Applications of Mathematics

Hermann Schaal

Bemerkungen zur n-dimensionalen reellen Möbiusgeometrie.

Applications of Mathematics, Vol. 36 (1991), No. 2, 145–148

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104451

36 (1991) APPLICATIONS OF MATHEMATICS No. 2, 145–148

BEMERKUNGEN ZUR n-DIMENSIONALEN REELLEN MÖBIUSGEOMETRIE

HERMANN SCHAAL

(Eingegangen am 29. September 1989)

Summary. Dieser Artikel befaßt sich mit den Gründen der reellen n-dimensionalen Möbiusgeometrie. Hier werden 2 Behauptungen bewiesen: 1) Die Möbiustransformationen sind die einzigen M-spärentreuen Bijektionen von $M^n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$; 2) Jede Möbiustransformation ist Produkt von maximal $n + 2$ Spiegelungen, wobei neben Spiegelungen an Hyperebenen höchstens zwei Spiegelungen an Hypersphären benötigt werden.

Keywords: Möbius geometries.

AMS Classification: 51B10.

Herr Z. Jankovský hat in seinem Vortrag [3] am 4. 5. 1989 beim Fritz-Hohenberg-Gedächtniskolloquium in Seggau bei Graz einen analytischen Aufbau der Möbiusgeometrie für beliebige Dimensionen $n \in \mathbb{N}$ entwickelt und dabei folgende Definition aus [1, S. 22] zugrunde gelegt.

Definition 1. *Eine auf $M^n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ operierende Möbiustransformation ist ein endliches Produkt von Spiegelungen an Hyperebenen oder Hypersphären (kurz M-Sphären).*

Neben anderen Eigenschaften folgt daraus, daß jede Möbiustransformation M-sphärentreu ist. Ergänzend dazu kann bemerkt werden:

1) Die Möbiustransformationen sind die *einzigen* M-sphärentreuen Bijektionen von M^n,

2) jede Möbiustransformation ist Produkt von maximal $n + 2$ Spiegelungen, wobei neben Spiegelungen an Hyperebenen höchstens zwei Spiegelungen an Hypersphären benötigt werden.

Zu 1). Sei $\varphi: M^n \to M^n$ eine M-sphärentreue Bijektion. Im *Fall a)* $\infty^\varphi = \infty$ ist $\varphi \mid \mathbb{R}^n$ eine hyperebenentreue Bijektion von $\mathbb{R}^n$ und damit geradentreu. Die geradentreuen Bijektionen von $\mathbb{R}^n$ sind die Affinitäten [4, S. 200]. Eine Affinität, die eine Hypersphäre in eine Hypersphäre abbildet, ist eine Ähnlichkeit [4, S. 101–102] mit einem Verzerrungsfaktor $p > 0$. Die Ähnlichkeit $\varphi \mid \mathbb{R}^n$ ist eine Kongruenzabbildung (also gleich- oder gegensinnige Bewegung) oder Produkt einer Kongruenzabbildung mit einer Streckung (Homothetie) σ aus einem beliebigen Punkt $S \in \mathbb{R}^n$ und Faktor $p > 0$ [4, S. 80], denn $\beta := (\varphi \mid \mathbb{R}^n) \circ \sigma^{-1}$ ist eine Kongruenzabbildung und $\varphi \mid \mathbb{R}^n = \beta \circ \sigma$.

Im *Fall b)* $\infty^\varphi =: U \in \mathbb{R}^n$ sei σ_1 die Spiegelung an der Hypersphäre um U mit Radius r. Dann besitzt $\varphi \circ \sigma_1$ den Fixpunkt ∞. Also ist $(\varphi \circ \sigma_1) \mid \mathbb{R}^n$ nach Fall a) eine Ähnlichkeit $\beta \circ \sigma$, wobei $S = U$ wählbar ist. Mit $\infty^\sigma := \infty$ wird $\sigma_2 := \sigma \circ \sigma_1$ die Spiegelung and der Hypersphäre um U mit Radius $r_2 = r/\sqrt{p}$. Dies ergibt $\varphi = \beta \circ \sigma_2$, so daß zusammenfassend gilt (für $n = 2$ oder $n = 3$ siehe [2, S. 121, 138]:

Satz 1. *Jede M-sphärentreue Bijektion $\varphi\colon M^n \to M^n$ ist eine duch $\infty \mapsto \infty$ erweiterte Ähnlichkeit oder das Produkt einer durch $\infty \mapsto \infty$ erweiterten Kongruenzabbildung und einer Spiegelung an einer Hypersphäre mit Mittelpunkt $U = \infty^\varphi$.*

Folgerung. Da jede Kongruenz Produkt endlich vieler Spiegelungen und jede Streckung Produkt zweier Spiegelungen an konzentrischen Hypersphären ist, sind die in Definition 1 erklärten Möbiustransformationen die einzigen M-sphärentreuen Bijektionen von M^n. Es bietet sich daher an, Definition 1 zu ersetzen durch

Definition 2. *Eine auf M^n operierende Möbiustransformation ist eine M- sphärentreue Bijektion von M^n,*
um dann den Inhalt von Definition 1 als *Satz* zu erhalten.

Zu 2). Die maximale Anzahl der zur Darstellung von φ benötigten Spiegelungen ergibt sich wie folgt. Nach [4, S. 82] hat jede Ähnlichkeit $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bezüglich kartesischer Koordinaten $\boldsymbol{x}$ die mit einer orthogonalen n, n-Matrix A, einem Faktor $p > 0$ und einem Translationsvektor $\boldsymbol{b}$ gebildete Darstellung

$$\alpha \ldots \qquad \boldsymbol{x}' = pA\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\,.$$

Für gleichsinnige Ähnlichkeiten gilt $|A| = 1$, für gegensinnige $|A| = -1$. Die in 1) Fall a) genannte Zerlegung $\alpha = \beta \circ \sigma$ ist durch

$$\beta \ldots \qquad \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \frac{1}{p}(\boldsymbol{b} - (1 - p)\boldsymbol{s})$$

und

$$\sigma \ldots \qquad \boldsymbol{x}'' = p\boldsymbol{x}' + (1 - p)\,\boldsymbol{s}$$

bestimmt, wobei $\boldsymbol{s}$ das Zentrum S der Streckung festlegt.

Die euklidische Normalform N der Matrix A wird von Elementen 1 oder -1 oder eigentlich orthogonalen 2,2-Untermatrizen längs der Hauptdiagonale gebildet

[4, S. 84–86]. Besitzt α einen Fixpunkt F, so kann $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{s} = \boldsymbol{o}$ erreicht werden. Jede Zeile von N mit Element -1 bedeutet die Spiegelung an einer Hyperebene, jede Doppelzeile von N mit einer 2,2-Untermatrix bedeutet das Produkt zweier Spiegelungen an Hyperebenen. Für $p = 1$ reichen also maximal n Spiegelungen an Hyperebenen aus, für $p \neq 1$ kommt die Zerlegung von σ in zwei Spiegelungen an konzentrischen Hypersphären um S hinzu, so daß im Fall eines Fixpunktes $n + 2$ Spiegelungen ausreichen. Bei steigender Dimension des Fixpunktraumes von α erniedrigt sich die Zahl der benötigten Spiegelungen, wie ich bei einer vergleichbaren Situation in [5] dargelegt habe.

Besitzt α keinen Fixpunkt, so ist notwendig $p = 1$ [4, S. 84], also $\alpha = \beta$. Die Translationsspalte $\boldsymbol{b}$ kann dann soweit reduziert werden, daß nur ein Element nicht verschwindet, und zwar in einer Zeile, in der in N ein Element 1 steht. Diese eine Zeile bedeutet eine Translation, also das Produkt von zwei Spiegelungen an parallelen Hyperebenen. Die anderen $n - 1$ Zeilen sind wie im Fixpunktfall als Produkt von maximal $n - 1$ Spiegelungen darstellbar. Im fixpunktfreien Fall reichen daher $n + 1$ Spiegelungen zur Darstellung von α aus.

Berücksichtigt man noch, daß gleichsinnige Abbildungen eine gerade, gegensinnige eine ungerade Anzahl von Spiegelungen erfordern, so gilt zusammenfassend als Ergänzung zu [1, S. 23, 42], [3], [4, S. 88]:

Satz 2. *Jede Kongruenzabbildung von $\mathbb{R}^n$ ist Produkt von maximal $n + 1$ Spiegelungen an Hyperebenen. Jede Ähnlichkeit (aber nicht Kongruenz) ist Produkt von maximal n Spiegelungen an Hyperebenen und 2 Spiegelungen an konzentrischen Hypersphären. Jede Möbiustransformation ist (gegebenenfalls nach Ergänzung von $\infty \mapsto \infty$) eine Ähnlichkeit oder das Produkt einer Kongruenzabbildung und einer Spiegelung an einer Hypersphäre; je nachdem ist sie Produkt von maximal n bzw. $n + 1$ Spiegelungen an Hyperebenen und 2 bzw. 1 Spiegelung je an einer Hypersphäre. Ist die daraus resultierende Maximalzahl von M-Spiegelungen bei gleichsinnigen Abbildungen ungerade oder bei gegensinnigen gerade, so reduziert sich die maximal benötigte Anzahl der Spiegelungen an Hyperebenen um 1.*

Literatur

[1] *Alan F. Beardon:* The Geometry of Discrete Groups. Springer-Verlag New York–Heidelberg–Berlin 1983.

[2] *H. S. M. Coxeter:* Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1963.

[3] *Z. Jankovský:* Zur Möbiusschen Geometrie im n-dimensionalen Raum. Fritz Hohenberg Gedächtniskolloquium Seggauberg, 30. 4.–6. 5. 1989, Tagungsbericht.

[4] *H. Schaal:* Lineare Algebra und Analytische Geometrie Band II. 2. Auflage. Vieweg Verlag Braunschweig 1980.

[5] *H. Schaal:* Zur perspektiven Zerlegung und Fixpunktbestimmung der Affinitäten von $A^n(K)$. Archiv d. Math. 38, 116–123 (1982).

Souhrn

POZNÁMKY K n-DIMENSIONÁLNÍ REÁLNÉ MÖBIOVĚ GEOMETRII

HERMANN SCHAAL

Článek se zabývá základy reálné n-dimensionální Möbiovy geometrie. Jsou dokázána dvě tvrzení: 1) Möbiovy transformace jsou jedinými bijekcemi Möbiova prostoru $M^n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, zachovávajícími M-sféry; 2) Každou Möbiovu transformaci lze rozložit maximálně na $n + 2$ symetrií, z nichž vedle symetrií vůči nadrovinám jsou nejvýše 2 symetrie vůči hypersférám.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *Hermann Schaal,* Universität Stuttgart, Mathematisches Institut B, Abteilung für Angewandte Geometrie, Pfaffenwaldring 57, D-7000 Stuttgart 80.