Aplikace matematiky

Zdeněk Jankovský; Miroslav Šejdl

Zur äquiformen Geometrie in der Ebene

Aplikace matematiky, Vol. 32 (1987), No. 1, 57–62

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104236`

32 (1987) APLIKACE MATEMATIKY No. 1, 57—62

ZUR ÄQUIFORMEN GEOMETRIE IN DER EBENE

ZDENĚK JANKOVSKÝ, MIROSLAV ŠEJDL, Praha

(Eingegangen am 8. Oktober 1985)

Zusammenfassung. Im Artikel werden die Integral- und Differentialgrundinvarianten (Bogen, Krümmung) der ebenen Kurve angesichts der äquiformen Gruppe ($\mathscr{E}$-Gruppe) bei der Anwendung der komplexen Symbolik hergeleitet. Weiter werden die $\mathscr{E}$-minimalen Kurven, $\mathscr{E}$-Geraden und $\mathscr{E}$-Kreise von der $\mathscr{E}$-Geometrie festgestellt; im euklidischen Modell handelt es sich um die Geraden, Kreise und logarithmischen Spiralen.

Keywords: Integral- und Differentialgrundinvarianten, geometrische Grundobjekte.
Classification AMS: 53 A 55.

1. EINLEITUNG

Die äquiforme Geometrie in der Ebene wird in der Kinematik des ähnlich-veränderlichen Objektes angewandt (s. z. B. [1]–[3], [6], [8]). In diesem Arktikel werden ihre Integral- und Differentialgrundinvarianten ($\mathscr{E}$-Bogen und $\mathscr{E}$-Krümmung) und geometrische Grundobjekte ($\mathscr{E}$-minimale Kurve, $\mathscr{E}$-Gerade, $\mathscr{E}$-Kreis) bei der komplexen Symbolik (s. [5] und vgl. [7]) als eine Grundlage der äguiformen Kinematik hergeleitet.

Sei R, bzw. K der Körper der reelen, bzw. komplexen Zahlen, E_2 die äquiforme Ebene ($\mathscr{E}$-Ebene). $E_2 \neq \emptyset$ ist eine Menge mit diesen Eigenschaften:

1) $\exists \tau,\ \tau\colon E_2 \xleftrightarrow[\text{bij}]{} K\colon (z) \leftrightarrow z$ (Punkt $\leftrightarrow$ komplexe Zahl)

2) $\forall \tau_1, \tau_2\colon \tau_1\colon E_2 \xleftrightarrow[\text{bij}]{} K;\ \ \tau_2\colon E_2 \xleftrightarrow[\text{bij}]{} K$, $\exists$ eine äquiforme Transformation $\mathscr{E} = \tau_1 \circ \tau_2^{-1}\colon K \to K\colon \mathscr{E}(\zeta) = z$:

$$z = m + n\zeta\,, \tag{1}$$

wo $m, n \in K$, $n \neq 0$; $z, \zeta \in K$.

Diese "$\mathscr{E}$-Transformation" (1) stellt analytisch die Koordinatentransformation, bzw. angesichts der Abbildung τ die Punkttransformation in E_2 dar. Die Menge aller $\mathscr{E}$-Transformationen bildet eine äquiforme Gruppe ($\mathscr{E}$-Gruppe); die $\mathscr{E}$-Gruppe operiert transitiv in E_2 und (1) ist deren analytische Darstellung. Äquiforme Geometrie ($\mathscr{E}$-Geometrie) in der $\mathscr{E}$-Ebene E_2 ist die Geometrie angesichts der $\mathscr{E}$-Gruppe.

§ 2. $\mathscr{E}$-Integral- und $\mathscr{E}$-Differentialinvariante.
Sei

$$\mathscr{C} \equiv \zeta = \zeta(t), \quad t \in \mathscr{I}$$

eine parametrische Darstellung der Kurve $\mathscr{C}$ in der $\mathscr{E}$-Ebene E_2. Ihr Bild bei einer beliebigen $\mathscr{E}$-Transformation (1) ist eine Kurve mit der Parametrisation

$$\mathscr{E}(\mathscr{C}) \equiv z = z(t) = m + n\,\zeta(t). \tag{2}$$

Suchen wir zuerst ein $\mathscr{E}$-Invariantenableitung:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}(t) &= n\,\dot{\zeta}(t) \\ \ddot{z}(t) &= n\,\ddot{\zeta}(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} = \frac{\ddot{\zeta}}{\dot{\zeta}}\,; \quad \dot{\zeta} \neq 0\,(\dot{z} \neq 0) \quad \text{auf} \quad \mathscr{I}.$$

Bezeichnen wir diese $\mathscr{E}$-Invariantenableitung mit

$$\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} = (z, t) \tag{3}$$

Transformieren wir den Parameter t:

$$\Theta\colon \mathscr{I} \to {}'\mathscr{I}\colon \Theta = \Theta(t), \quad \text{wo} \quad \Theta = \bar{\Theta} \in C^2(\mathscr{I}) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\Theta} \neq 0$$

auf $\mathscr{I}$, dann gilt

$$(z, t) = \frac{z''\,.\,\dot{\Theta}^2 + z'\,.\,\ddot{\Theta}}{z'\,.\,\dot{\Theta}} = (z, \Theta)\,.\,\dot{\Theta} + (\Theta, t) \tag{4}$$

wo

$$z' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\Theta}\,; \quad z'' = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\Theta^2}\,.$$

Aus der Beziehung (4) folgt: „Die $\mathscr{E}$-Invariantenableitung (3) ist nich Θ-invariant".

Die $\mathscr{E}$-Invariantenableitung (3) ist in allgemeinen eine komplexe Funktion einer reelen Veränderlichen; bezeichnen wir diese wie folgt:

$$(z, t) = I(t) = I_1(t) + j\,I_2(t)\,; \quad j^2 = -1\,. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$I_1(t) = I_1(\Theta)\,.\,\dot{\Theta} + (\Theta, t) \tag{6}$$

$$I_2(t) = I_2(\Theta)\,.\,\dot{\Theta}\,, \tag{7}$$

wo $I_1(t) = \operatorname{Re} I(t)$, $I_2(t) = \operatorname{Im} I(t)$ auch $\mathscr{E}$-Invarianten sind. Sei

$$I_2(t) \neq 0 \quad \text{auf} \quad \mathscr{I} (\Leftrightarrow I_2(\Theta) \neq 0 \text{ auf } {}'\mathscr{I})\,.$$

Transformieren wir $t \to \Theta$ so, daß

$$I_2(\Theta) = \varepsilon = \operatorname{sign} I_2(t) \tag{8}$$

gilt. Aus (7) und (8) bekommen wir für diese Θ-Transformation:

$$\Theta(t) = \int \varepsilon\, I_2(t)\, \mathrm{d}t\,; \quad t \in \mathscr{I}\,. \tag{9}$$

Satz 1. (9) *ist eine $\mathscr{E}$-Integralinvariante.*

Beweis. Die $\mathscr{E}$-Invarianz (9) folgt aus der $\mathscr{E}$-Invarianz I_2. Θ-Invarianz: übergehen wir zum Parameter τ: $\tau = \tau(t)$. Wir bekommen aus (7):

$$I_2(\Theta)\,.\,\dot{\Theta} = I_2(\tau)\,.\,\dot{\tau}$$

und daraus folgt

$$\Theta(\tau) = \int \varepsilon\, I_2(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,,$$

also die Θ-Invarianz (9).

Definition 1. Den Parameter Θ, der durch die $(\mathscr{E}, \Theta)$-invariante Gleichung (9) festgelegt wird, nennen wir (analogisch zu den Geometrien auf anderen Gruppen) den *$\mathscr{E}$-Bogen* der Kurve $\mathscr{C}$.

$\mathscr{E}$-Bogen ist eine Grundintegralinvariante der Kurve $\mathscr{C}$. Parametrisieren wir $\mathscr{C}$ durch Θ:

$$\mathscr{C} \equiv z = z(\Theta)\,; \quad \Theta \in {}'\mathscr{I}\,;$$

dann bekommen wir für die $\mathscr{E}$-invariante Ableitung der Kurve $\mathscr{C}$:

$$(z, \Theta) = I(\Theta) = I_1(\Theta) + j\varepsilon\,. \tag{10}$$

Aus (4), (9) und (10) folgt

$$I_1(t) + j\, I_2(t) = [I_1(\Theta) + j\varepsilon]\, \varepsilon\, I_2(t) + (\Theta, t)\,,$$

daraus folgt

$$I_1(\Theta) = \frac{I_1(t) - (\Theta, t)}{\varepsilon\, I_2(t)}\,. \tag{11}$$

Aus (9) folgt

$$\dot{\Theta} = \varepsilon\, I_2(t)\,; \quad \ddot{\Theta} = \varepsilon\, \dot{I}_2(t)$$

und weiter

$$(\Theta, t) = \frac{\ddot{\Theta}}{\dot{\Theta}} = \frac{\dot{I}_2(t)}{I_2(t)} \tag{12}$$

ist. Aus (11) und (12) folgt.

$$I_1(\Theta) = \frac{I_1(t)\,.\,I_2(t) - \dot{I}_2(t)}{\varepsilon\, I_2^2(t)} = \Omega\,. \tag{13}$$

Satz 2. *Ω tst eine Grunddifferentialinvariante der Kurve $\mathscr{C}$. Der Rang dieser Invariante ist* 3.

Beweis: Die $\mathscr{E}$-Invarianz folgt aus der $\mathscr{E}$-Invarianz von I_1, I_2; Θ-Invarianz: gehen wir zum Parameter $\sigma = \sigma(t)$ über; aus (6) und (7) bekommen wir:

$$I_1(t) = I_1(\sigma) \,.\, \dot{\sigma} + \frac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}}$$

$$I_2(t) = I_2(\sigma) \,.\, \dot{\sigma}$$

und ferner ist

$$\dot{I}_2(t) = I_2'(\sigma) \,.\, \dot{\sigma}^2 + I_2(\sigma) \,.\, \ddot{\sigma}$$

und aus (13) ergibt sich:

$$I_2(\Theta) = \frac{\left(I_1(\sigma)\,\dot{\sigma} + \dfrac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}}\right)\left(I_2(\sigma) \,.\, \dot{\sigma}\right) - I_2'(\sigma) \,.\, \dot{\sigma}^2 - I_2(\sigma) \,.\, \ddot{\sigma}}{\varepsilon\, I_2^2(\sigma) \,.\, \dot{\sigma}^2} =$$

$$= \frac{I_1(\sigma) \,.\, I_2(\sigma) - I_2'(\sigma)}{\varepsilon\, I_2^2(\sigma)},$$

also die Θ-Invarianz Ω. (13) kann man in der Form

$$\Omega = I_1(\Theta) = (z, \Theta) - j\varepsilon = \frac{z'' - jz'\varepsilon}{z'} \tag{13'}$$

darstellen, wo $z' = \mathrm{d}z/\mathrm{d}\Theta, \ldots$ ist.

Definition 2. Die Differentialinvariante Ω nennen wir die *$\mathscr{E}$-Krümmung* der Kurve $\mathscr{C}$.

3. $\mathscr{E}$-MINIMALE KURVEN, $\mathscr{E}$-GERADEN, $\mathscr{E}$-KREISE

Definition 3. Ein Punkt $(z_0) = (z(t_0))$ der Kurve $\mathscr{C} \equiv z = z(t)$, $t_0 \in \mathscr{I}$ heißt

a) ihr minimaler Punkt $\Leftrightarrow \dot{\Theta}(t_0) = 0$,

b) ihr inflexer Punkt $\Leftrightarrow \Omega(\Theta_0) = 0 \wedge \dot{\Theta}(t_0) \neq 0$

c) ihr kreisförmiger Punkt $\Leftrightarrow \Omega'(\Theta_0) = 0 \wedge \Omega(\Theta_0) \neq 0 \wedge \dot{\Theta}(t_0) \neq 0$.

Definition 4. Die Kurve $\mathscr{C} \equiv z = z(t)$, $t \in \mathscr{I}$, nennen wir

a) $\mathscr{E}$-minimale Kurve $\Leftrightarrow$ alle ihre Punkte sind ihre minimale Punkte

b) $\mathscr{E}$-Gerade $\Leftrightarrow$ alle ihre Punkte sind ihre inflexe Punkte

c) $\mathscr{E}$-Kreis $\Leftrightarrow$ alle ihre Punkte sind ihre kreisförmige Punkte.

ad a) Suchen wir eine parametrische Darstellung von $\mathscr{E}$-minimalen Kurven. Für die $\mathscr{E}$-minimalen Kurven gilt: $\dot{\Theta}(t) = 0$ auf $\mathscr{I} \Leftrightarrow I_2(t) = 0$ auf $\mathscr{I} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\ddot{z}/\dot{z}) = 0$ auf $\mathscr{I}$ $(\ddot{z}_2/\dot{z}_2) = (\ddot{z}_1/\dot{z}_1)$ (bei der Bezeichnung $z = z_1 + jz_2, j^2 = -1$). Daraus folgt

$$z_2 = c_1 z_1 + c_2\,, \quad c_i \in R\,, \quad \text{konst.}\,,$$

und wir bekommen

$$z = z(t) = \alpha\, z_1(t) + \beta\,; \quad z_1 = \bar{z}_1\,, \tag{14}$$

wo α, $\beta \in K$, konst., $\alpha = 1 + jc_1$, $\beta = jc_2$ ist. Daraus folgt:

Satz 3. *$\mathscr{E}$-minimale Kurven sind Kurven mit der parametrischen Darstellung* (14), *d. h. im euklidischen Modell die Geraden.*

ad b) Suchen wir eine parametrische Darstellung der $\mathscr{E}$-Geraden, für die $\mathscr{E}$-Geraden gilt:

$$\Omega = 0 \Leftrightarrow z'' = j\varepsilon z'\,. \quad \text{Legen wir} \quad z' = \mathfrak{z},\, z'' = \mathfrak{z}'\,;$$

wir bekommen

$$\mathfrak{z}' = j\varepsilon\mathfrak{z} \tag{15}$$

Die Lösung von (15) ist

$$\mathfrak{z} = c_1 \exp(j\varepsilon\Theta)$$

und

$$z(\Theta) = c \exp\left(j\varepsilon(\Theta - \Theta_0)\right) + D\,; \quad c \in R\,; \quad D \in K\,,\ \text{konst.} \tag{16}$$

Daraus folgt:

Satz 4. *$\mathscr{E}$-Geraden sind Kurven mit der parametrischen Darstellung* (16), *d.h. im euklidischen Modell die Kreise* (vgl. [6]).

ad c) Suchen wir eine parametrische Darstellung der $\mathscr{E}$-Kreise. Für $\mathscr{E}$-Kreise gilt:

$$\Omega' = 0 \Leftrightarrow \Omega = \Omega_0(\text{konst.}) \Leftrightarrow z'' = (\Omega_0 + j\varepsilon)\, z'\,.$$

Lösen wir diese Gleichung; dann bekommen wir:

$$z = A \exp(B\Theta) + C\,, \tag{17}$$

wo A, B, $C \in K$(konst.) sind. Daraus folgt:

Satz 5. *$\mathscr{E}$-Kreise sind Kurven mit der parametrischen Darstellung* (17), *d. h. im euklidischen Modell die logarithmischen Spiralen mit dem asymptotischen Punkt im Punkte* (*C*); (vgl. [6]).

Literatur

[1] *L. Burmester:* Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegungen der affinveränderlichen, der ähnlich veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme. Zeitschrift für Math. und Physik, 23 (1878), 103—131.

[2] *M. Krause:* Zur Theorie der ebenen ähnlich veränderlichen Systeme. Jahresbericht der deutschen Mathematik-Vereinigung, 19 (1910), 327—329.

[3] *R. Müller:* Über die Momentanbewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene. Jahresbericht der deutschen Mathematik-Vereinigung, 19 (1910), 29—89.
[4] *G. Kowalewski:* Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen. Berlin 1931.
[5] *Z. Pírko:* Einführung in die kinematische Geometrie in der Ebene (Tschechisch). Praha SNTL 1968.
[6] *K. Drábek, J. Chudý:* Beitrag zur $\mathscr{E}$-Kinematik in der Ebene: Gruppentheoretische Grundlagen der $\mathscr{E}$-Bewegung. Acta polytechnica — Práce ČVUT Praha, 3 (IV-2), 1978, 77—92.
[7] *Z. Jankovský:* Zu einigen Fragen der kinematischen Geometrie auf der $\mathscr{M}$-Gruppe (Tschechisch). Acta polytechnica — Práce ČVUT Praha, 7 (IV-3), 1978, 43—51.
[8] *M. Šejdl:* Grundeigenschaften der 1- und 2-parametrigen äquiformen Bewegungen (Tschechisch). Referat zur kandidatischen Fachprüfung, Praha 1985.

Souhrn

K EKVIFORMNÍ GEOMETRII V ROVINĚ

ZDENĚK JANKOVSKÝ, MIROSLAV ŠEJDL

V článku jsou při užití komplexní symboliky odvozeny základní integrální a diferenciální invarianty (oblouk a křivost) rovinné křivky vzhledem k ekviformní grupě ($\mathscr{E}$-grupě). Dále jsou určeny $\mathscr{E}$-minimální křivky, $\mathscr{E}$-přímky a $\mathscr{E}$-kružnice rovinné $\mathscr{E}$-geometrie; v euklidovském modelu jsou to po řadě přímky, kružnice a logaritmické spirály.

Резюме

К ЭКВИФОРМНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

ZDENĚK JANKOVSKÝ, MIROSLAV ŠEJDL

В статье с помощью комплексной символики определяются основные интегральные и дифференциальные инварианты (дуга, кривизна) кривой в эквиформной плоскости. Дальше определены $\mathscr{E}$-минимальная кривая, $\mathscr{E}$-прямая и $\mathscr{E}$-окружность $\mathscr{E}$-геометрии, которым в евклидовой модели соответствтуют прямая, окружность и логарифмическая спираль.

Anschrift der Verfassers: Doc. RNDr. *Zdeněk Jankovský*, CSc., katedra matematiky, fakulta elektrotechnická ČVUT, Suchbátarova 2, 166 27 Praha 6; RNDr. *Miroslav Šejdl*, katedra matematiky a deskriptivní geometrie, fakulta stavební ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.