Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Über ein mehrparametriges Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit einer dünnen Matrix

Aplikace matematiky, Vol. 31 (1986), No. 6, 420–426

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104221`

31 (1986) APLIKACE MATEMATIKY No. 6, 420—426

ÜBER EIN MEHRPARAMETRIGES ITERATIONSVERFAHREN FÜR LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME MIT EINER DÜNNEN MATRIX

Miroslav Šisler

(Eingegangen am 17. 5. 1985)

Zusammenfassung. In der Arbeit wird in gewisses mehrparametriges Iterationsverfahren für die Lösung spezieller linearer Gleichungssysteme untersucht. Es handlet sich um Gleichungssysteme mit einer Matrix, die eine grosse Anzahl von Nullelementen enthält. Bei der Auswahl der Parameter wird die spezielle Struktur der Matrix ausgenützt. Es werden auch Fragen der Konvergenzgeschwindigkeit des untersuchten Verfahrens behandelt.

Keywords: Lineares algebraisches Gleichungssystem, mehrparametriges Iterationsverfahren, Matrix, Eigenwert, Spektralradius, Konvergenzoptimierung.

AMS Classification: 65F10

Die Arbeit befasst sich mit der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten von der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}\,, \tag{1}$$

wo $\mathbf{B}$ eine beliebige, eine grosse Anzahl von Nullelementen enthaltende Matrix bezeichnet. Man setzt nämlich voraus, dass eine gewisse Anzahl von Zeilen existiert, derer Überdiagonalelemente gleich Null sind. Zur Lösung des Systems (1) wird ein mehrparametriges, mit dem in der Arbeit [1] untersuchten Verfahren zusammenhängendes Iterationsverfahren angewendet.

Es sei $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ seien reelle Parameter. Das Iterationsverfahren wird dann folgenderweise definiert:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)\, \mathbf{x}_k + \mathbf{b}'\,, \tag{2}$$

wo

$$\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \tag{3}$$

$$= \mathbf{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)^{-1}\, \mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)\,,$$

$$\mathbf{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \begin{pmatrix} \beta_1 b_{11} + \alpha_1, & \beta_1 b_{12} & \ldots, & \beta_1 b_{1n} \\ \beta_2 b_{21}, & \beta_2 b_{22} + \alpha_2, & \ldots, & \beta_2 b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_n b_{n1}, & \beta_n b_{n2}, & \ldots, & \beta_n b_{nn} + \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{4}$$

(5) $\quad \mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) =$

$$= \begin{pmatrix} (1+\beta_1)\, b_{11} + (\alpha_1 - 1), & (1+\beta_1)\, b_{12}, & \ldots, & (1+\beta_1)\, b_{1n} \\ (1+\beta_2)\, b_{21}, & (1+\beta_2)\, b_{22} + (\alpha_2 - 1), & \ldots, & (1+\beta_2)\, b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (1+\beta_n)\, b_{n1}, & (1+\beta_n)\, b_{n2}, & \ldots, & (1+\beta_n)\, b_{nn} + (\alpha_n - 1) \end{pmatrix}.$$

Man setze jetzt voraus, dass die von Null verschiedene, über der Hauptdiagonale liegende, Elemente in der $i_1, i_2, \ldots, i_p$-ten Zeile enthalten sind und dass die übrigen über der Hauptdiagonale liegenden Elemente der Matrix $\mathbf{B}$ Null gleich sind. Falls man $\beta_{i_1} = \beta_{i_2} = \ldots = \beta_{i_p} = 0$ setzt, ist die Matrix (4) offensichtlich eine obere Dreieckmatrix und das Iterationsverfahren (2) ist leicht durchführbar; dabei muss man aber die Parameter α_i, β_i, $i = 1, \ldots, n$ so wählen, dass die Diagonalelemente $\beta_i b_{ii} + \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$ der Matrix (4) von Null verschiedene sind (die Matrix (4) ist dann nichtsingulär). Man bemerke noch, dass $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_p}$ von Null verschieden sein müssen, nachdem $\beta_{i_1} = \ldots = \beta_{i_p} = 0$ ist.

Für die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ gilt der folgende Satz:

Satz 1. *Die Eigenwerte λ der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ sind genau alle Wurzeln der Gleichung*

$$\text{(6)} \qquad \det \begin{vmatrix} B_1 b_{11} - A_1, & B_1 b_{12}, & \ldots, & B_1 b_{1n} \\ B_2 b_{21} & B_2 b_{22} - A_2, & \ldots, & B_2 b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_n b_{n1}, & B_n b_{n2}, & \ldots, & B_n b_{nn} - A_n \end{vmatrix} = 0\,,$$

wo $A_i = 1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i$, $B_i = 1 + \beta_i - \lambda\beta_i$, $i = 1, \ldots, n$ ist.

Beweis. Die Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$, wenn soein Vektor $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_n) \neq \mathbf{o}$ existiert, für den

$$\text{(7)} \qquad \mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)\, \mathbf{x} = \lambda \mathbf{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)\, \mathbf{x}$$

gilt. Diese Beziehung ist mit den Beziehungen

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} (1 + \beta_1 - \lambda\beta_1)\,(b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n) &= (1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)\, x_1\,, \\ (1 + \beta_2 - \lambda\beta_2)\,(b_{21}x_1 + \ldots + b_{2n}x_n) &= (1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2)\, x_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1 + \beta_n - \lambda\beta_n)\,(b_{n1}x_1 + \ldots + b_{nn}x_n) &= (1 - \alpha_n + \lambda\alpha_n)\, x_n \end{aligned}$$

äquivalent, d.h. mit der Beziehung (6), wodurch der Satz 1 bewiesen ist.

Nun führen wir die folgende Bezeichnung ein: $\mathbf{B}(j_1, \ldots, j_l)$ bezeichnet eine Submatrix der Matrix $\mathbf{B}$, die durch die Ausstreichung der $j_1, \ldots, j_l$-ten Zeilen und Spalten aus der Matrix $\mathbf{B}$ entsteht. Die gegenseitige Beziehung zwischen den Eigenwerten μ der Matrix $\mathbf{B}$ und den Eigenwerten λ der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ drückt der Satz 2 aus.

Satz 2. *Es seien μ_k, $k = 1, \ldots, n$ Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$. Dann sind die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ genau alle Wurzeln der Gleichungen*

$$\begin{aligned}(9)\quad & (-1)^n \left[A_1 \ldots A_n - \mu_k^n B_1 \ldots B_n\right] + \\ & + (-1)^{n-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_{n-1}\} \cup \{j_n\} = \mathrm{N}} \left[A_{i_1} \ldots A_{i_{n-1}} B_{j_n} - \mu_1^{n-1} B_1 \ldots B_n\right] . \\ & \qquad . \det \mathbf{B}(i_1, \ldots, i_{n-1}) + \\ & + (-1)^{n-2} \sum_{\{i_1,\ldots,i_{n-2}\} \cup \{j_{n-1}, j_n\} = \mathrm{N}} \left[A_{i_1} \ldots A_{i_{n-2}} B_{j_{n-1}} B_{j_n} - \mu_k^{n-2} B_1 \ldots B_n\right] . \\ & \qquad . \det \mathbf{B}(i_1, \ldots, i_{n-2}) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + (-1)^1 \sum_{\{i_1\} \cup \{j_2,\ldots,j_n\} = \mathrm{N}} \left[A_{i_1} B_{j_2} \ldots B_{j_n} - \mu_k B_1 \ldots B_n\right] . \det \mathbf{B}(i_1) = 0 .\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathrm{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_i = 1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, $B_j = 1 + \beta_j - \lambda\beta_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Die Beziehung (9) *kann man auch in folgender Form schreiben*:

$$\begin{aligned}(10)\quad & (-1)^n \left[A_1 \ldots A_n - \mu_k^n B_1 \ldots B_n\right] + \\ & + (-1)^{n-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_{n-1}\} \cup \{j_n\} = \mathrm{N}} \left[A_{i_1} \ldots A_{i_{n-1}} - \mu_k^{n-1} B_{i_1} \ldots B_{i_{n-1}}\right] B_{j_n} . \\ & \qquad . \det \mathbf{B}(i_1, \ldots, i_{n-1}) + \\ & + (-1)^{n-2} \sum_{\{i_1,\ldots,i_{n-2}\} \cup \{j_{n-1}, j_n\} = \mathrm{N}} \left[A_{i_1} \ldots A_{i_{n-2}} - \mu_k^{n-2} B_{i_1} \ldots B_{i_{n-2}}\right] B_{j_{n-1}} B_{j_n} . \\ & \qquad . \det \mathbf{B}(i_1, \ldots, i_{n-2}) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + (-1)^1 \sum_{\{i_1\{ \cup \{j_2,\ldots,j_n\{ = \mathrm{N}} \left[A_{i_1} - \mu_k B_{i_1}\right] B_{j_2} \ldots B_{j_n} . \det \mathbf{B}(i_1) = 0 .\end{aligned}$$

Beweis. Die Beziehung (6) kann in folgender Form überschrieben werden:

$$\begin{aligned}(11)\quad & (-1)^n A_1 \ldots A_n + \\ & + (-1)^{n-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_{n-1}\} \cup \{j_n\} = \mathrm{N}} A_{i_1} \ldots A_{i_{n-1}} B_{j_n} . \det \mathbf{B}(i_1, \ldots, i_{n-1}) + \\ & + (-1)^{n-2} \sum_{\{i_1,\ldots,i_{n-2}\} \cup \{j_{n-1}, j_n\} = \mathrm{N}} A_{i_1} \ldots A_{i_{n-2}} B_{j_{n-1}} B_{j_n} . \det \mathbf{B}(i_1, \ldots, i_{n-2}) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + (-1)^1 \sum_{\{i_1\} \cup \{j_2,\ldots,j_n\} = \mathrm{N}} A_{i_1} B_{j_2} \ldots B_{j_n} . \det \mathbf{B}(i_1) + (-1)^0 B_1 \ldots B_n . \det \mathbf{B} = 0 .\end{aligned}$$

Mit Rücksicht darauf, dass μ_k, $k = 1, \ldots, n$ Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$ sind, d.h. dass $\det(\mathbf{B} - \mu_k \mathbf{E}) = 0$, $k = 1, \ldots, n$ ist, es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}(12)\quad & (-1)^n \mu_k^n + (-1)^{n-1} \mu_k^{n-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_{n-1}\} \subset \mathrm{N}} \det \mathbf{B}(i_1, \ldots, i_n) + \\ & + (-1)^{n-2} \mu_k^{n-2} \sum_{\{i_1,\ldots,i_{n-2}\} \subset \mathrm{N}} \det \mathbf{B}(i_1, \ldots, i_{n-2}) + \ldots \\ & \ldots + (-1)^1 \mu_k \sum_{\{i_1\} \subset \mathrm{N}} \det \mathbf{B}(i_1) + (-1)^0 \det \mathbf{B} = 0 .\end{aligned}$$

Nach der Multiplizierung der Beziehung (12) durch die Zahl $B_1 B_2 \dots B_n$ und nach der Vergleichung mit der Beziehung (11) bekommt man sofort (9), wodurch der Satz 2 bewiesen ist.

Bemerkung. Im Falle, dass die Matrix $\mathbf{B}$ schwach n-zyklisch, d.h. dass $\mathbf{B}$ von der Form

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & b_{1n} \\ b_{21}, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & b_{32}, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & b_{n,n-1}, & 0 \end{pmatrix}$$

ist, sind alle Determinanten der Matrizen $\mathbf{B}$ $(i_1, \dots, i_p)$, $1 \leqq p \leqq n - 1$ Null gleich und aus (6) folgt die Beziehung

$$A_1 \dots A_n = \mu_i^n B_1 \dots B_n$$

oder

$$(1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1) \dots (1 - \alpha_n + \lambda\alpha_n) = \mu_i^n(1 + \beta_1 - \lambda\beta_1) \dots (1 + \beta_n - \lambda\beta_n)\,,$$

was die Beziehung (7) aus der Arbeit [1] ist.

Man bemerke noch, dass wir für die Indexe $i_1, \dots, i_p$ (d.h. für die Indexe der, von Null verschiedene überdiagonale Elemente enthaltenden Zeilen) $\beta_{i_1} = \dots = \beta_{i_p} = 0$ setzen, demzufolge ist in den Gleichungen (6), (9), (10) $B_{i_1} = B_{i_2} = \dots = B_{i_p} = 1$.

Man untersuche jetzt den Fall, wenn die Matrix von spezieller Form ist. Man setze voraus, dass $\mathbf{B}$ eine $n \times n$ Blockmatrix der Form

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11}, & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21}, & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \tag{13}$$

ist, wo $\mathbf{B}_{11}$ eine beliebige $p \times p$, $2 \leqq p \leqq n - 1$ Matrix ist, $\mathbf{B}_{12}$ ist eine $p \times (n - p)$ Nullmatrix, $\mathbf{B}_{21}$ ist eine beliebige $(n - p) \times p$ Matrix und $\mathbf{B}_{22}$ ist eine untere $(n - p) \times (n - p)$ Dreiecksmatrix. Die Matrix $\mathbf{B}$ kann man schematisch folgenderweise darstellen:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & 00000 \\ \dots\dots\dots & 00000 \\ \dots\dots\dots & 00000 \\ \dots\dots\dots & 00000 \\ & \\ \dots\dots\dots & .0000 \\ \dots\dots\dots & ..000 \\ \dots\dots\dots & ...00 \\ \dots\dots\dots & ....0 \\ \dots\dots\dots & ..... \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ n-p \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Es gilt folgender Satz.

Satz 3. *Es sei* $\mathbf{B}$ *eine Matrix der Form* (13). *Die Menge deren Eigenwerte besteht aus den Eigenwerten* μ_i, $i = 1, \ldots, p$ *der Matrix* $\mathbf{B}_{11}$ *und aus den Eigenwerten* $\mu_i = b_{ii}$, $i = p + 1, \ldots, n$ (*Diagonalelemente der Matrix* $\mathbf{B}_{22}$). *Man setze weiter* $\beta_1 = \ldots = \beta_p = 0$, $\alpha_i = \alpha \neq 0$, $i = 1, \ldots, p$ *und wähle man* α_i, β_i, $i = p + 1, \ldots, n$, *so, dass* $\alpha_i + \beta_i b_{ii} \neq 0$ *für* $i = p + 1, \ldots, n$ *gilt. Dann sind die Eigenwerte der Matrix* $\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ *von der Form*

$$\lambda_i = 1 - (1 - \mu_i)/(\alpha_i + \beta_i \mu_i)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{14}$$

Bemerkung. Für $i = 1, \ldots, p$ gilt $\beta_i = 0$, $\alpha_i = \alpha \neq 0$ und die Eigenwerte sind der Form $\lambda_i = 1 - (1 - \mu_i)/\alpha$, wo μ_i die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}_{11}$ sind. Für $i = p + 1, \ldots, n$ kann man (14) in der Form

$$\lambda_i = 1 - (1 - b_{ii})/(\alpha_i + \beta_i b_{ii})$$

schreiben.

Beweis. Falls die Matrix $\mathbf{B}$ der Form (13) ist, folgt aus der Beziehung

$$\det(\mathbf{B} - \mu\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} b_{11} - \mu, & \ldots, & b_{1p}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ b_{p1}, & \ldots, & b_{pp} - \mu, & 0, & \ldots, & 0 \\ b_{p+1,1}, & \ldots, & b_{p+1,p}, & b_{p+1,p+1}, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ b_{n1}, & \ldots, & b_{np}, & b_{n,p+1}, & \ldots, & b_{nn} - \mu \end{vmatrix} = 0$$

die Beziehung $\det(\mathbf{B} - \mu\mathbf{E}) = \det(\mathbf{B}_{11} - \mu\mathbf{E}) \prod_{i=p+1}^{n} (b_{ii} - \mu) = 0$, $i = p + 1, \ldots, n$. Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$ sind einerseits die Eigenwerte μ_i, $i = 1, \ldots, p$ der Matrix $\mathbf{B}_{11}$, anderseits die Zahlen $\mu_i = b_{ii}$, $i = p + 1, \ldots, n$. Nach dem Satz 1 sind die Eigenwerte λ_i der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ Wurzeln der Gleichung (6). Angesichts (13) und $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, p$, es gilt $B_i = 1$, $i = 1, \ldots, p$ und die Gleichung (6) mit $A = 1 - \alpha + \lambda\alpha$ hat die Form

$$\begin{vmatrix} b_{11} - A, & b_{12}, & \ldots, b_{1p}, & 0, & \ldots, 0 \\ b_{21}, & b_{22} - A, & \ldots, b_{2p}, & 0, & \ldots, 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ b_{p1}, & b_{p2}, & \ldots, b_{pp} - A, & 0, & \ldots, 0 \\ B_{p+1}b_{p+1,1}, & \ldots, & \ldots, B_{p+1}b_{p+1,p}, & B_{p+1}b_{p+1,p+1} - A_{p+1}, & \ldots, 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ B_n b_{n1}, & \ldots, & \ldots, B_n b_{np}, & B_n b_{n,p+1}, & \ldots, B_n b_{nn} - A_p \end{vmatrix} = 0$$

Es gilt also

$$\det(\mathbf{B}_{11} - A\mathbf{E}) \prod_{i=p+1}^{n} (B_i b_{ii} - A_i) = 0\,, \quad i = p + 1, \ldots, n\,. \tag{15}$$

Die Gleichung (15) ist erfüllt, wenn entweder $\det(\mathbf{B}_{11} - A\mathbf{E}) = 0$, d.h. $A = \mu_i$, $i = 1, \ldots, p$ ist, oder wenn $B_i b_{ii} - A_i = 0$, $i = p + 1, \ldots, n$ gilt. Aus der Beziehung $A = \mu_i$ gilt angesichts $\alpha \neq 0$ die Beziehung $1 - \alpha + \lambda\alpha = \mu_i$ oder $\lambda_i = 1 - (1 - \mu_i)/\alpha$, $i = 1, \ldots, p$ was die Beziehung (14) ist, da $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, p$, $\alpha_i = \alpha$ gilt. Aus der Beziehung $B_i b_{ii} - A_i = 0$, $i = p + 1, \ldots, n$ folgt $(1 + \beta_i - \lambda\beta_i)\, b_{ii} = 1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i$ oder $(1 + \beta_i)\, b_{ii} - (1 - \alpha_i) = \lambda(\alpha_i - \beta_i b_{ii})$ und angesichts der Voraussetzung $\alpha_i + \beta_i b_{ii} \neq 0$ gilt

$$\lambda = [(1 + \beta_i)\, b_{ii} - (1 - \alpha_i)]/[\alpha_i - \beta_i b_{ii}] =$$
$$= [\alpha_i - 1 + (1 + \beta_i)\, b_{ii}]/[\alpha_i - \beta_i b_{ii}] = 1 - (1 - b_{ii})/(\alpha_i - \beta_i b_{ii}),$$

was wieder angesichts $b_{ii} = \mu_i$, $i = p + 1, \ldots, n$ die Gleichung (14) ist. Dadurch ist der Satz 3 bewiesen.

Bemerkung. Falls irgendeiner der Eigenwerte μ_i der Matrix $\mathbf{B}$ der der Zahl 1 gleich ist, ist angesichts (14) auch der entsprechende Eigenwert λ_i der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ der Zahl 1 gleich.

Der folgende Satz betrifft die Konvergenzoptimierung des untersuchten Iterationsverfahrens.

Satz 4. *Es seien m, M reelle Zahlen mit $m < M < 1$ oder $1 < m < M$. Man setze voraus, dass die Eigenwerte μ_i, $i = 1, \ldots, p$ der Matrix $\mathbf{B}_{11}$ in einem Kreis liegen, dessen Grenzkreislinie die Punkte m, M enthält und deren Mittelpunkt auf der Reallachse liegt. Die Diagonalelemente b_{ii}, $i = p + 1, \ldots, n$ der Matrix $\mathbf{B}_{22}$ seien beliebige, von 1 verschiedene Zahlen. Dann nimmt der Spektralradius $\varrho(\mathbf{V}(\alpha, \ldots, \alpha, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots, 0, b_{p+1}, \ldots, b_n))$ der Matrix $\mathbf{V}(\alpha, \ldots, \alpha, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots, 0, b_{p+1}, \ldots, b_n)$ seinen Minimalwert für $\alpha = \alpha_0 = [2 - (m + M)]/2$, $\alpha_i = 1$, $\beta_i = -1$, $i = p + 1, \ldots, n$ an und es gilt*

$$\varrho(\mathbf{V}(\alpha_0, \ldots, \alpha_0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, -1, \ldots, -1)) = = (M - m)/[2 - (m + M)] < 1. \tag{16}$$

Beweis. Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$ bilden einerseits die Eigenwerte μ_i, $i = 1, \ldots, p$ der Matrix $\mathbf{B}_{11}$ und für die übrigen Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$ gilt $\mu_i = b_{ii}$, $i = p + 1, \ldots, n$. Lege man also $\alpha_i = 1$, $\beta_i = -1$ für $i = p + 1, \ldots, n$, aus (14) folgt

$$\lambda_i = 1 - (1 - b_{ii})/(1 - b_{ii}) = 0, \quad i = p + 1, \ldots, n.$$

Aus (14) folgt ferner, dass für die, den Eigenwerten μ_i, $i = 1, \ldots, p$ entsprechende Zahlen λ_i aus (14) angesichts $\beta_i = 0$, $\alpha_i = \alpha$ die Beziehung $\lambda_i = 1 - (1 - \mu_i)/\alpha$ folgt. Die Transformation $\lambda = 1 - (1 - \mu)/\alpha$ transformiert offensichtlich eine durch die Punkte m, M gehende Kreislinie in der komplexen Ebene μ mit dem Mittelpunkt auf der reellen Achse in eine Kreislinie in der Ebene λ, derer Mittelpunkt wieder auf der reellen Achse liegt und die durch die Punkte $\lambda_m = 1 - (1 - m)/\alpha$, $\lambda_M =$

$= 1 - (1 - M)/\alpha$ geht. Die den Eigenwerten μ_i entsprechende Eigenwerte λ_i liegen dann in dem, mit ober erwähnten Kreislinie in der Ebene λ begrenzten Kreis. Es ist klar, dass den optimalen Spektralradius die Matrix $\boldsymbol{V}$ in dem Falle annimmt, wenn $\lambda_m = -\lambda_M$, d.h. wenn $1 - (1 - m)/\alpha = -1 + (1 - M)/\alpha$ ist. Daher folgt $\alpha = \alpha_0 = [2 - (m + M)]/2$ und die Beziehung (16). Dadurch ist der Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] *M. Šisler:* Über ein mehrparametriges Iterationsverfahren für p-zyklische lineare Gleichungssysteme. Apl. mat. 28 (1983), 44—54.

[2] *D. M. Young:* Iterative solution of large systems. Academic Press, 1971, New York and London.

Souhrn

O JEDNÉ VÍCEPARAMETRICKÉ ITERAČNÍ METODĚ PRO SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC S ŘÍDKOU MATICÍ

MIROSLAV ŠISLER

V práci je zkoumána jistá víceparametrická iterační metoda pro řešení speciálních soustav lineárních algebraických rovnic. Jedná se o soustavy s maticí obsahující velký počet nulových prvků. Při volbě parametrů se využívá speciální struktury matice. Zkoumají se též otázky rychlosti konvergence metody.

Резюме

ОБ ОДНОМ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕДКОЙ МАТРИЦЕЙ

MIROSLAV ŠISLER

В работе исследуется один итерационный метод для решения систем линейных алгебраических уравнений специального типа, зависящий от многих параметров. Речь идёт о системах, матрица которых содержит большое число нулевых элементов. Для выбора параметров используется специальная структура матрицы системы. Исследуются также вопросы скорости сходимости метода.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Miroslav Šisler,* CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.