème dual de (3.13) se rapportera à une suite infinie croissante car la condition (3.12) devra être remplacée par la condition duale de $\mathcal{N}_e(\overset{e}{\complement}\mathcal{L}) \subsetneq_e \overset{e}{\complement}\mathcal{L}$ c'est à dire par $\mathcal{L} \overset{e}{\subset} \mathcal{N}^e(\mathcal{L})$.

Exemple 9. Reprenons l'exemple 4. Chaque classe a, non seulement un maximum, mais aussi un minimum selon (3.14), ce qui peut se vérifier immédiatement.

§ 4.

L'étude des propriétés d'ordre de l'ensemble des classes e-inférieur ou e-supérieur nécessite l'introduction des définitions suivantes de la *réunion et de l'intersection par éléments* (*réunion-e* et *intersection-e*) des familles de parties (cf. [1])

Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. Nous supposerons $\mathcal{L}_i \neq \Phi_{\mathcal{P}}$.

(D.8) $$\mathcal{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathcal{L}_2 = \{L_1 \cup L_2 / L_1 \in \mathcal{L}_1, \quad L_2 \in \mathcal{L}_2\}$$

(D.9) $$\mathcal{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathcal{L}_2 = \{L_1 \cap L_2 / L_1 \in \mathcal{L}_1, \quad L_2 \in \mathcal{L}_2\}.$$

On définit de la même façon la réunion ou l'intersection-e d'un nombre quelconque de familles $\mathcal{L}_t$. Ces opérations sont évidemment comumutatives et associatives.

Leurs relations avec la réunion et l'intersection sont les suivantes

(4.1) $$\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \overset{e}{\subset} \mathcal{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathcal{L}_2$$

car si $L \in \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$ alors $L \in \mathscr{L}_1$ ou $L \in \mathscr{L}_2$ donc $\underset{L\in\mathscr{L}_1\cup\mathscr{L}_2}{\forall} \ \underset{L_1\cup L_2\in\mathscr{L}_1\cup\mathscr{L}_2}{\exists} L \subset$ $\subset L_1 \cup L_2$

(4.2) $$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \subseteq \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2$$

car $L \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ implique $L \in \mathscr{L}_1$ et $L \in \mathscr{L}_2$ donc $L = L \cap L \in \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2$.

La dualité signalée précedemment est completée par une dualité de ces opérations qui résulte des relations

(4.3) $$\overset{e}{\mathrm{C}}(\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2) = \overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}_2, \quad \overset{e}{\mathrm{C}}(\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2) = \overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}_2$$

en effet $L \in \overset{e}{\mathrm{C}}(\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2) \Leftrightarrow \mathrm{C}L \in \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow \mathrm{C}L = L_1 \cup L_2,\ L_1 \in \mathscr{L}_1,$ $L_2 \in \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow L = \mathrm{C}L_1 \cap \mathrm{C}L_2,\ \mathrm{C}L_1 \in \overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}_1,\ \mathrm{C}L_2 \in \overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}_2 \Leftrightarrow L \in \overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}_2$.

La propriété duale résulte en appliquant la complémentaire-e et en remplaçant $\mathscr{L}_1$ par $\overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ par $\overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}_2$. La règle de dualité s'enonce maintenant.

(4.4) *A chaque théorème* $\mathrm{T}_e[\mathscr{L}, \underset{e}{\subsetneq}, \subseteq, \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}), \overset{e}{\cap}, \overset{e}{\cup}, \cap, \cup]$ *correspond un théorème dual* $\mathrm{T}^e[\overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}, \overset{e}{\subset}, \subseteq, \mathfrak{K}^e(\overset{e}{\mathrm{C}}\mathscr{L}), \overset{e}{\cup}, \overset{e}{\cap}, \cap, \cup]$ car la réunion et l'intersection sont distributives par rapport au complément par

Les duales des formules (4.1) et (4.2) sont plus faibles

(4.1)* $$\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2 \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$$

(4.2)* $$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \subseteq \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2$$

Les formules (4.1) et (4.2) ne sont pas duales ce qui explique leur assymétrie.

On peut aisément obtenir les résultats suivants

(4.5) $$\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2 \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_1, \qquad \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2 \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}_1$$

et les formules duales respectives

(4.6) $$\mathscr{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2, \qquad \mathscr{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2.$$

Il est évident que

(4.7) $$\mathscr{L} \subset \mathscr{L} \overset{e}{\cap} \mathscr{L} \quad \text{et} \quad \mathscr{L} \subset \mathscr{L} \overset{e}{\cup} \mathscr{L}$$

et que

(4.8) $$\mathscr{L} \overset{e}{\cap} \mathscr{L} \overset{e}{=} \mathscr{L} \quad \text{et} \quad \mathscr{L} \overset{e}{\cup} \mathscr{L} \underset{e}{=} \mathscr{L}.$$

Il en résulte avec (4.5) les relations

$$\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2 \underset{e}{\subseteq} \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2, \qquad \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2 \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2. \tag{4.9}$$

Il y a des propriétés de monotonie de ces opérations

$$\begin{gathered} \mathscr{L}_1' \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_1'' \,\&\, \mathscr{L}_2' \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_2'' \Rightarrow \mathscr{L}_1' \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2' \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_1'' \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2'' \\ \mathscr{L}_1' \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_1'' \,\&\, \mathscr{L}_2' \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_2'' \Rightarrow \mathscr{L}_1' \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2' \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_1'' \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2''. \end{gathered} \tag{4.10}$$

En effet, l'hypothèse peut s'écrire comme suit

$$\begin{gathered} \forall_{L_1' \in \mathscr{L}_1'} \exists_{L_1'' \in \mathscr{L}_1''} L_1' \subseteq L_1'' \,\&\, \forall_{L_2' \in \mathscr{L}_2'} \exists_{L_2'' \in \mathscr{L}_2''} L_2' \subseteq L_2'' \Rightarrow \forall_{L_1'} \forall_{L_2'} \exists_{L_1''} \exists_{L_2''} L_1' \subseteq L_1'' \,\&\, L_2' \subseteq L_2'' \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall_{L_1'} \forall_{L_2'} \exists_{L_1''} \exists_{L_2''} L_1' \cap L_2' \subseteq L_2'' \cap L_2'' \Leftrightarrow \forall_{L' \in \mathscr{L}_1' \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2'} \exists_{L'' \in \mathscr{L}_1'' \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2''} L' \subseteq L'' \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathscr{L}_1' \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2' \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_1'' \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2''. \end{gathered}$$

Par dualité on obtient

$$\begin{gathered} \mathscr{L}_1' \underset{e}{\subseteq} \mathscr{L}_2'' \,\&\, \mathscr{L}_2' \underset{e}{\subseteq} \mathscr{L}_2'' \Rightarrow \mathscr{L}_1' \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2' \underset{e}{\subseteq} \mathscr{L}_1'' \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2'' \\ \mathscr{L}_1' \underset{e}{\subseteq} \mathscr{L}_1'' \,\&\, \mathscr{L}_2' \underset{e}{\subseteq} \mathscr{L}_2'' \Rightarrow \mathscr{L}_1' \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2' \underset{e}{\subseteq} \mathscr{L}_1'' \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2''. \end{gathered} \tag{4.11}$$

En particular avec (4.10) et (4.7) on a

$$\begin{gathered} \mathscr{L} \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_1 \,\&\, \mathscr{L} \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_2 \Rightarrow \mathscr{L} \overset{e}{\subset} \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2, \\ \mathscr{L}_1 \underset{e}{\subseteq} \mathscr{L} \,\&\, \mathscr{L}_2 \underset{e}{\subseteq} \mathscr{L} \Rightarrow \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2 \underset{e}{\subseteq} \mathscr{L}. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Des formules (4.11) il résulte pour les équivalences des formules analogues

$$\begin{gathered} \mathscr{L}_1' \overset{e}{=} \mathscr{L}_2'' \,\&\, \mathscr{L}_2' \overset{e}{=} \mathscr{L}_2'' \Rightarrow \mathscr{L}_1' \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2' \overset{e}{=} \mathscr{L}_1'' \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2 \\ \mathscr{L}_1' \overset{e}{=} \mathscr{L}_1'' \,\&\, \mathscr{L}_2' \overset{e}{=} \mathscr{L}_2'' \Rightarrow \mathscr{L}_1' \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2' \overset{e}{=} \mathscr{L}_1'' \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2'' \end{gathered} \tag{4.13}$$

ainsi que leurs formules duales.

Les opérations définies sont que quasi-distributives

$$\begin{gathered} \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} (\mathscr{L}_2 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_3) \subseteq (\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2) \overset{e}{\cap} (\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_3) \\ \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} (\mathscr{L}_2 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_3) \subseteq (\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2) \overset{e}{\cup} (\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_3) \end{gathered} \tag{4.14}$$

mais les opérations par éléments sont distributives par rapport à la réunion

$$\text{(4.15)}\qquad \begin{aligned} \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} (\mathscr{L}_2 \cup \mathscr{L}_3) &= (\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2) \cup (\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_3) \\ \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} (\mathscr{L}_2 \cup \mathscr{L}_3) &= (\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2) \cup (\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_3) \end{aligned}$$

tandis que aux quasi-distributivités de la réunion par rapport à ces opérations

$$\text{(4.16)}\qquad \begin{aligned} \mathscr{L}_1 \cup (\mathscr{L}_2 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_3) &\subseteq (\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2) \overset{e}{\cup} (\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_3) \\ \mathscr{L}_1 \cup (\mathscr{L}_2 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_3) &\subseteq (\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2) \overset{e}{\cap} (\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_3) \end{aligned}$$

s'ajoutent les équivalences duales

$$\text{(4.17)}\qquad \begin{aligned} \mathscr{L}_1 \cup (\mathscr{L}_2 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_3) &\underset{e}{=} (\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2) \overset{e}{\cup} (\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_3) \\ \mathscr{L}_1 \cup (\mathscr{L}_2 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_3) &\overset{e}{=} (\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2) \overset{e}{\cap} (\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_3). \end{aligned}$$

Prouvons d'abord la première des égalité (4.15). Si $L' \in \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} (\mathscr{L}_2 \cup \mathscr{L}_3)$ alors $L = L_1 \cup L'$, $L' \in \mathscr{L}_2 \cup \mathscr{L}_3$ donc $L = L_1 \cup L_2$ ou bien $L = L_1 \cup L_3$. De même si $L \in (\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2) \cup (\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_3)$, $L \in \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2$ ou bien $L \in \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_3$, donc $L = L_1 \cup L_2$ ou bien $L = L_1 \cup L_3$. La seconde égalité résulte par dualité.

De même les relations suivantes deviennent évidentes si on écrit quelle est la forme d'un ensemble L qui appartient au premier, respectivement, au second membre. Si $L \in \mathscr{L}_1 \cup (\mathscr{L}_2 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_3)$, L prend une des formes suivantes $L = L_1$ ou $L = L_2 \cup L_3$ où $L_i \in \mathscr{L}_i$, $i = 1, 2, 3$. De même si $L = (\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2) \overset{e}{\cup} (\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_3)$ on a pour L une des alternatives suivantes

$$L_1 \cup L_1,\quad L_1 \cup L_1',\quad L_2 \cup L_1,\quad L_1 \cup L_3,\quad L_2 \cup L_3,\quad \text{où}\quad L_1, L_1' \in \mathscr{L}_1,$$
$$L_2 \in \mathscr{L}_2,\quad L_3 \in \mathscr{L}_3.$$

§ 5.

(5.1) *Les préordres* $\underset{e}{\subseteq}$ *et* $\overset{e}{\subset}$ *définis dans l'ensemble des familles de parties de E engendrent une relation d'ordre (partiel) dans l'ensemble des classes e-inférieur, respectivement e-supérieur,* qu'on peut définir comme suit:

(D.10) $\quad \mathfrak{R}_e(\mathscr{L}_1) \underset{e}{\prec} \mathfrak{R}_e(\mathscr{L}_2) \;\Leftrightarrow\; \underset{\mathscr{L}^1 \in \mathfrak{R}_e(\mathscr{L}_1)}{\exists} \; \underset{\mathscr{L}^2 \in \mathfrak{R}_e(\mathscr{L}_2)}{\exists} \; \mathscr{L}^1 \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}^2$ [5])

(D.11) $\quad \mathfrak{R}^e(\mathscr{L}_1) \underset{e}{\prec} \mathfrak{R}^e(\mathscr{L}_2) \;\Leftrightarrow\; \underset{\mathscr{L}^1 \in \mathfrak{R}^e(\mathscr{L}_1)}{\exists} \; \underset{\mathscr{L}^2 \in \mathfrak{R}^e(\mathscr{L}_2)}{\exists} \; \mathscr{L}^1 \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}^2.$

L'affirmation précédente résulte de [5], théorèmes 2 et 3 § 5, mais on peut aussi vérifier que les relations $\underset{e}{\prec}, \overset{e}{\prec}$ sont réflexives, antisymétriques et transitives.

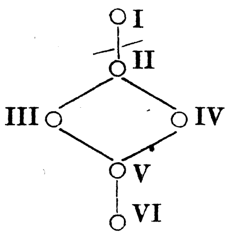
Remarquons seulement que l'on a

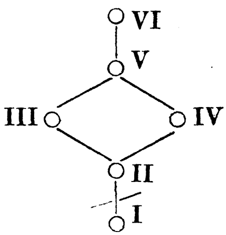
$$\underset{\mathscr{L}^1 \in \mathfrak{R}_e(\mathscr{L}_1)}{\exists} \; \underset{\mathscr{L}^2 \in \mathfrak{R}_e(\mathscr{L}_2)}{\exists} \; \mathscr{L}^1 \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}^2 \;\Rightarrow\; \underset{\mathscr{L}^1 \in \mathfrak{R}_e(\mathscr{L}_1)}{\forall} \; \underset{\mathscr{L}^2 \in \mathfrak{R}_e(\mathscr{L}_2)}{\forall} \; \mathscr{L}^1 \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}^2 \text{ [6])}$$

et de même pour les classes $\mathfrak{R}^e(\mathscr{L}_i)$ à cause de la transitivité des relations $\underset{e}{\subsetneq}$ et $\overset{\underline{e}}{\subset}$ (1.3):

$$\mathscr{L}^1 \underset{e}{\equiv} \mathscr{L}_1 \;\&\; \mathscr{L}^2 \underset{e}{\equiv} \mathscr{L}_2 \;\&\; \mathscr{L}_1 \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}_2 \;\Rightarrow\; \mathscr{L}^1 \underset{e}{\subsetneq} \mathscr{L}^2.$$

Exemple 10. Si $E = \{a, b\}$ (exemple 4) les graphes suivants représentent l'ensemble ordonné des classes sur cet ensemble

Classes $\mathfrak{R}_e(\mathscr{L})$: 

Classes $\mathfrak{R}^e(\mathscr{L})$: 

Exemple 11. Reprenons les exemples 1 et 3. La condition nécessaire et suffisante pour que la topologie $\mathscr{T}_1$ définie sur E par les systèmes fondamentaux de voisinages $\mathscr{V}_1(x)$ des points $x \in E$ soit plus fine que la topologie $\mathscr{T}_2$ définie par $\mathscr{V}_2(x)$ est $\mathfrak{R}_e(\mathscr{V}_1(x)) \underset{e}{\prec} \mathfrak{R}_e(\mathscr{V}_2(x))$ quel que soit $x \in E$.

---

[5]) lès définition gardent un sens pour la classe e-inférieur ou supérieur $\{\Phi\mathscr{P}\}$ et l'on a quelle que soit la classe

$$\mathfrak{R}_e(\mathscr{L}) \underset{e}{\prec} \{\Phi\mathscr{P}\} \quad \text{et} \quad \{\Phi\mathscr{P}\} \overset{e}{\prec} \mathfrak{R}^e(\mathscr{L})$$

selon la convention de la note [1]). Cependant ayant exclu la famille vide au paragraphe 4, on devra exclure aussi les classes $\{\Phi\mathscr{P}\}$.

[6]) L'implication inverse est banale si on suppose $\mathscr{L}_i \neq \Phi\mathscr{P}$ (cf. note [1]).

(5.2) Théorème. *L'ensemble des clases e-inférieur ordonné par la relation* $\prec$ *est un treillis complet et distributif dans lequel l'union* $\vee$ *des classes* $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1)$ *et* $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_2)$ *est* $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2)$ *et l'intersection* $\wedge$ *est* $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2)$.

La démonstration sera donnée pour deux classes mais elle reste valable pour une infinité quelconque.

$\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2)$ est un majorant des classes $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_i)$, $i = 1, 2$, car $\mathscr{L}_i \subsetneq_e \mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2$ (4.6) donc $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_i) \subsetneq_e \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2)$. C'est un majorant minimum car si $\mathfrak{K}_e(\mathscr{M})$ est une classe telle que $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_i) \prec \mathfrak{K}_e(\mathscr{M})$ on a $\mathscr{L}_i \underset{e}{\prec} \mathscr{M}$ donc, selon (4.12), $\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2 \subsetneq_e \mathscr{M}$ c'est à dire $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2) \underset{e}{\prec} \mathfrak{K}_e(\mathscr{M})$.

$\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2)$ est un minorant car $\mathscr{L}_i \subseteq \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ donc selon (1.4) $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2 \subsetneq_e \mathscr{L}_i$ et $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2) \underset{e}{\prec} \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_i)$. C'est un minorant maximum puisque si $\mathfrak{K}_e(\mathscr{M}) \underset{e}{\prec} \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_i)$ donc si $\mathscr{M} \subsetneq_e \mathscr{L}_i$ on obtient avec (1.14) $\mathscr{M} \cup \mathscr{M} = \mathscr{M} \subsetneq_e \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$ c'est à dire $\mathfrak{K}_e(\mathscr{M}) \underset{e}{\prec} \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2)$.

On a donc

$$\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1) \vee \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_2) = \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \mathscr{L}_2),\ \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1) \wedge \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_2) = \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2)$$

Enfin

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1) \wedge [\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_2) \vee \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_3)] &= \\ = [\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1) \wedge \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_2)] &\vee [\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1) \wedge \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_3)] \end{aligned}$$

car cela revient à la première des relations (4.17). Dans tout réseau la distributivité duale (de $\vee$ par rapport à $\wedge$) est une conséquence de la précédente mais elle résulte d'ailleurs immédiatement de la première des égalités (4.15).

(5.3). Théorème. *Par la correspondance biunivoque* (2.3) *entre les classes* $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L})$ *et leurs duales* $\mathfrak{K}^e(\overset{e}{\complement}\mathscr{L})$ *la relation d'ordre* $\underset{e}{\prec}$ *devient* $\overset{e}{\succ}$

$$\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1) \underset{e}{\prec} \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_2) \Leftrightarrow \mathfrak{K}^e(\overset{e}{\complement}\mathscr{L}_2) \overset{e}{\prec} \mathfrak{K}^e(\overset{e}{\complement}\mathscr{L}_1)$$

L'ensemble des classes e-supérieur forme donc un treillis anti-isomorphe à celui des classes duales e-inférieur. Par conséquent c'*est un treillis* *complet et distributif, l'union et l'intersection de* $\mathfrak{K}^e(\mathscr{L}_1)$ *et* $\mathfrak{K}^e(\mathscr{L}_2)$ *étant respectivement* $\mathfrak{K}^e(\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2)$ *et* $\mathfrak{K}^e(\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2)$

En effet $\mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_1) \underset{e}{\prec} \mathfrak{K}_e(\mathscr{L}_2)$ revient à $\mathscr{L}_1 \subsetneq_e \mathscr{L}_2$ qui par dualité devient $\overset{e}{C}\mathscr{L}_2 \overset{e}{\subset} \overset{e}{C}\mathscr{L}_1$ donc selon la définition (D 11), $\mathfrak{K}^e(\overset{e}{C}\mathscr{L}_2) \overset{e}{\prec} \mathfrak{K}^e(\overset{e}{C}\mathscr{L}_1)$.

L'union et l'intersection des classes $\mathfrak{K}^e(\mathscr{L}_1)$ et $\mathfrak{K}^e(\mathscr{L}_2)$ s'obtiennent par dualité, (4.4), de l'union $\mathfrak{K}_e(\overset{e}{C}\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cup} \overset{e}{C}\mathscr{L}_2)$ et de l'intersection $\mathfrak{K}_e(\overset{e}{C}\mathscr{L}_1 \cup \overset{e}{C}\mathscr{L}_2)$ des classes duales Ce sont donc $\mathfrak{K}^e(\mathscr{L}_1 \overset{e}{\cap} \mathscr{L}_2)$, respectivement $\mathfrak{K}^e(\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Balász M., Borşan D., Froda—Schechter M. et Hamburg P., *Opérateurs dans des ensembles de parties (en roumain, résumé français)* Acad. R. p. Romîne, Stud. Cerc. Mat. XIII, 1 (1962).

[2] Balász M., Borşan D., Froda—Schechter M. et Hamburg P., *Relations entre parties d'ensembles*, Rev. Math. pures et appl. VII, 3 (1963).

[3] Berge C., *Espaces topologiques*. Fonctions multivoques, Paris 1959.

[4] Császár A., *Fondements de la topologie générale*, Budapest 1960.

[5] Dubreil P., *Algèbre I*, ch. I, Paris 1954.

[6] Kleene S. C., *Introduction to metamathematics*, New York, 1952.