Applications of Mathematics

Otto Röschel

Darboux-Zwangläufe und äquiforme Kinematik

Applications of Mathematics, Vol. 36 (1991), No. 3, 233–240

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104462

DARBOUX - ZWANGLÄUFE UND ÄQUIFORME KINEMATIK

OTTO RÖSCHEL

Herrn Prof. Dr. W. Wunderlich zum 80. Geburtstag gewidmet

(Received February 20, 1990)

Kurzfassung. In dieser Arbeit werden Zusammensetzungen euklidischer Darboux - Zwangläufe mit rastfesten zentrischen Ähnlichkeiten studiert. Bei den so entstehenden zweiparametrigen äquiformen Bewegungsvorgängen werden die Punkte einer besonderen gangfesten Fläche dritter Ordnung Φ in Bahnebenen geführt, während allgemeine Punkte des Gangraumes an Kegel zweiter Ordnung gebunden sind. Weiters wird gezeigt, daß sich durch Spezialisierung innerhalb dieser zweiparametrigen Schar alle von A. Karger [2] angegebenen nichttrivialen äquiformen Zwangläufe mit durchwegs ebenen Bahnen finden lassen.

Keywords: Kinematics, similarity motions with plane paths.

AMS Classification: 53A17.

1. Ziel dieser Arbeit ist es, ein *Beispiel für Äquiformzwangläufe* des dreidimensionalen euklidischen Raumes E_3 anzugeben, bei denen eine zweiparametrige Schar ebener Bahnkurven existiert.

Diese Fragestellung wurde für Zwangläufe innerhalb der euklidischen Bewegungsgruppe vom Autor in [5] geklärt. Es zeigte sich dabei, daß alle diese Zwangläufe durch geeignete Überlagerung eines euklidischen *Darboux-Zwanglaufes* mit einer stetigen (aber nicht notwendig gleichförmigen) Schiebung fester Richtung entstehen. Die in Ebenen laufenden Punkte des Gangsystems gehören dann einem Drehzylinder oder einer Ebene an. Die Bahnebenen der entsprechenden Punkte sind alle zur festen Schiebrichtung der überlagerten Schiebung parallel. Diese Zwangläufe sind somit Beispiele für von H. Vogler stammende Ergebnisse über euklidische bzw. affine Zwangläufe mit ebenen Bahnkurven (vgl. [6]–[8]). Auch die von W. Wunderlich in [11] bestimmten kubischen Zwangläufe gehören der genannten Klasse an.

In der Kinematik der äquiformen Gruppe des E_3 steht eine vollständige Aufzählung der Zwangläufe mit ∞^2 ebenen Bahnen noch aus. Die erwähnten Beispiele innerhalb der euklidischen Bewegungsgruppe gehören in trivialer Weise hierher und können von den folgenden Überlegungen ausgeschlossen werden. Die vorliegende Arbeit zeigt einen Weg auf, äquiforme Zwangläufe mit ∞^2 ebenen Bahnen zu erzeugen. Ob alle derartigen Zwangläufe in ähnlicher Weise erzeugt werden können, soll in einer weiteren Arbeit geklärt werden. Abweichend vom Fall der Bewegungsgruppe zeigt sich, daß bei diesen Beispielen eine gangfeste Fläche dritter Ordnung Φ existiert, deren Punkte ebene Bahnen durchlaufen. Die zugehörigen Bahnebenen liegen in einem Bündel.

In Anwendung des Gefundenen gelingt abschließend eine einheitliche Erzeugung aller von A. Karger in [2] angegebenen „nichttrivialen" Typen von äquiformen Zwangläufen mit durchwegs ebenen Bahnen. Sie sind als Zusammensetzung eines Darboux-Zwanglaufes mit geeigneten zentrischen Ähnlichkeiten mit rastfestem Fixpunkt A^* zu gewinnen.

2. Wir schließen den reellen euklidischen Raum E_3 projektiv ab und verwenden für die Beschreibung von Punkten neben kartesischen Normalkoordinaten x, y, z homogene Koordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 \neq 0 : 0 : 0 : 0$, die im Falle $x_0 \neq 0$ über $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : z$ mit den kartesischen verbunden sind.[1]) Wie üblich fassen wir diese Koordinaten zu Vektoren $\boldsymbol{x} := (x_0, x_1, x_2, x_3)^t$ zusammen.

Zwangläufe eines Gangsystems Σ gegenüber einem Rastsystem Σ^* werden im Sinne der euklidischen Ähnlichkeiten (äquiformen Transformationen) mit $t \in \in [0, T] := I \subset \mathfrak{R}$ als Zeitparameter durch

$$(1) \qquad \boldsymbol{x}^* = A(t)\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \quad 0 \quad 0 \\ b(t) & \\ c(t) & D(t) \\ d(t) & \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

erfaßt, wobei $D(t)$ othogonale 3×3-Matrizen mit Elementen aus $C^0(I)$ beschreibt, und $a(t) \neq 0$, $b(t), c(t), d(t) \in C^0(I)$ gilt. $1/a(t)$ wird als *augenblicklicher Streckfaktor* bezeichnet. Für $a(t) =$ konst. $\forall t \in I$ stellen sich äquiforme Zwangläufe ein, die durch eine feste Ähnlichkeit in euklidische Zwangläufe übergehen.

3. DARBOUX - ZWANGLÄUFE

Bei O. Bottema - B. Roth [1, S. 307 und S. 347] findet sich eine Normalform der *Darboux-Zwangläufe* δ des euklidischen Raumes.[2]) Bezüglich der Gruppe der Ähnlichkeiten des E_3 können wir diese Zwangläufe in der Normalform

$$(2) \qquad \boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 2R(1-\cos t) & \sin t & \cos t & 0 \\ 1-\cos t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

[1]) Für algebraische Überlegungen werden wir auch die komplexe Erweiterung vornehmen.

[2]) Alle Punkte des Gangraumes besitzen bei diesen Zwangläufen ebene Bahnen, ohne daß die Bahnebenen alle zueinander parallel sind.

mit $t \in [0, 2\pi]$ ansetzen. Dabei haben wir das Koordinatensystem in Σ und Σ^* so gewählt, daß die Momentanbewegung des Zwanglaufs für $t = 0, \pi$ eine Drehung ist. Für $R = 0$ stellt sich der *vollkommen steile Darbouxsche Umschwung* ein. In allen anderen Fällen sind Gang- und Rastaxoid *Drehzylinder* mit den Gleichungen

$$(3) \qquad \Delta \ \ldots x_1^2 + x_2^2 - 2Rx_0x_2 = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\Delta^* \ldots x_1^{*2} + x_2^{*2} - 4Rx_0^*x_2^* = 0 \,.$$

Allgemeine Punkte des Gangsystems besitzen Bahnellipsen. Genau die Punkte der gangfesten *Wendegeraden* w mit der Gleichung $x_1 = x_2 = 0$ laufen auf Bahngeraden. Alle Ebenen des Rastraumes Σ^* treten als Trägerebenen von Punktbahnen auf. So wird die Bahnebene des gangfesten Punktes P mit den Koordinaten $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^t$ im Rastsystem Σ^* von $\boldsymbol{x}^* := \boldsymbol{x}$ und den beiden Punkten

$$(4) \qquad \boldsymbol{v}^* := (0, -x_2, x_1, 0)^t \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b}^* := (0, -x_1, 2Rx_0 - x_2, x_0)^t$$

aufgespannt. Ihre Gleichung lautet

$$(5) \qquad \begin{aligned} &u_0^*x_0^* + u_1^*x_1^* + u_2^*x_2^* + u_3^*x_3^* = \\ &= -\left[x_0x_1^2 + x_0x_2^2 + x_3(x_1^2 + x_2^2 - 2Rx_0x_2)\right] x_0^* + \\ &+ x_0^2x_1x_1^* + x_0^2x_2x_2^* + x_0(x_1^2 + x_2^2 - 2Rx_0x_2)\, x_3^* = 0 \end{aligned}$$

(vgl. [1, S. 307]).

Wir wählen nun einen eigentlichen *rastfesten Punkt* A^* mit Koordinaten $(1, a_1^*, a_2^*, a_3^*)^t$. Jene Punkte $X \ldots (x_0, x_1, x_2, x_3)^t$ des Gangraumes Σ, deren *Bahnkurven beim Darboux-Zwanglauf* δ *in Ebenen durch* A^* *verlaufen*, werden offensichtlich durch

$$(6) \qquad u_0^* + a_1^*u_1^* + a_2^*u_2^* + a_3^*u_3^* = 0 \,,$$

also neben $x_0 = 0$ durch

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\Phi \ldots (x_0 - a_3^*x_0 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 - 2Rx_0x_2) - \\ &- x_0^2(a_1^*x_1 + a_2^*x_2 - 2Rx_2) = 0 \end{aligned}$$

erfaßt. Die fraglichen Punkte gehören demnach einer *algebraischen Fläche dritter Ordnung* Φ an. Φ schneidet die Fernebene $x_0 = 0$ nach dem Minimalgeradenpaar $x_0 = x_1^2 + x_2^2 = 0$ und der Ferngerade $x_0 = x_3 = 0$. Bei $R \neq 0$ zerfällt der Schnitt von Φ und Δ in das genannte Minimalgeradenpaar und den Schnitt von Δ mit der Ebene

$$(8) \qquad \varepsilon \ldots a_1^*x_1 + a_2^*x_2 - 2Rx_2 = 0 \,.$$

Unsere Wendegerade w gehört diesem Schnitt stets an. Falls $a_1^* = 0$ und $a_2^* = 2R$ gilt, liegt der Ausgangspunkt A^* auf der Drehachse des Rastdrehzylinders Δ^* — Φ zerfällt dann in den Gangdrehzylinder Δ und die Ebene $x_3 = (a_3^* - 1)\, x_0$. Sehen wir von diesem und dem Fall $R = 0$ ab, können wir je nach Qualität des Schnittes von Δ mit ε zwei Typen unterscheiden:

Typ A: ε und Δ berühren sich längs $w \Leftrightarrow a_1^* = 0$.

Typ B: ε und Δ schneiden sich nach w und einer weiteren Geraden $\Leftrightarrow a_1^* \neq 0$.

Unsere Fläche Φ und die Ebene ε schneiden sich nach einer weiteren Geraden g. Sie besitzt die Darstellung

$$(9) \qquad g \ldots a_1^* x_1 + a_2^* x_2 = 2Rx_2 \quad \text{und} \quad x_3 = (a_3^* - 1)\, x_0 \,.$$

Bestimmen wir nun noch die *Schichtenschnitte* von Φ mit den parallelen *Schichtenebenen* $x_3 = kx_0$ $(k \in \mathfrak{R})$! Sie zerfallen in die Ferngerade $x_0 = x_3 = 0$ und

$$(10) \qquad (1 + k - a_3^*)(x_1^2 + x_2^2 - 2Rx_0x_2) - x_0(a_1^* x_1 + a_2^* x_2 - 2Rx_2) = 0 \,.$$

Für $1 + k - a_3^* \neq 0$ handelt es sich dabei um *Kreise, deren Normalprojektion (Grundriß) in die Ebene $x_3 = 0$ einem linearen Kreisbüschel angehören*, das bei Typ A *parabolisch*, bei Typ B hingegen *elliptisch* ausfällt. Für Typ A stellt sich die nach E. Müller [4] als *Müllersche Fläche* bezeichnete Fläche dritter Ordnung mit durchwegs ebenen Fallinien (Ellipsen) ein. Typ B führt ebenfalls auf eine Fläche dritter Ordnung. Ihre Fallinien in Bezug auf die Schichtenebenen $x_3 = kx_0$ sind von vierter Ordnung und liegen auf Drehzylindern, deren Grundrisse wie bei Typ A das zum Grundriß des Schichtenplanes orthogonale Kreisbüschel erfüllen.

Die Mittelpunkte unserer Schichtenkreise erfüllen eine *Hyperbel* in der Symmetrieebene

$$(11) \qquad \sigma \ldots Ra_1^* x_0 + (a_2^* - 2R)\, x_1 - a_1^* x_2 = 0$$

unserer Fläche Φ. Die Drehachse des Gangaxoids Δ gehört σ stets an.

Werden die Punkte eines fest gewählten Schichtenkreises $k =$ konst. von Φ dem Darboux - Zwanglauf $\delta\,(2)$ unterworfen, so liegen ihre Bahnellipsen in Ebenen, deren Ebenenkoordinaten die Beziehungen

$$(12) \qquad u_0^* + u_1^* + u_2^* + ku_3^* = 0 \quad \text{und} \quad u_0^* + a_1^* u_1^* + a_2^* u_2^* + a_3^* u_3^* = 0$$

erfüllen. Die zugehörigen Bahnebenen gehören demnach für festes $k \in \mathfrak{R}$ je einem *Ebenenbüschel* an, dessen Trägergerade A^* und den Punkt $B^* \ldots (1:1:1:k)$ enthält. Für variables $k \in \mathfrak{R}$ erfüllen diese Büschelträger ein *Strahlbüschel* in der von A^*, B^* und $Z_u^* \ldots (0:0:0:1)$ aufgespannten Ebene.

Wir notieren den

Satz 1. *Beim Darboux - Zwanglauf $\delta\,(2)$ erfüllen alle Punkte des Gangraumes Σ, deren Bahnkurven in Ebenen durch einen rastfesten (eigentlichen) Punkt A^* liegen, eine algebraische Fläche dritter Ordnung Φ. Ist A^* ein Punkt der Drehachse des Rastaxoides, so zerfällt Φ in den Gangdrehzylinder und eine Ebene. In allen anderen Fällen handelt es sich bei Φ entweder um die sogenannte Müller'sche*

Fläche oder um eine spezielle Fläche dritter Ordnung mit Kreisen als Schichtenlinien und Fallinien vierter Ordnung, deren Gleichung durch (7) erfaßt wird. Die Punkte jedes solchen Schichtenkreises werden bei δ in Bahnebenen eines Ebenenbüschels durch den ausgezeichneten Punkt A^* geführt.

4. In Σ^* wird die Gruppe der zentrischen Ähnlichkeiten ζ mit festem Zentrum A^* durch

$$x^* = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ a_1^*(u-1) & 1 & 0 & 0 \\ a_2^*(u-1) & 0 & 1 & 0 \\ a_3^*(u-1) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^* \tag{13}$$

mit $u \in \mathfrak{R}$ beschrieben. Setzen wir den Darboux - Zwanglauf δ (2) mit diesen zentrischen Ähnlichkeiten zusammen, so erhalten wir einen *zweiparametrigen äquiformen Bewegungsvorgang* B_2 mit der Darstellung

$$B_2 = \zeta \circ \delta \ldots x^* = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ a_1^*(u-1) & \cos t & -\sin t & 0 \\ 2R(1-\cos t) + a_2^*(u-1) & \sin t & \cos t & 0 \\ 1-\cos t + a_3^*(u-1) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x\,. \tag{14}$$

Da die zentrischen Ähnlichkeiten ζ (13) die das Zentrum A^* enthaltenden Ebenen festhalten, werden alle Punkte der Fläche Φ (7) bei B_2 in *Ebenen* geführt. Punkte P des Gangraumes Σ, die Φ nicht angehören, laufen auf *Kegeln zweiter Ordnung* $\zeta \circ \delta(P)$, die als Verbindung der Bahnellipse $\delta(P)$ von P beim Darboux - Zwanglauf (2) mit dem gemeinsamen Scheitel A^* entstehen. Wir haben damit

Satz 2. *Wird ein Darboux - Zwanglauf δ von zentrischen Ähnlichkteien ζ mit rastfestem Zentrum A^* überlagert, so entsteht ein zweiparametriger äquiformer Bewegungsvorgang $B_2 = \zeta \circ \delta$, bei dem die Punkte einer Fläche* 3. *Ordnung Φ* (7) *des Gangraumes Σ in Ebenen durch A^* gleiten, während allgemeine Punkte des Gangraumes an Kegel zweiter Ordnung mit gemeinsamer Spitze A^* gebunden sind.*

Damit sind Beispiele für äquiforme Zwangläufe mit ∞^2 ebenen Punktbahnen gefunden. Wir haben dabei nur t und u als Funktionen eines neuen Zeitparameters v anzusehen. Wird als Ausgangszwanglauf statt des Darboux - Zwanglaufs δ der euklidischen Bewegungsgruppe einer der von A. Karger in [2] angegebenen äquiformen Zwangläufe mit durchwegs ebenen Bahnen als Ausgangszwanglauf gewählt, so entsteht bei Überlagerung mit beliebigen zentrischen Ähnlichkeiten mit rastfestem Zentrum A^* analog ein zweiparametriger äquiformer Bewegungsvorgang mit ∞^2 ebenen Bahnflächen. Die fraglichen Punkte des Gangraumes Σ erfüllen wie im vorgeführten Fall eine algebraische Fläche dritter Ordnung Φ. Da bis auf wenige Ausnahmen die von A. Karger angegebenen Zwanglaufklassen allgemeine Punkte des Gangraumes auf Kurven zweiter Ordnung führen, sind die zugehörigen Punkte beim zusammengesetzten Bewegungsvorgang im allgemeinen wieder an Kegel zweiter Ordnung mit gemeinsamem Scheitel A^* gebunden.

Ob allerdings auf diese Art alle äquiformen Zwangläufe mit ∞^2 ebenen Bahnen erzeugbar sind, ist bislang unbekannt und soll in einer weiteren Arbeit geklärt werden.

5. Der Fall $R = 0$ verdient besonderes Interesse: Der Ausgangszwanglauf δ ist dann der *vollkommen steile Darbouxsche Umschwung*. Da alle auf Drehzylindern um die x_3^*-Achse liegenden Punkte A^* auf kongruente Flächen Φ (7) führen, dürfen wir hier $A^* \ldots (1 : 0 : a_2^* : 0)$ ansetzen. Die zugehörige Fläche Φ erhält die Normalform

$$(15) \qquad (x_1^2 + x_2^2)(x_0 + x_3) = a_2^* x_0^2 x_2 .$$

Hier liegt daher bei $a_2^* \neq 0$ stets Typ B vor — Φ ist *Müller'sche Fläche* mit der Umschwungachse w als Leitgerade. Längs w wird Φ von der Ebene $x_2 = 0$ berührt; der Schnitt von Φ mit der Ebene $x_1 = 0$ zerfällt in w und die *gleichseitige Hyperbel* $x_2(x_0 + x_3) = a_2^* x_0^2$.

Abbildung 1 zeigt ein Bild einer dieser Flächen Φ und einige Bahnkurven, deren Tangenten zum Ausgangszeitpunkt den Punkt A^* enthalten.

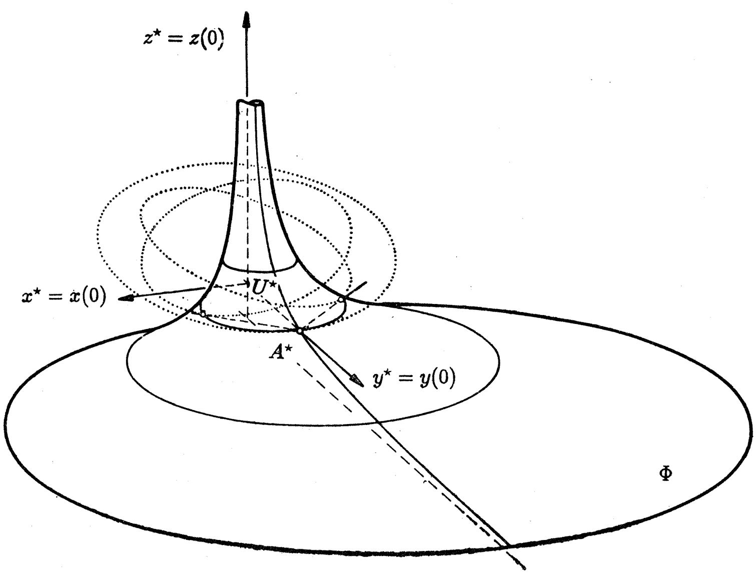

Fig. 1

6. A. Karger gibt in [2] alle äquiformen Zwangläufe mit durchwegs ebenen Bahnen an. Dabei zeigt sich, daß bei zwei dieser Typen ([2], Formel (18) und (20)) nicht alle Ebenen des Rastraumes Σ als Bahnebenen auftreten — wir wollen diese (übrigens zweiparametrigen) Fälle *trivial* nennen. In den anderen Fällen ([2], Formel (17), (19) und (21)) sind die *allgemeinen Bahnkurven Kegelschnitte desselben affinen Typs.*[3]) Wir wollen sie *nichttriviale Äquiformzwangläufe mit durchwegs ebenen Bahnen* nennen.

Für sie läßt sich überraschend folgendes Ergebnis beweisen, das eine einheitliche Erzeugung dieser Zwangläufe aus den Darboux - Zwangläufen δ bezüglich der Bewegungsgruppe des E_3 möglich macht. Es gilt der

Satz 3. *Gegeben sei ein Darboux - Zwanglauf δ des dreidimensionalen euklidischen Raumes E_3. Wir wählen einen rastfesten Punkt A^* und bestimmen die im Gangraum zugehörige Fläche Φ (7). Die Zusammensetzung der Gruppe der Ähnlichkeiten mit festem Zentrum A^* und des Darboux - Zwanglaufes δ ergibt einen zweiparametrigen äquiformen Bewegungsvorgang B_2. Ein nicht auf Φ gelegener gangfester Punkt P wird dabei auf einem Bahnkegel zweiter Ordnung geführt. In diesem B_2 wählen wir nun einen Zwanglauf so aus, daß die Bahnkurve von P ein beliebiger nichtzerfallender ebener Schnitt k^* des entsprechenden Bahnkegels zweiter Ordnung ist. Dann gilt:*

Alle nichttrivialen Äquiformzwangläufe mit durchwegs ebenen Bahnen des dreidimensionalen euklidischen Raumes E_3 lassen sich durch so eine Überlagerung eines Darboux - Zwanglaufes δ der euklidischen Bewegungsgruppe mit einem geeigneten Ähnlichkeitszwanglauf ζ zusammensetzen. Je nach Lage des Ausgangspunktes A^* und Typ des Kegelschnitts k^* stellen sich die verschiedenen von A. Karger angegebenen Klassen nichttrivialer Äquiformzwangläufe mit durchwegs ebenen Bahnen ein.

Beweis. Um die in [2] angegebenen Normalformen auch wirklich alle zu erhalten, legen wir den Darboux - Zwanglauf δ in der allgemeinen Darstellung

$$(16)\qquad \delta \ldots x^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ A(1-\cos t) + B\sin t & \cos t & -\sin t & 0 \\ C(1-\cos t) + D\sin t & \sin t & \cos t & 0 \\ E(1-\cos t) + F\sin t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

mit reellen Konstanten A, B, C, D, E, F zugrunde. Wir überlagern mit der Gruppe der Ähnlichkeiten mit Fixpunkt $A^* \ldots (1 : a_1^* : a_2^* : a_3^*)$ und erhalten den zweiparametrigen äquiformen Bewegungsvorgang

$$(17)\qquad B_2 \ldots x^* = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ A(1-\cos t) + B\sin t + a_1^*(u-1) & \cos t & -\sin t & 0 \\ C(1-\cos t) + D\sin t + a_2^*(u-1) & \sin t & \cos t & 0 \\ E(1-\cos t) + F\sin t + a_3^*(u-1) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x\,.$$

Bezeichne Φ wieder die Fläche dritter Ordnung des Gangraumes Σ, deren Punkte bei (16) Bahnen in Ebenen durch A^* besitzen. $Y \ldots (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ $(y_0 \neq 0)$ sei

[3]) Dies in Übereinstimmung mit Ergebnissen von H. Vogler [7].

ein nicht auf Φ gelegener eigentlicher Punkt des Gangraumes Σ. Wir bestimmen nun die Streckfaktoren $u = u(t)$ so, daß die Bahnkurve von Y beim zugehörigen in B_2 (17) enthaltenen Zwanglauf η eben ist, also eine Gleichung der Bauart $u_0^* x_0^* + u_1^* x_1^* + u_2^* x_2^* + u_3^* x_3^* = 0$ mit gewissen Konstanten $u_0^* : \ldots : u_3^* \neq 0 : \ldots : 0$ erfüllt. Dabei sei vorausgesetzt, daß diese Ebene den ausgezeichneten Punkt A^* nicht enthält. Die Streckfaktoren $u(t)$ besitzen dann die Darstellung

$$u(t) = G(1 - \cos t) + H \sin t + J \tag{18}$$

mit reellen Konstanten G, H und J. Der zugehörige äquiforme Zwanglauf η führt ersichtlich alle Punkte des Gangraumes (nicht nur die von Φ) auf ebenen Bahnen.[4]) Daß so alle nichttrivialen äquiformen Zwangläufe mit durchwegs ebenen Bahnen erfaßt sind, zeigt folgender Vergleich mit den in [2] Formel (17), (19) und (21) angegebenen Normalformen dieser Zwangläufe: Auf die dort angegebenen Parameterdarstellungen der entsprechenden Zwangläufe ist in allen drei Fällen die durch

$$s := \frac{2}{C_2 + \cos t \sqrt{(C_2^2 + 4C_1)}} \tag{19}$$

festgelegte Parametertransformation auszuüben. Die entsprechenden Formeln gehen in solche über, die nach geeigneter Wahl der Konstanten A bis J aus denen für den Zwanglauf η hervorgehen. Die dazu nötige (einfache, aber umfangreiche) Rechnung sei dem Leser überlassen. q.e.d.

Literaturverzeichnis

[1] *O. Bottema, B. Roth:* Theoretical kinematics. North Holland, Amsterdam 1979.

[2] *A. Karger:* Similarity motions in E_3 with plane trajectories. Apl. Mat. 26 (1981), 194—201.

[3] *A. Karger, J. Novák:* Space Kinematics and Lie groups. Gordon and Breach, New York 1985.

[4] *E. Müller:* Dia axiale Inversion. Jber.d.DMV 25 (1916), 209—251.

[5] *O. Röschel:* Räumliche Zwangläufe mit einer zweiparametrigen Schar ebener Bahnkurven I, II. Sb. d. Österr. Akad. Wiss. 193 (1984), 471—484, 557—567.

[6] *H. Vogler:* Räumliche Zwangläufe mit ebenen Bahnkurven. Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungszent. Graz 162 (1981), 1—17.

[7] *H. Vogler:* Über Affinzwangläufe, bei denen die Punkte einer Geraden ebene Bahnen durchlaufen. Vortragsausz. d. 11. Koll. Diffgeom. Darmstadt (1986), 44—57.

[8] *H. Vogler:* Zwangläufe im höchstens vierdimensioanlen euklidischen Raum E_v mit affin durchlaufenen Bahnen. Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungszent. Graz 304 (1989), 128—143.

[9] *W. Wunderlich:* Flächen mit ebenen Fallinien. Monatsh. Math. 65 (1961), 291—300.

[10] *W. Wunderlich:* Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien. Journal f. d. Reine und. Angew. Math. 208 (1961), 204—220.

[11] *W. Wunderlich:* Kubische Zwangläufe. Sb. d. Österr. Akad. Wiss. 193 (1984), 45—68.

Anschrift des Autors: Otto Röschel, Institut für Geometrie, TU - Graz, Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz, Austria.

[4]) Die Bahnen sind sogar Kegelschnitte, da ihre Parameterdarstellung nur lineare Terme in sin t und cos t enthält.