Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Über die Verallgemeinerung eines gewissen Iterationsverfahrens für die Lösung spezieller linearer algebraischer Gleichungssysteme.

Aplikace matematiky, Vol. 34 (1989), No. 5, 345–350

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104362`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1989

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

ÜBER DIE VERALLGEMEINERUNG EINES GEWISSEN ITERATIONSVERFAHRENS FÜR DIE LÖSUNG SPEZIELLER LINEARER ALGEBRAISCHER GLEICHUNGSSYSTEME

Miroslav Šisler

(Angegangen am 19. 6. 1986)

Summary. Die Arbeit befasst sich mit der Lösung eines linearen algebraischen Gleichungssystems von der Form $Ax = b$, wo A eine nichtsinguläre, eine grosse Anzahl von Nullelementen enthaltende Matrix ist und irgendeine ihre Untermatrizen (nicht notwendig Hauptuntermatrizen) leicht invertierbar sind. Zur Lösung benutzt man ein gewisses mehrparametriges Iterationsverfahren. Die Arbeit befasst sich auch mit Optimierungsfragen des betrachteten Iterationsverfahrens.

Keywords: linear system, iterative method, convergence.

AMC classification: 65F10.

Die Arbeit befasst sich mit der Lösung eines linearen algebraischen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten von der Form

$$Ax = b\,, \tag{1}$$

wo $A = (a_{ij})$ eine nichtsinguläre, eine grosse Anzahl von Nullelementen enthaltende Matrix ist.

Mit N bezeichne man die Menge der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, d.h. $\mathrm{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Es sei ferner $k < n$ und

$$\mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{I}_k = \mathrm{N}\,,$$
$$\mathrm{J}_1 \cup \mathrm{J}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{J}_k = \mathrm{N}$$

seien solche disjunkte Zerlegungen der Menge N, dass die geordneten Mengen I_l, J_l für jede $l = 1, \ldots, k$ eine gleiche Anzahl der Elemente haben. Es gelte für jede l, $1 \leqq l < k$ die Gleichheit $a_{ij} = 0$, wo $i \in \mathrm{I}_l$, $j \in \mathrm{J}_m$, $l < m \leqq k$. Man bezeichne mit P eine Permutationsmatrix, die den Vektor $(1, 2, \ldots, n)$ auf den Vektor $(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_k)$ transformiert, d.h.

$$P(1, 2, \ldots, n)^{\mathrm{T}} = (\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_k)^{\mathrm{T}}\,;$$

ähnlicherweise gelte für die Permutationsmatrix Q die Beziehung

$$Q(1, 2, \ldots, n)^{\mathrm{T}} = (\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2, \ldots, \mathrm{J}_k)^{\mathrm{T}}\,.$$

Aus (1) folgt dann mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Permutationsmatrizen die Gleichung

$$PAQ^{T}Qx = Pb\,.$$

Wenn man $Qx = \tilde{x}$, $Pb = \tilde{b}$, $PAQ^{T} = \tilde{A}$ bezeichnet, geh das System (1) zu der Form

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

über.

Man bezeichne mit $A[\mathrm{I}, \mathrm{J}]$, wo $\mathrm{I} \subset \mathrm{N}$, $\mathrm{J} \subset \mathrm{N}$, eine Submatrix der Matrix A, die die in der i-ten Zeile $(i \in \mathrm{I})$ und gleizeitig in der j-ten Spalte $(j \in \mathrm{J})$ liegenden Elemente der Matrix A enthält, wobei die Ordnung der Zeilen- und Spaltenindexe der Ordnung der Menge I und J entspricht.

Die Matrix $\tilde{A}$ in dem System (2) hat die Blockform

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \tilde{A}_{21}, & \tilde{A}_{22}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{A}_{k1}, & \tilde{A}_{k2}, & \tilde{A}_{k3}, & \ldots, & \tilde{A}_{kk} \end{pmatrix},$$

wo $\tilde{A}_{lm} = A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_m]$, $l \geqq m$, $l = i, \ldots, k$, $m = 1, \ldots, k$ ist.

Die Blöcke oberhalb der Haupdiagonale sind Null gleich, da nach der Voraussetzung $a_{ij} = 0$ für $i \in \mathrm{I}_l$, $j \in \mathrm{J}_m$, $l < m \leqq k$ ist. Man bemerke noch, dass die Matrix $\tilde{A}$ regulär ist, wenn die Diagonalblöcke (d.h. die aus den Elementen a_{ij}, $i \in \mathrm{I}_l$, $j \in \mathrm{J}_l$ zusammengesetzte Submatrizen $\tilde{A}_{ll}[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]$) nichtsingulär sind.

Definiert man jetzt die Matrix $\tilde{B}$ durch die Formel

$$\tilde{B} = I - \tilde{A}\,,$$

geht das System (2) in die Form

$$\tilde{x} = \tilde{B}\tilde{x} + \tilde{b} \tag{3}$$

über; die Matrix $\tilde{B}$ hat dabei eine gleiche Blockstruktur wie die Matrix $\tilde{A}$ und es gilt dann

$$\tilde{B} = (B_{lm})\,, \quad l, m = 1, \ldots, k\,,$$

wo

$$\begin{aligned} B_{ll} &= I - A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]\,, \quad l = 1, \ldots, k\,, \\ B_{lm} &= -A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_m]\,, \quad l = 1, \ldots, k, l > m\,, \\ B_{lm} &= 0\,, \quad l = 1, \ldots, k - 1\,, \quad m > l\,. \end{aligned} \tag{4}$$

ist.

Zur Lösung des Systems (3) verwenden wir jetzt ein, von den Parametern $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ abhängiges und in den Arbeiten [2], [3] definiertes Iterationsverfahren. Mit Rücksicht auf die spezielle Form der Matrix $\tilde{B}$ werden wir aber die Anzahl der Parameter α, β reduzieren; wir werden nur die Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k$ betrachten. Die Iterationsformel hat dann die folgende Form:

(5) $$\tilde{x}_{r+1} = \tilde{V}\tilde{x}_r + \tilde{b}',$$

wo

(6) $$\tilde{V} = \tilde{R}^{-1}\tilde{Q}$$

ist; $\tilde{R}, \tilde{Q}$ sind dabei folgende Blockmatrizen (die Dimensionen ihrer Blöcke entsprechen der Blockzerlegung der Matrix $\tilde{B}$):

$$\tilde{R} = (R_{lm}), \quad \tilde{Q} = (Q_{lm}), \quad l = 1, \ldots, k, \quad m = 1, \ldots, k,$$

wo

$$\begin{aligned} R_{lm} &= \beta_l B_{lm}, \quad l = 1, \ldots, k, \quad m = 1, \ldots, k, \\ R_{ll} &= \beta_l B_{ll} - \alpha_l I, \quad l = 1, \ldots, k, \\ Q_{lm} &= (1 + \beta_l) B_{lm}, \quad l = 1, \ldots, k, \quad m = 1, \ldots, k, \\ Q_{ll} &= (1 + \beta_l) B_{ll} + (\alpha_l - 1) I, \quad l = 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

Aus (4) folgen sofort die Beziehungen

(7) $$\begin{aligned} R_{lm} &= -\beta_l A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_m], \quad l = 1, \ldots, k, \quad l > m, \\ R_{ll} &= \beta_l(I - A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]) + \alpha_l \mathrm{I}, \quad l = 1, \ldots, k, \\ R_{lm} &= O, \quad l = 1, \ldots, k-1, \quad l < m, \\ Q_{lm} &= -(1 + \beta_l) A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_m], \quad l = 1, \ldots, k, \quad l > m, \\ Q_{ll} &= (1 + \beta_l)(I - A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]) + (\alpha_l - 1) I, \quad l = 1, \ldots, k, \\ Q_{lm} &= O, \quad l = 1, \ldots, k-1, \quad l < m. \end{aligned}$$

Die Matrizen $\tilde{R}, \tilde{Q}$ sind also Blockdreiecksmatrizen.

Wenn die Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k$ so gewählt werden, dass die Matrix $\tilde{R}$ nichtsingulär ist, gilt für Eigenwerte λ der Matrix $\tilde{V}$ folgender Satz:

Satz 1. *Die Eigenwerte λ der Matrix $\tilde{V}$ sind genau alle Wurzeln der Gleichung*

(8) $$\det\begin{pmatrix} B_1(I - A[\mathrm{I}_1, \mathrm{J}_1]) - A_1 I, & O, & \ldots, O \\ -B_2 A[\mathrm{I}_2, \mathrm{J}_1], & B_2(I - A[\mathrm{I}_2, \mathrm{J}_2]) - A_2 I, & \ldots, O \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -B_k A[\mathrm{I}_k, \mathrm{J}_1], & -B_k A[\mathrm{I}_k, \mathrm{J}_2], & \ldots, B_k(I - A[\mathrm{I}_k, \mathrm{J}_k]) - A_k I \end{pmatrix} = 0,$$

wo $A_l = 1 - \alpha_l + \lambda\alpha_l$, $B_l = 1 + \beta_l - \lambda\beta_l$, $l = 1, \ldots, k$ ist.

Den Beweis dieses Satzes führen wir nicht an, da der Satz aus dem Satz 1 aus der Arbeit [2] angesichts der Form der Matrix $\tilde{B}$ folgt.

In Anbetracht dessen, dass die Matrix in der Gleichung (8) eine Dreiecksmatrix ist, kann man die Gleichung (8) in der Form

$$\prod_{l=1}^{k} \det\left(B_l(I - A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]) - A_l I\right) = 0 \tag{9}$$

schreiben. Für den Spektralradius der Matrix $\tilde{V}$ gilt der folgende Satz:

Satz 2. *Es seien die Eigenwerte $v_i^{(l)}$ der Matrix $A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]$ in dem Äusseren der mit dem Mittelpunkt an der Realachse und durch die Punkte m_l, M_l, $m_l < 0 < M_l$, $l = 1, \ldots, k$ gehenden Kreislinie. Dann nimmt der Spektralradius der Matrix $\tilde{V}$ seinen Minimalwerte für*

$$\beta_l = -1\,, \quad \alpha_l = 2/[2 - (M_l + m_l)] \tag{10}$$

an und es gilt

$$\varrho(\tilde{V}) = \max_{l=1,\ldots,k} |M_l + m_l|/(M_l - m_l) < 1\,. \tag{11}$$

Beweis. Die Menge der Wurzeln λ der Gleichung (9) besteht angesichts (9) aus den Wurzeln der Gleichungen

$$\det\left(B_l(I - A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]) - A_l I\right) = 0\,, \quad l = 1, \ldots, k\,. \tag{12}$$

Man untersuche die Menge der Wurzeln λ der Gleichung (12) für eine fest gewählte Zahl l. Man unterscheide zwei Fälle.

a) Es sei $B_l = 0$. Dann $1 + \beta_l - \lambda\beta_l = 0$ ist, so dass $\beta_l \neq 0$ oder $\lambda = (1 + \beta_l)/\beta_l$ gilt. Die Gleichung (12) besitzt dann die Form

$$\det\, diag\,\{A_l, \ldots, A_l\} = 0$$

oder $A_l = 1 - \alpha_l + \lambda\alpha_l = 0$. Es muss also

$$0 = 1 - \alpha_l + (1 + \beta_l)/\beta_l\,, \quad \text{d.h.} \quad \alpha_l = -\beta_l$$

gelten. Die Gleichung (12) kann also die Wurzel $\lambda = (\beta_l + 1)/\beta_l$ haben, solange $\alpha_l = -\beta_l$ ist.

b) Es sei $B_l \neq 0$, so dass $1 + \beta_l - \lambda\beta_l \neq 0$ oder $\lambda \neq (\beta_l + 1)/\beta_l$ gilt. Dann kann man die Gleichung (12) in der Form

$$\det\left((I - A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]) - A_l B_l^{-1} I\right) = 0$$

schreiben, woraus folgt, dass $A_l B_l^{-1}$ ein Eigenwert der Matrix $I - A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]$ ist, d.h. $1 - A_l B_1^{-l}$ ein Eigenwert $v_i^{(l)}$ der Matrix $A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]$ ist. Es ist also

$$1 - A_l B_l^{-1} = v_i^{(l)}$$

oder

$$v_i^{(l)} = [\lambda(\alpha_l + \beta_l) - (\alpha_l + \beta_l)]/[\lambda\beta_l - (1 + \beta_l)] .$$

Davon folgt

$$\lambda = [v(1 + \beta_l) - (\alpha_l + \beta_l)]/[v\beta_l - (\alpha_l + \beta_l)] . \tag{13}$$

Aus dem, in der Arbeit [3] eingeführten Hilfssatz, folgt, dass diese Transformation das Äussere des Kreises in der komplexen Ebene v mit dem Mittelpunkt $s_v = (\alpha_l + \beta_l)/\beta_l$ und Radius r_v auf das Innere des Kreises in der Ebene λ mit dem Mittelpunkt $s_\lambda = (1 + \beta_l)/\beta_l$ und Radius

$$r_\lambda = |-\beta_l(\alpha_l + \beta_l) + (1 + \beta_l)(\alpha_l + \beta_l)|\, r_v^{-1}\beta_l^{-2} \tag{14}$$

überführt.

Man setze jetzt voraus, dass die Eigenwerte $v_i^{(l)}$ der Matrix $A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]$ im Äusseren des Kreises liegen, dessen Grenzkreislinie den Mittelpunkt auf der Realachse hat und durch die Punkte m_l, M_l, $m_l < 0 < M_l$ geht. Aufgrund der Optimierung des Spektralradius muss man die Parameter α_l, β_l so wählen, dass die Transformation (13) der oben erwähten Kreislinie auf die Kreislinie in der Ebene λ mit dem Mittelpunkt 0 abbildet. Es muss also

$$s_\lambda = (1 + \beta_l)/\beta_l = 0$$

sein, so dass $\beta_l = -1$ ist. Da $s_v = (\alpha_l + \beta_l)/\beta_l$, wo $\beta_l = -1$ und $s_v = \frac{1}{2}(M_l + m_l)$ ist, es muss

$$\tfrac{1}{2}(M_l + m_l) = 1 - \alpha_l$$

und also auch $\alpha_l = 1 - \frac{1}{2}(M_l + m_l)$ sein. Da $r_v = \frac{1}{2}(M_l - m_l)$ ist, bekommt man aus (14) für den Radius r_λ die Beziehung

$$r_\lambda = |1 - \tfrac{1}{2}(M_l + m_l) - 1|/\tfrac{1}{2}(M_l - m_l) = |M_l + m_l|/(M_l - m_l) .$$

Wir beweisen jetzt, dass $r_\lambda < 1$ für $m_l < 0 < M_l$ gilt. Es sei zuerst $\frac{1}{2}(M_l + m_l) < 0$. Dann ist $r_\lambda = (-M_l - m_l)/(M_l - m_l) < -m_l/-m_l = 1$. Falls $\frac{1}{2}(M_l + m_l) \geqq 0$ gilt, dann gilt $r_\lambda = (M_l + m_l)/(M_l - m_l) < M_l/M_l = 1$, was zu beweisen war. Da $\beta_l = -1$ ist, kann die Zahl $\lambda = (\beta_l + 1)/\beta_l = 0$ den Spektralradius nicht beeinflussen. Dadurch ist der Satz 2 bewiesen.

Bemerkung. Wenn $\mathrm{I}_l = \mathrm{J}_l$, $l = 1, \ldots, k$ ist, dann sind die Matrizen $A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]$ die Hauptuntermatrizen der Matrix A und sie sind also nichtsingulär infolge der Regularität der Matrix A. Die Voraussetzung des Satzes 2 über die Eigenwerte der Matrizen $A[\mathrm{I}_l, \mathrm{J}_l]$ ist dann automatisch erfüllt.

Literaturverzeichnis

[1] *D. M. Young:* Iterative solution of large systems. Academic Press, 1971, New York and London.
[2] *M. Šisler:* Über ein mehrparametriges Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit einer dünnen Matrix. Apl. mat. 31 (1986), 420—426.
[3] *M. Šisler:* Beitrag zu mehrparametrigen Iterationsverfahren für spezielle lineare Gleichungssysteme. Apl. mat. 34 (1989), 265—273.

Souhrn

O ZOBECNĚNÍ JISTÉ VÍCEPARAMETRICKÉ ITERAČNÍ METODY PRO ŘEŠENÍ SPECIÁLNÍCH SOUSTAV LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

MIROSLAV ŠISLER

Práce se zabývá řešením soustavy lineárních algebraických rovnic $Ax = b$, kde A je regulární matice obsahující velké množství nulových prvků a jejíž některé submatice (nikoliv nutně hlavní) jsou snadno invertovatelné. K řešení se využívá jisté víceparametrické iterační metody. Práce se zabývá též otázkami optimalisace použité metody.

Резюме

ОБ ОБОБЩЕНИИ ОДНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

MIROSLAV ŠISLER

В работе рассматривается решение системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, где матрица A-невырожденная, содержит большое число нулей и для некоторых ее подматриц (не обяательно главных) легко находится матрица обратная. Для решения используется некоторый итерационный метод, зависящий от большего числа параметров. Исследован вопрос отпимизации сходимости метода.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Miroslav Šisler,* CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.