Rudolf L. Voller

Iterative Einschliessungen von Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen durch Newton-ähnliche Iterationsverfahren

Aplikace matematiky, Vol. 31 (1986), No. 1, 1–18

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104180`

31 (1986) APLIKACE MATEMATIKY No. 1, 1—18

ITERATIVE EINSCHLIESSUNGEN VON LÖSUNGEN NICHTLINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DURCH NEWTON-ÄHNLICHE ITERATIONSVERFAHREN

RUDOLF L. VOLLER

(Eingegangen am 22. Februar 1984)

Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir monoton einschließende Newton-ähnliche Iterationsverfahren zur näherungsweisen Lösung verschiedener Klassen von nichtlinearen Differentialgleichungen. Die behandelten Methoden sind auch für nichtkonvexe Nichtlinearitäten anwendbar. Ferner konstruieren wir einschließende Startnäherungen für diese Verfahren, so daß wir die Existenz der Lösungen der gegebenen Differentialgleichungen sichern können. Die Konvergenz der Verfahren wird auch für den Fall bewiesen, daß die Halbordnungkegel der betrachteten Funktionenräume nicht regulär sind. Es werden vier Beispiele angegeben.

AMS Classification: 65J15, 65L10, 65P05.

1. EINLEITUNG

Lassen sich zur näherungsweisen Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen monoton einschließende Iterationsverfahren heranziehen, so gewinnt der Anwender gegenüber lokal konvergenten Methoden zwei Vorteile. Zum einen ist der Einzugsbereich für eine Lösung im Vergleich zu letzteren in der Regel erheblich größer, zum anderen erhält man durch die Einschließungen in einfacher Weise Fehlerabschätzungen, wenn der zugrundegelegte Vektorraum eine Halbordnung und eine Topologie besitzt, die miteinander verträglich sind. Kann man für die Iterationsverfahren sogenannte einschließende Startnäherungen konstruieren, so läßt sich außerdem die Existenzfrage für die gegebene Operatorgleichung häufig vorab beantworten (vgl. [4], [8], [16]), insbesondere für nichtlineare Randwertaufgaben (vgl. [3], [4], [25], [28]). Unter gewissen Voraussetzungen kann man die Lösungen solcher Randweraufgaben nach dem Verfahren der sukzessiven Approximation (SA) iterativ einschließen (vgl. [3], [21], [25], [32]). Läßt sich die Differentialgleichung jedoch als Operatorgleichung der Form

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

schreiben, wobei F eine nichtlineare Abbildung von einer Teilmenge eines halbgeordneten Banachraumes X in einen halbgeordneten Banachraum Y ist, so erzielt man schnellere Konvergenz als bei SA, wenn man das Newton-Verfahren oder geeignete Newtonähnlische Verfahren verwendet. Dabei sind dann aber zusätzliche Voraussetzungen an den Operator F wie Differenzierbarkeit, Konvexität oder Ähnliches zu stellen. Das monotone Newton-Verfahren wird zur Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen beispielsweise in [12], [13], [15], [21] und [30] verwendet. Mit schwächeren Voraussetzungen kommt man im Vergleich dazu aus, wenn man die Verfahren aus [34] bzw. [35] benutzt. Im folgenden Abschnitt beweisen wir hierzu einen neuen Satz, der neben ähnlichen Sätzen aus [26] und [27] der allgemeinste dieser Art ist. Dabei verzichten wir im Hinblick auf die im weiteren behandelten Beispiele auf spezielle Forderungen an die Halbordnungen in X und Y, insbesondere auf die Regularität des Kegels, die in [26] und [27] gefordert wird (dort wird außerdem stets $X = Y$ gesetzt). Ferner kommen wir anders als die Sätze aus [26], [27], [29], [34] und [35] ohne Operatorhalbordnungen aus. Diesen Satz wendenwir auf verschiedene Arten von Differentialgleichungen an. Er eignet sich daneben auch zur Behandlung diskreter Probleme, wie sie etwa in [6], [23] oder [33] untersucht werden.

Die Existenz von Lösungen zeigen wir mit Hilfe einer Unter- und einer Oberlösung, die wir explizit konstruieren und als Startnäherungen für die Iterationsverfahren verwenden. Die Konvergenz der Iterationsfolgen beweisen wir mit Hilfe induzierter Normen und Halbordnungen. Diese neue Vorgehensweise erweist sich immer dann als zweckmäßig, wenn die zugrundegelegten Funktionenräume keinen regulären Kegel besitzen, so daß ein solcher Beweis nicht wie im Fall nichtlinearer Gleichungssysteme erfolgen kann. Abschließend bestimmen wir dann explizite Näherungslösungen für konkrete Beispiele. Dabei werden die Verfahrensgleichungen gegebenenfalls durch geeignete Ungleichungen ersetzt. Für einige aus der Literatur bekannte Beispiele konnten dadurch verbesserte Einschließungen erzielt werden.

2. MONOTON EINSCHLIESSENDE NEWTON-ÄHNLICHE VERFAHREN

Zunächst stellen wir einige Definition von Begriffen aus der Theorie der halbgeordneten Vektorräume zusammen, die wir aus [4], [5], [7], [8] und [16] übernehmen.

V sei ein Vektorraum über $\boldsymbol{R}$. V heißt halbgeordneter Vektorraum (hVR) genau dann, wenn auf V eine zweistellige, reflexive, antisymmetrische und transitive Relation $\leqq$ definiert ist, die den Bedingungen

(2) $\quad \forall x, y, z \in V: \quad x \leqq y \Rightarrow x + z \leqq y + z$

(3) $\quad \forall \lambda \geqq 0 \quad \forall x, y \in V: \quad x \leqq y \Rightarrow \quad \lambda x \leqq \lambda y$

genügt. Sind x und y zwei Elemente aus V, so verstehen wir unter dem Ordnungsintervall $[x, y]$ die Menge $\{v \in V\colon x \leqq v \leqq y\}$. Ist die Beziehung $x \leqq y$ nicht erfüllt, so gilt $[x, y] = \emptyset$. Die Menge $K := \{v \in V\colon v \geqq 0\}$ nennen wir den Kegel von V. Der Kegel K besitzt wegen (2) und (3) die Eigenschaften $K + K \subset K$; $\forall \lambda \geqq 0$: $\lambda K \subset K$; $x \in K$, $-x \in K \Leftrightarrow x = 0$. Der Kegel K von V heißt erzeugend genau dann, wenn für jedes $v \in V$ Elemente $v_1, v_2 \in K$ existieren mit $v = v_1 - v_2$. Ist V ein Banachraum, so heißt V halbgeordneter Banachraum (hBR) genau dann, wenn der Kegel abgeschlossen ist. Ist V ein hBR, dann heißt der Kegel K von V normal genau dann, wenn es ein $N \in \boldsymbol{R}$ gibt, so daß für alle $x, y \in K$ mit $x \leqq y$ gilt $\|x\| \leqq N\|y\|$. Eine Teilmenge V_0 von V heißt o-beschränkt genau dann, wenn es ein Ordnungsintervall aus V gibt, das V_0 enthält. Ist V ein hBR, so heißt der Kegel K von regulär genau dann, wenn jede o-beschränkte, monotone Folge aus V konvergiert. Ist W ein weiterer hVR, so heißt eine Abbildung $F\colon D \subset V \to W$ invers-isoton genau dann, wenn für alle $x, y \in D$ mit $F(x) \leqq F(y)$ folgt $x \leqq y$. $L(V, W)$ bezeichne den Raum der linearen Abbildungen von V nach W. Es sei $A \in L(V, W)$, dann heißt eine Abbildung $A_{\mathrm{sl}}^{-1} \in L(W, V)$ linke Subinverse von A genau dann, wenn für alle $v \in K \subset V$ gilt: $A_{\mathrm{sl}}^{-1} A v \leqq v$.

Der folgende Satz gestattet nun die Einschließung von Lösungen der Gleichung (1) durch monoton einschließende Newtonähnliche Iterationsverfahren.

Satz 1. *V, W seien zwei halbgeordnete Vektorräume, D eine Teilmenge von V und F eine nichtlineare Abbildung von D nach W. Es mögen Elemente $x_0, y_0 \in D$ mit $x_0 \leqq y_0$, $[x_0, y_0] \subset D$ und $F(x_0) \leqq 0 \leqq F(y_0)$ sowie Abbildungen $S_i\colon [x_0, y_0] \times [x_0, y_0] \to L(V, W)$, $i = 1, 2$ existieren, so daß gilt:*

(V1) $\forall x, y \in [x_0, y_0]$ *mit* $x \leqq y$: $S_i(x, y)(x - y) \leqq F(x) - F(y)$

(V2) $\forall x, y \in [x_0, y_0]$ *mit* $x \leqq y$ *sind die Abbildungen* $S_i(x, y)$ *invers-isoton, und das Bild von* V *unter* $S_i(x, y)$ *umfaßt das Bild von* $[x_0, y_0]$ *unter* F

(V3) $\forall z \in [x_0, y_0]$ *und* $\forall x, y \in [x_0, z]$ *mit* $x \leqq y$ *gilt entweder* $[S_1(x, z) - S_1(y, z)](x - y) \geqq 0$ *oder* $[S_1(y, z) - S(x, z)](y - z) \geqq 0$

(V4) $\forall x \in [x_0, y_0]$ *und* $\forall y, z \in [x, y_0]$ *mit* $y \leqq z$ *gilt entweder* $[S_2(x, y) - S_2(x, z)](y - z) \leqq 0$ *oder* $[S_2(x, z) - S(x, y)](x - y) \leqq 0$.

Dann liefern die Verfahren

$$\forall k \in \boldsymbol{N}_0\colon \quad S_1(\bar{y}_k, y_k)(y_{k+1} - y_k) = -F(y_k) \tag{2}$$
$$S_2(x_k, \bar{x}_k)(x_{k+1} - x_k) = -F(x_k)$$

mit $\bar{y}_k := y_k$, falls in (V3) die erste Bedingung erfüllt ist, und $\bar{y}_k := x_k$, sonst und entsprechend $\bar{x}_k := x_k$, falls in (V4) die erste Bedingung erfüllt ist und $\bar{x}_k := y_k$ andernfalls, Folgen $\{y_k\}_{k \in \boldsymbol{N}_0}$, $\{x_k\}_{k \in \boldsymbol{N}_0}$, so daß für alle $k \in \boldsymbol{N}_0$ gilt:

$$x_0 \leqq \dots \leqq x_k \leqq x_{k+1} \leqq y_{k+1} \leqq y_k \leqq \dots \leqq y_0 \tag{B1}$$

(B2) $$F(x_k) \leqq 0 \leqq F(y_k)$$

(B3) $$\forall x^* \in [x_0, y_0] \quad mit \quad F(x^*) = 0\colon\ x_k \leqq x^* \leqq y_k\,.$$

Beweis durch vollständige Induktion. Die Behauptungen (B2) und (B3) gelten nach Voraussetzung für $k = 0$. Wegen (V2) existieren eindeutige Lösungen $\tilde{y}_0$ und $\tilde{x}_0$ der Gleichungen $S_1(\bar{y}_0, y_0)\,\tilde{y}_0 = -F(y_0)$ und $S_2(x_0, \bar{x}_0)\,\tilde{x}_0 = -F(x_0)$ und es gilt $\tilde{y}_0 \leqq 0 \leqq \tilde{x}_0$. Daher sind $y_1 := y_0 + \tilde{y}_0$ und $x_1 := x_0 + \tilde{x}_0$ Lösungen von (2) für $k = 0$ und es gilt

(3) $$x_0 \leqq x_1 \quad \text{und} \quad y_1 \leqq y_0\,.$$

Ferner ist

(4) $$\begin{aligned} S_1(\bar{y}_0, y_0)(x_0 - y_1) &= S_1(\bar{y}_0, y_0)\,[(x_0 - y_0) + (y_0 - y_1)] \\ &= S_1(\bar{y}_0, y_0)(x_0 - y_0) + F(y_0) \end{aligned}$$

Gilt die erste Bedingung von (V3), so ist

$$\begin{aligned} S_1(\bar{y}_0, y_0)(x_0 - y_0) &= S_1(y_0, y_0)(x_0 - y_0) = \\ = S_1(x_0, y_0)(x_0 - y_0) &+ [S_1(y_0, y_0) - S_1(x_0, y_0)](x_0 - y_0) \leqq \\ &\leqq S_1(x_0, y_0)(x_0 - y_0)\,, \end{aligned}$$

andernfalls ist $\bar{y}_0 = x_0$, so daß aus (4) und (V1) folgt

$$\begin{aligned} S_1(\bar{y}_0, y_0)(x_0 - y_1) &\leqq S(x_0, y_0)(x_0 - y_0) + F(y_0) \leqq \\ &\leqq F(x_0) - F(y_0) + F(y_0) \leqq 0\,, \end{aligned}$$

woraus sich mit (V3)

(5) $$x_0 \leqq y_1$$

ergibt. Dann gilt weiter wegen (3) und (V1)

$$\begin{aligned} F(y_1) - F(y_0) &\geqq S_1(y_1, y_0)(y_1 - y_0) = \\ = S(\bar{y}_0, y_0)(y_1 - y_0) &+ [S_1(y_1, y_0) - S_1(\bar{y}_0, y_0)](y_1 - y_0) = \\ = -F(y_0) + &\begin{cases} [S_1(y_1, y_0) - S_1(y_0, y_0)](y_1 - y_0) \\ [S_1(y_1, y_0) - S_1(x_0, y_0)](y_1 - y_0) \end{cases} \text{gemäß (2) bzw. (V3)} \geqq -F(y_0) \end{aligned}$$

wegen (5) und (V3), woraus $F(y_1) \geqq 0$ folgt. Analog zeigt man $F(x_1) \leqq 0$ mit Hilfe von (3) und (V4). Aus

$$\begin{aligned} S_2(x_0, \bar{x}_0)(x_1 - y_1) &= S_2(x_0, \bar{x}_0)\,[(x_1 - x_0) + (x_0 - y_1)] = \\ = S_2(x_0, \bar{x}_0)(x_1 - x_0) &+ [S_2(x_0, \bar{x}_0) - S_2(x_0, y_1)](x_0 - y_1) + \\ + S_2(x_0, y_1)(x_0 - y_1) &\leqq -F(x_0) + F(x_0) - F(y_1) \leqq 0 \end{aligned}$$

folgt wegen (V2) dann $x_1 \leqq y_1$. Ist schließlich $x^* \in [x_0, y_0]$ eine Lösung von (1), so gilt

$$S_1(\bar{y}_0, y_0)(x^* - y_1) = S_1(\bar{y}_0, y_0)[(x^* - y_0) + (y_0 - y_1)] =$$
$$= S_1(x^*, y_0)(x^* - y_0) + S_1(\bar{y}_0, y_0)(y_0 - y_1) +$$
$$+ [S_1(\bar{y}_0, y_0) - S_1(x^*, y_0)](x^* - y_0) \leqq F(x^*) - F(y_0) + F(y_0) = 0$$

und somit nach (V2) $x^* \leqq y_1$. Analog folgt $x_1 \leqq x^*$. Die Gültigkeit der Behauptungen für alle $k \in \boldsymbol{N}$ zeigt man nun ebenso, indem man lediglich $y_0, \bar{y}_0, x_0, \bar{x}_0, y_1, x_1$ jeweils durch $y_{k-1}, \bar{y}_{k-1}, x_{k-1}, \bar{x}_{k-1}, y_k, x_k$ ersetzen muß. □

Bemerkung 1. Ist V ein hBR mit normalem Kegel, so resultiert aus (B3) die Fehlerabschätzung

(6) $$\max\{\|x^* - x_k\|, \|x^* - y_k\|\} \leqq N\|x_k - y_k\|$$

Ist der Kegel von V regulär, so folgt aus (B1) die Konvergenz der Folgen $\{y_k\}_{k\in\boldsymbol{N}_0}$ und $\{x_k\}_{k\in\boldsymbol{N}_0}$.

Ist F stetig und sind die Abbildungen $S_1(\bar{y}_k, y_k)$ und $S_2(x_k, \bar{x}_k)$ gleichmäßig in k beschränkt, so sind die Grenzwerte dieser Folgen Lösungen von (1), wie sich leicht aus (2) ergibt.

Bemerkung 2. Die Aussagen von Satz 1 bleiben gültig, wenn die Voraussetzung (V2) ersetzt wird durch

(V2)′ $\forall x, y \in [x_0, y_0]$ mit $x \leqq y$ besitze $S_i(x, y)$, $i = 1, 2$ eine positive, injektive, linke Subinverse $P_i(x, y)\colon W \to V$, so daß die Abbildungen $A_i(x, y, z)\colon V \to V$, $i = 1, 2$ mit
$A_i(x, y, z)\, h := h - (-1)^i P_i(x, y)\,[F(z) + (-1)^i S_i(x, y)\, h]\,, \quad h \in V$
für alle $x, y, z \in [x_0, y_0]$ mit $x \leqq y \leqq z$ genau einen Fixpunkt besitzen.

Der Beweis erfolgt analog zu dem Satz 1. □

3. EXISTENZ UND KONVERGENZ, KONSTRUKTION VON STARTNÄHERUNGEN

Zur Durchführung der Verfahren (2) benötigen wir die einschließenden Startnäherungen x_0, y_0. Mit deren Hilfe zeigen wir dann die Existenz von Lösungen der Gleichung (1) im Ordnungsintervall $[x_0, y_0]$. Außerdem stellen wir in diesem Abschnitt die Hilfsmittel für den Nachweis der Konvergenz der durch (2) erzeugten Iterationsfolgen für den Fall vor, daß die Bemerkung 1 zu Satz 1 nicht angewendet werden kann.

Satz 2. *V, W seien hVR und der Kegel von W sei erzeugend. D sei eine Teilmenge von V und $F\colon D \to W$ eine nichtlineare Abbildung. Es mögen eine invers-isotone Abbildung $G\colon V \to W$ mit $G(0) = 0$ sowie ein Element $z \geqq 0$ aus W existieren, so* *daß für ein $x \in D$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\forall y \in D \quad \textit{mit} \quad x \leqq y: \quad F(x) - F(y) \leqq G(x - y) + z$$

$$\forall y \in D \quad \textit{mit} \quad x \geqq y: \quad F(y) - F(x) \leqq G(y - x) + z$$

Besitzen dann die Ungleichungen

$$G(v) \leqq -F(x)_1 - z\,, \quad G(w) \leqq -F(x)_4 - z \tag{7}$$

mit $F(x) = F(x)_1 - F(x)_4$, $F(x)_1 \geqq 0$, $F(x)_2 \geqq 0$, da W einen erzeugenden Kegel besitzt, Lösungen v, w, so daß das Ordnungsintervall $[x + v, x - w]$ in D liegt, so gilt für die Elemente

$$x_0 := x + v\,, \quad y_0 := x - w \tag{8}$$

$x_0 \leqq y_0$ und $F(x_0) \leqq 0 \leqq F(y_0)$.

Beweis siehe (35, Satz 4]. □

Bemerkung 1. Gilt bereits $F(x) \leqq 0$ oder $F(x) \geqq 0$, so muß jeweils nur eine der Bedingungen von Satz 2 erfüllt sein und die entsprechende Ungleichung aus (7) gelöst werden.

Bemerkung 2. Gibt es Elemente $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in V$ mit $\bar{x} \leqq \bar{\bar{x}}$, so daß die Voraussetzungen von Satz 2 für ein $x \in [\bar{x}, \bar{\bar{x}}]$ und alle $y \in [\bar{x}, \bar{\bar{x}}]$ erfüllt sind, so gelten die Aussagen von Satz 2, falls die Elemente x_0, y_0 aus (8) ebenfalls in $[\bar{x}, \bar{\bar{x}}]$ liegen.

Läßt sich die Operatorgleichung (1) ais Fixpunktgleichung

$$T(x) = x \tag{9}$$

wobei T eine Teilmenge D eines hVR V nach V abbildet, schreiben, so wird die Existenz einer Lösung von (1) bzw. (9) durch folgenden Satz aus [16] gesichert.

Satz 3. *V sei ein hBR mit normalem Kegel und es gebe Elemente $x_0, y_0 \in D$ mit $x_0 \leqq y_0$, $[x_0, y_0] \subset D$ sowie $x_0 \leqq T(x_0)$, $T(y_0) \leqq y_0$, so daß die Einschränkung von T auf $[x_0, y_0]$ vollstetig und isoton ist. Dann besitzt T einen Fixpunkt in $[x_0, y_0]$ und die durch das Verfahren der sukzessiven Approximation (SA) bestimmten Folgen $\{x_k\}_{k \in \boldsymbol{N}_0}$, $\{y_k\}_{k \in \boldsymbol{N}_0}$ mit $x_{k+1} = T(x_k)$, $y_{k+1} = T(y_k)$ konvergieren gegen Fixpunkte $x^*, y^* \in [x_0, y_0]$ von T.*

Beweis siehe [16, Abschn. 4.1]. □

Speziell für Dirichletsche Randwertprobleme übernehmen wir ferner einen Existenzsatz, dessen Beweis sich auf Satz 3 zurückführen läßt, aus [3], der auf verschiedene andere Rundwertprobleme erweitert werden kann (s. [3], [34]).

Korollar. *Es seien Ω eine beschränkte, offene, einfachzusammenhängende Teilmenge des $\boldsymbol{R}^m$, $m \in \boldsymbol{N}$, und L ein linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung,*

so daß die folgenden Voraussetzungen erfüllt seien:
$m = 1$: $a, b \in \boldsymbol{R},\ a < b,\ \Omega = (a, b)$

$$Lu = -c_1 u'' + c_2 u' + c_3 u;\ c_i \in C(\bar{\Omega}),\ i = 1, 2, 3$$

$$c_3(x) \geqq 0,\ c_1(x) > 0 \text{ für alle } x \in \bar{\Omega} \text{ sowie } \sigma = 0$$

$$\varphi \in C(\bar{\Omega}),\ \varphi(a) = \alpha,\ \varphi(b) = \beta,\ \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$$

$m \geqq 2$: $\partial\Omega$ *sei aus* $C^{2+\sigma}$ *im Sinne von* [2, *Def.* 9.2], $\sigma \in (0, 1)$

$$Lu = -\sum_{i,k=1}^{m} c_{ik} D_i D_k u + \sum_{i=1}^{m} c_i D_i u + c_0 u,\ D_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit symmetrischer Koeffizientenmatrix (c_{ik}),
$c_{ik}, c_i, c_0 \in C^{\sigma}(\bar{\Omega}),\ i, k = 1(1)m\ c_0(x) > 0$ *für alle* $x \in \Omega$
L *sei gleichmäßig streng elliptisch sowie* $\varphi \in C^{\sigma}(\partial\Omega)$.

Ferner sei $f \in C^{\sigma}(\Omega \times J),\ J := [u_0, v_0]$ *mit* $u_0, v_0 \in C^{2+\sigma}(\bar{\Omega})$ *und* $[L(u_0)](x) \leqq \leqq f(x, u_0(x)),\ f(x, v_0(x)) \leqq [L(v_0)](x),\ x \in \Omega\ u_0 \leqq v_0$ *und* $u_0 \leqq \varphi \leqq v_0$ *auf* $\partial\Omega$.
Außerdem gebe es eine positive Funktion $w \in C^{\sigma}(\bar{\Omega})$, *sodaß für alle* $x \in \bar{\Omega}$ *und alle* τ_1, τ_2 *mit* $u_0(x) \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq v_0(x)$ *gilt*

$$f(x, \tau_2) - f(x, \tau_1) \geqq -w(x)(\tau_2 - \tau_1)\,.$$

Dann besitzt das Randwertproblem

$$Lu = f(x, u)\,,\quad u|_{\partial\Omega} = \varphi$$

eine minimale Lösung $u^{\min}$ *und eine maximale Lösung* $u^{\max}$ *im Ordnungsintervall J. Ferner liefert das modifizierte Verfahren SA*

$$\begin{aligned}(10)\qquad k \in \boldsymbol{N}:\ & [Lu_k](x) + w(x)\,u_k(x) = f(x, u_{k-1}(x)) + w(x)\,u_{k-1}(x)\\ & [Lv_k](x) + w(x)\,v_k(x) = f(x, v_{k-1}(x)) + w(x)\,v_{k-1}(x)\\ & u_k|_{\partial\Omega} = v_k|_{\partial\Omega} = \varphi\end{aligned}$$

eine isoton in $C^{2+\sigma}(\bar{\Omega})$ *gegen* $u^{\min}$ *konvergierende Folge* $\{u_k\}_{k \in \boldsymbol{N}_0}$ *und eine antiton gegen* $u^{\max}$ *konvergierende Folge* $\{v_k\}_{k \in \boldsymbol{N}_0}$.

Beweis siehe [3, Theorem 1] bzw. [25]. □

Für den Nachweis der Konvergenz der durch (2) bestimmten Iterationsfolgen benötigen wir nun noch den folgenden

Hilfssatz. *Es sei X ein reeller Vektorraum und Y ein hBR, A: X → Y ein Isomorphismus. Dann wird X mit der durch A von Y induzierten Norm*

$$(11)\qquad \|x\|_A := \|Ax\|$$

ein Banachraum und mit der durch A von Y induzierten Halbordnung

$$x \leqq_A y :\Leftrightarrow Ax \leqq Ay \tag{12}$$

ein hBR. A ist isoton und invers-isoton bzgl. $\leqq_A$ und es gilt:

$$\|A\|_A := \sup_{\|x\|_A = 1} \|Ax\| = \|A^{-1}\|_A := \sup_{\|y\| = 1} \|A^{-1}y\|_A = 1 \tag{13}$$

Beweis. Die Aussagen des Hilfssatzes sind offenkundig bis auf die Abgeschlossenheit des induzierten Kegels in X. Sei daher $\{x_k\}_{k \in \boldsymbol{N}_0} \subset X$ eine Folge mit $x_k \geqq_A 0$ und $\lim_{k \to \infty} \|x_k - x^*\|_A = 0$, $x^* \in X$. Dann gilt perdefinitionem $Ax_k \geqq 0$ in Y und $\lim_{k \to \infty} \|Ax_k - Ax^*\| = 0$. Aus der Abgeschlossenheit des Kegels in Y folgt dann $Ax^* \geqq 0$ und damit nach (12) die Behauptung. □

Bemerkung. Es seien die Voraussetzungen des vorstehenden Hilfssatzes erfüllt. Ist dann der Kegel von Y erzeugend, normal oder regulär, so ist der durch die induzierte Halbordnung (12) in X definierte Kegel ebenfalls erzeugend, normal bzw. regulär. Der Beweis ergibt sich aus der Linearität und Bijektivität von A. □

4. ANWENDUNG AUF RANDWERTPROBLEME BEI GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Beispiel 1. Als einführendes Beispiel betrachten wir das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -y''(t) &= \lambda\, y^2(t)\,, \quad \lambda \in \boldsymbol{R}\,, \quad t \in [0, 1] \\ y(0) &= y(1) = 1 \end{aligned} \tag{14}$$

Wir transformieren (14) auf homogene Randbedingungen und erhalten

$$\begin{aligned} -x''(t) &= \lambda[x(t) + 1]^2 \\ x(0) &= x(1) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Es sei nun $V := C^2[0, 1]$, $W := C[0, 1]$, $D := \{x \in V \mid x(0) = x(1) = 0\}$ und F: $D \to W$ definiert durch $[F(x)]\,(t)\colon = -x''(t) - \lambda[x(t) + 1]^2$, so daß (15) äquivalent zu (1) wird. Wir bestimmen nun zunächst mit Hilfe der Bemerkungen 1 und 2 zu Satz 2 einschließende Startnäherungen. Dabei behandeln wir zunächst den Fall $\lambda < 0$. Dann erfüllt $y_0 \equiv 0$ die Bedingung $F(y_0) \geqq 0$ und die zweite Ungleichung der Voraussetzungen zu Satz 2 ist für alle $y \geqq -1$ mit

$$F(y) - F(y_0) = -y'' \mathrm{W}\, \lambda(y + 1)^2 + \lambda \leqq -y'' - \lambda y = G(y - y_0) + z$$

erfüllt, wenn man $z \equiv 0$, $\bar{x} \equiv -1$ und $Gh = -h'' - \lambda h$ für $h \in V$ wählt. Als Lösung der ersten Ungleichung aus (7) erhält man dann

$$x_0(t) = (1 - \cosh |\lambda|^{1/2}) \frac{\sinh |\lambda|^{1/2} t}{\sinh |\lambda|^{1/2}} + \cosh |\lambda|^{1/2} t - 1 . \tag{16}$$

Für $\lambda > 0$ erfüllt $x_0 \equiv 0$ die Bedingung $F(x_0) \leqq 0$ und wir erhalten mit $\alpha := := 1{\cdot}1183$, $\bar{x} \equiv \alpha$, $z \equiv 0$ und $Gh := -h'' - \lambda(2 + \alpha) h$, $h \in V$, wobei G für $\lambda \leqq \leqq \pi^2/(2 + \alpha)$ bekanntlich invers-isoton ist, als Lösung des zweiten Ungleichung aus (7)

$$y_0(t) = \frac{1}{2 + \alpha} \left(\frac{1 - \cos [(2 + \alpha) \lambda]^{1/2}}{\sin [(2 + \alpha) \lambda]^{1/2}} \sin [(2 + \alpha) \lambda]^{1/2} t + \cos [(2 + \alpha) \lambda]^{1/2} t - 1 \right) . \tag{17}$$

Für $\lambda \leqq 2{\cdot}32416 < \pi^2/(2 + \alpha)$ gilt $y_0 \leqq \bar{x}$. Damit sind geeignete Startnäherungen mit Hilfe von Satz 2 bestimmt. Die Existenz einer Lösung von (15) im Ordnungsintervall $[x_0, y_0]$ folgt daher wegen der Glattheit von $f(t, x) = \lambda(x + 1)^2$ unmittelbar aus dem Korollar zu Satz 3.

Zur Durchführung der Verfahren (2) definieren wir

$$S(x, y) h := S_1(x, y) h := S_2(x, y) h := -h'' - \lambda[x + y + 2]$$

so daß (V1) für allz $x, y \in [x_0, y_0]$ erfüllt ist. $S(x, y)$ ist dann bekanntlich für alle $\lambda \leqq \pi^2/(2 + 2\alpha) \doteqdot 2{\cdot}32416$ invers-isoton. Ferner gilt für S die zweite Bedingung von (V3) und die erste von (V4). Damit läßt sich Satz 1 zur iterativen Einschließung einer Lösung von (15) anwenden. Für $\lambda > 0$ ist dabei die Folge $\{y_k\}_{k \in N_0}$ und für $\lambda < 0$ die Folge $\{x_k\}_{k \in N_0}$ die durch das Newton-Verfahren bestimmte Iterationsfolge. Diese approximiert auch für $\lambda > 2{\cdot}32416$ „einseitig monoton" eine Lösung von (15), und zwar bis zum kritischen Wert $\lambda \doteqdot 2{\cdot}42$ (vgl. [22]).

Den Nachweis der Konvergenz der nach (2) berechneten Iterationsfolgen führen wir im Raum $C[0, 1]$ zunächst mit Hilfe des Korollars zu Satz 3. Wählt man nämlich für den Fall $\lambda > 0$ $w \equiv 0$ und für den Fall $\lambda < 0$ $w \equiv -2$, so liefern die Formeln (10) eine isoton gegen die minimale Lösung $u^{\min}$ konvergierende Folge $\{u_k\}_{k \in N_0}$ und eine antiton gegen die maximale Lösung $u^{\max}$ konvergierende Folge $\{v_k\}_{k \in N_0}$. Dabei sei $u_0 := x_0$ uno $v_0 := y_0$. Dann gilt für alle $k \in N_0$: $u_k \leqq x_k \leqq u^{\min} \leqq \leqq u^{\max} \leqq y_k \leqq v_k$. Für $k = 0$ ist dies klar. Wir zeigen nun exemplarisch für $\lambda > 0$ daß aus $u_k \leqq x_k$ folgt $u_{k+1} \leqq x_{k+1}$. Es ist nämlich $-u''_{k+1} = \lambda(u_k + 1)^2$ und $-x''_{k+1} = \lambda(x_k + 1)^2 + 2\lambda(1 + x_k)(x_{k+1} - x_k)$, woraus $-(x''_{k+1} - u''_{k+1}) = = \lambda[(x_k + 1)^2 - (u_k + 1)^2] + 2\lambda(1 + x_k)(x_{k+1} - x_k)$ folgt. Wegen $u_k \leqq x_k \leqq \leqq x_{k+1}$, $x_k \geqq -1$ und $\lambda > 0$ folgt daraus weiter $-(x''_{k+1} - u''_{k+1}) \geqq 0$ und daraus nach dem Maximumprinzip (vgl. [24]) die Behauptung. Da der Kegel von $C[0, 1]$, bzgl. der hier verwendeten natürlichen Halbordnung normal ist, folgt hieraus die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{x_k\}_{k \in N_0}$ in $C[0, 1]$ gegen $u^{\min}$ und analog von $\{y_k\}_{k \in N_0}$ gegen $u^{\max}$.

Für weitergehende Aussagen beschränkten wir uns zunächst auf den Fall $\lambda > 0$ und definieren mit

(18) $$Ah := -h''$$

einen Isomorphismus von $V^{2,2}(\bar{\Omega}) := \{x \in W^{2,2}(\Omega) \mid x(0) = x(1) = 0\}$ – $W^{2,2}(\Omega)$ siehe [1], S. 45 – nach $L^2(\Omega)$. Damit ist $V^{2,2}(\bar{\Omega})$ nach dem Hilfssatz aus dem vorigen Abschnitt bezüglich der durch A induzierten Norm und Halbordnung ein hBR. Wir zeigen nun, daß die nach (2) berechneten Iterationsfolgen auch bezüglich der induzierten Halbordnung monoton sind. Wegen (17) gilt bereits $-x_0'' \leqq -y_0''$ in $C[0, 1]$ und damit auch in $L(0, 1)$. Die Abbildungen $S_1(\bar{y}_k, y_k)$ und $S_2(x_k, \bar{x}_k)$ sind invers-isoton, so daß für alle $k \in N_0$ gilt:

$$S_1(\bar{y}_k, y_k)\, h \geqq 0 \Rightarrow h \geqq 0\,, \quad S_2(x_k, \bar{x}_k)\, h \geqq 0 \Rightarrow h \geqq 0$$

Dann gilt weiter

$$\lambda(y_k + \bar{y}_k + 2)\, h \geqq 0\,, \quad \lambda(\bar{x}_k + x_k + 2)\, h \geqq 0$$

und somit

$$-h'' \geqq \lambda(y_k + \bar{y}_k + 2)\, h \geqq 0 \quad \text{bzw.} \quad -h'' \geqq \lambda(\bar{x}_k + x_k + 2)\, h \geqq 0\,.$$

Daraus folgt nach dem Maximumprinzip zusammen mit entsprechenden Eindeutigkeitssaussagen für verallgemeinerte Lösungen von (2) (vgl. etwa [10]) die Monotonie der Folgen $\{x_k\}_{k \in N_0}$ und $\{y_k\}_{k \in N_0}$ in $V^{2,2}(\bar{\Omega})$ bzgl. $\leqq_A$. Da diese Folgen auch bezüglich der induzierten Halbordnung in $[x_0, y_0]$ liegen, konvergieren sie wegen der Regularität des induzierten Kegels ($L(0, 1)$ besitzt nach [16] einen regulären Kegel) in $V^{2,2}(\bar{\Omega})$ bzgl. der induzierten Norm gegen Elemente x^* bzw. y^*. Sie konvergieren nach Satz 1 aus Kap. III [18] dann auch in der üblichen Sobolev-Norm (vgl. [1]). Aufgrund der Sobolevschen Einbettungssätze (s. [1], Kap. 5) sind x^* und $y^* \in$ $\in C^1[0, 1]$. Insbesondere konvergieren daher die Folgen in $C[0, 1]$ gegen x^* und y^*, woraus $x^* = u^{\min}$ und $y^* = u^{\max}$ folgt. Damit ist die Konvergenz von $\{x_k\}_{k \in N_0}$ gegen $u^{\min}$ und von $\{y_k\}_{k \in N_0}$ gegen $u^{\max}$ in $V^{2,2}[0, 1]$ und $C^1[0, 1]$ und damit gegen Lösungen von (15) gezeigt. Die Eindeutigkeit der Lösung $u^{\min} = u^{\max}$ in $[x_0, y_0]$ ergibt sich aus [3]. Für den Fall $\lambda < 0$ erzielt man dieselben Aussagen mit

$$Ah = -h'' + \lambda h$$

statt (18).

B e i s p i e l 2. Untersucht man die Einwirkung einer axialen Last auf die Auslenkung einer auf elastischer Grundlage ruhenden, homogenen Säule, die sich in einem gewissen ausgelenkten. Anfangszustand befindet, so hat man das Randwertproblem

(19) $$x'''' + \mu x'' + x - x^3 = -\mu f\,, \quad \mu \in \boldsymbol{R}\,, \quad f \in C[0, 1]$$
$$x(0) = x(1) = x''(0) = x''(1) = 0$$

zu lösen (vgl. [11]). Wir behandeln hier den Spezialfall

$$f(t) = 0{\cdot}5 \sin \pi t\,.$$

Dabei erfüllt die Funktion $y_0 \equiv 0$ für den Operator $F: D \to W$, wobei $V := C^4[0, 1]$, $W := C[0, 1]$, $D := \{x \in V \mid x''(0) = x''(1) = x(0) = x(1) = 0\}$ und

$$[F(x)](t) := x''''(t) + \mu x''(t) + x(t) - x^3(t) + \frac{\mu}{2} \sin \pi t$$

die Bedingung $F(y_0) \geqq 0$. Mit $\bar{x} \equiv -1$, $z \equiv 0$ und $Gh := h'''' + \mu h''$ ergibt sich nach den Bemerkungen 1 und 2 zu Satz 2 x_0 als Lösung der Ungleichung

$$x_0''''(t) + \mu x_0''(t) \leqq -\frac{\mu}{2} \sin \pi t$$

für alle $\mu \in (0, 2\pi^4/(1 + 2\pi^2))$ zu

(20) $$x_0(t) = -\sin \pi t \,.$$

Stellt man das Randwertproblem (19) nun in der Form

$$[L(x)](t) = f(t, x(t))$$
$$x''(0) = x''(1) = x(0) = x(1) = 0$$

mit

$$Lx := x'''' + \mu x'' + x$$

und

$$f(t, x(t)) := x^3(t) - \frac{\mu}{2} \sin \pi t$$

dar, so läßt sich L als Hintereinanderausführung der Operatoren L_1 und L_2 darstellen, die gegeben sind durch

$$L_i x = -x'' - \left[\frac{\mu}{2} - (-1)^i (\mu^2/4 - 1)^{1/2}\right] x \,, \quad i = 1, 2 \,.$$

L_1 und L_2 sind bekanntlich für $\mu \in [2, 2\pi^4/(1 + 2\pi^2)]$ als Abbildungen von $\{x \in C^2[0, 1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ nach $C[0, 1]$ invertierbar und die Inversen sind isoton und kompakt (vgl. etwa [3]). Daher existiert $L^{-1} = L_2^{-1} \circ L_1^{-1}$ und L^{-1} ist ebenfalls isoton und kompakt und läßt sich zu einer ebensolchen Abbildung von $C[0, 1]$ nach $C[0, 1]$ erweitern. Da die Abbildung $\bar{F}(x) := f(\cdot, x)$ (s.o.) stetig und isoton ist, ist schließlich die Abbildung $T(x) := L^{-1} \bar{F}(x)$ eine vollstetige Abbildung von $C[0, 1]$ nach $C[0, 1]$. x_0 und y_0 erfüllen die Voraussetzungen von Satz 3, mit dessen Hilfe sich folglich die Existenzfrage für (19) beantworten läßt. Außerdem konvergieren die SA-Folgen aus Satz 3 gegen Lösungen von (19).

Um nun Satz 1 anwenden zu können, definieren wir für $h \in V$

$$S(x, y)\, h := S_1(x, y)\, h := S_2(x, y)\, h := h'''' + \mu h + (1 - x^2 - xy - y^2)\, h$$

so daß (V1), die erste Bedingung von (V3) und die zweite Bedingung von (V4) erfüllt sind. Zum Nachweis von (V2) zerlegen wir die Operatoren $S(x, y)$ wie zuvor L in $S(x, y) = S^+(x, y)\, S^-(x, y)$ (vgl. [17], Bsp. 4.9) mit

$$S^+(x, y)\, h := -h'' - \left[\frac{\mu}{2} + (\mu^2/4 - 1 + u^2 + uv + v^2)^{1/2}\right] h$$

$$S^-(x, y)\, h := -h'' - \left[\frac{\mu}{2} - (\mu^2/4 - 1 + u^2 + uv + v^2)^{1/2}\right] h$$

die für $\mu \geqq 2$ wohldefiniert ist. Dann ist (V2) erfüllt ,weil Theorem 4.4 aus [4] für $\mu \in [2, (\pi^4 - 2)/\pi^2]$ jeweils auf $S^+(x, y)$ und $S^-(x, y)$ angewendet werden kann. Die Verfahren (2) sind daher für alle $\mu \in [2, 2\pi^4/(1 + 2\pi^2)]$ durchführbar. Die Folge $\{y_k\}_{k\in N_0}$ ist dabei mit der nach dem Newton-Verfahren berechneten Iterationsfolge identisch. Durch einen Vergleich dieser Folgen mit den nach Satz 3 bestimmten SA-Folgen zeigt man analog zu Beispiel 1 die Konvergenz gegen Lösungen von (19) in $C[0, 1]$.

5. ANWENDUNG AUF PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Beispiel 3. Wir betrachten auf dem Kreis $\Omega := \{x \in \boldsymbol{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$ die Helmholtzgleichung mit nichtlinearer Störung

$$(21)\qquad -\Delta u - \lambda u = g - u^3 - \tfrac{3}{2}u^2\,, \quad \lambda \in \boldsymbol{R}$$
$$u(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \partial\Omega$$

wobei $g \in C^\sigma(\bar{\Omega})$, $\sigma \in (0, 1)$, und $-\frac{3}{2} \leqq g(x) \leqq 0$ für alle $x \in \bar{\Omega}$ gelte. Ferner sei $V := C^{2+\sigma}(\bar{\Omega})$, $W := C^\sigma(\bar{\Omega})$ und $D := \{u \in V \mid u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$. Außerdem definieren wir F durch $F(u) := -\Delta u - \lambda u + \frac{3}{2}u^2 + u^3 - g$. Dann gilt für $v_0 \equiv 0$: $F(v_0) \geqq 0$. Mit $Gu := -\Delta u$, $z := \frac{3}{2}$ sowie $\bar{u} := -1$ ergibt sich dann nach den Bemerkungen 1 und 2 zu Satz 2 die zweite Startnäherung u_0 als Lösung der Ungleichung $-\Delta u_0 \leqq g - \frac{3}{2}$ zu

$$(22)\qquad u_0(x) = \tfrac{3}{4}(\|x\|_2^2 - 1)\,.$$

F ist auf $[u_0, v_0]$ nicht konvex. Daher können wir zur Durchführung der Verfahren (2) hier nicht wie bei den zuvor behandelten Beispielen den üblichen Steigungsopertor heranziehen. Die Voraussetzungen (V1), die zweite Bedingung von (V3) und die erste Bedingung von (V4) von Satz 1 werden aber erfüllt durch

$$S(u, v)\, h := S_1(u, v)\, h := S_2(u, v) := -\Delta h - \lambda h + (u^2 + uv + v^2)\, h\,.$$

Nach [4], Theorem 4.1 bzw. 4.4 (vgl. auch [24]) genügt S für alle $\lambda \in (-\infty, j_{01}^2)$, $-j_{01} \doteqdot 2{\cdot}40483$ bezeichnet die kleinste positive Nullstelle der Besselfunktion erster Art der Ordnung 0 — (V1), so daß die Verfahren (2) auch für (21) durchführbar sind.

Hinsichtlich der Existenz von Lösungen und der Konvergenz der nach (2) berechneten Iterationsfolgen erhalten wir ähnliche Aussagen wie bei Beispiel 1. Mit den einschließenden Start $v_0 \equiv 0$ und u_0 aus (22) sowie $f(x, u) := g - u^3 - \frac{3}{2}u^2$ sind die Voraussetzungen des Korollars zu Satz 3 erfüllt und damit die Existenz einer maximalen und einer minimalen Lösung von (21) in $[u_0, v_0]$ gezeigt. Mit der durch die Abbildung

$$Au := -\Delta u + \gamma u$$

induzierten Norm und Halbordnung folgt für $\gamma := 27/16 - \lambda < j_{01}^2$ analog zu Beispiel 1 die Konvergenz der nach (2) berechneten Folgen $\{u_k\}_{k \in N_0}$ und $\{v_k\}_{k \in N_0}$ in $V^{2,2}(\Omega)$, und aufgrund des entsprechenden Einbettungssatzes aus [1], Kap. 5 die gleichmäßige Konvergenz dieser Folgen in $C(\bar{\Omega})$. Die Grenzwerte sind starke Lösungen von (21), da F eine stetige Abbildung von $V^{2,2}(\bar{\Omega})$ nach $L^2(\Omega)$ ist und die Abbildungen $S(\bar{v}_k, v_k)$ und $S(u_k, \bar{u}_k)$ gleichmäßig in k durch $C := \max\{2, |\lambda| + 3\|u_0\|^2\}$ als Abbildungen von $V^{2,2}(\bar{\Omega})$ nach $L^2(\Omega)$ beschränkt sind, so daß gilt:

$$0 \leqq \|F(u_k)\| = \|S(u_k, \bar{u}_k)(u_{k+1} - u_k)\| \leqq C\|u_{k+1} - u_k\| \to 0$$

(analog für $\{v_k\}_{k \in N_0}$). (Vgl. Bem. 1 zu Satz 1.)

Beispiel 4. Wir behandeln als abschließen des Beispiel die charakteristische Anfangswertaufgabe

$$(23) \qquad \begin{aligned} v_{xy}(x, y) &= \tfrac{1}{4}v(x, y)\, v_y(x, y) + \tfrac{1}{2}y\,, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ v(0, y) &= v(x, 0) = 1\,, \quad x \in (0, 1)\,, \quad y \in (0, 1) \end{aligned}$$

aus [9]. Wir transformieren (23) auf homogene Anfangsbedingungen und erhalten das äquivalente Problem

$$(24) \qquad \begin{aligned} u_{xy}(x, y) &= \tfrac{1}{4}u_y(x, y)\,[u(x, y) + 1] + \tfrac{1}{2}y \\ u(0, y) &= u(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

Es sei $\Omega := (0, 1) \times (0, 1)$, $V := \{u \in C^1(\bar{\Omega}) \mid u_{xy} \in C(\bar{\Omega})\}$, $W := C(\bar{\Omega})$ und $D := \{u \in V \mid u(0, y) = u(x, 0) = 0\}$. Wir versehen W mit der natürlichen Halbordnung und wählen für V nach einer Idee aus [12] die folgende Halbordnung:

$$u \geqq 0 :\Leftrightarrow u(x, y) \geqq 0 \quad \text{und} \quad u_y(x, y) \geqq 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}\,.$$

Mit $[F(u)](x, y) := u_{xy}(x, y) - \frac{1}{4}[1 + u(x, x)]\, u_y(x, y) - \frac{1}{2}y$ wird (24) äquivalent zu (1) und $u_0 \equiv 0$ erfüllt die Bedingung $F(u_0) \leqq 0$.

Wir wenden jetzt die Bemerkungen 1 und 2 zu Satz 2 an. Dabei wählen wir $c := 1{\cdot}2784$, $z \equiv 0$, $G(u) := u_{xy} - \frac{1}{4}cu_y$ und $\bar{\bar{u}} := c - 1$. Als Lösung der Ungleichung

$$v_{0xy}(x, y) - \frac{c}{4}v_{0y} \leqq -\frac{y}{2}$$

erhalten wir dann

$$v_0(x, y) = y\left(\frac{x^2}{4} + 8c\left[\exp(x/4) - 1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{34}\right]\right) \tag{25}$$

und damit geeignete Startnäherungen u_0, v_0 zur Anwendung von Satz 1. Für

$$S(u, v)\,h := S_1(u, v)\,h := S_2(u, v)\,h := h_{xy} - \tfrac{1}{4}(1 + v)\,h_y - \tfrac{1}{4}v_y h$$

sind die Voraussetzungen von Satz 1 in gleicher Weise wie die eines spezielleren Einschließungssatzes aus [12] erfüllt, so daß die Verfahren (2) zur Berechnung einschließender Iterationsfolgen verwendet werden können. Dabei stimmt die Folge $\{u_k\}_{k\in N_0}$ mit der nach dem Newton-Verfahren berechneten Näherungsfolge überein. Wir zeigen nun, daß diese Folge gegen eine Lösung von (24) konvergiert.

Mit der durch den Operator

$$Ah := h_{xy} - \tfrac{1}{4}h_y$$

von W induzierten Norm wird D nach dem Hilfssatz aus Abschn. 3 ein Banachraum. Bezüglich der Norm $\|\cdot\|_A$ sind aber die Voraussetzungen des Satzes über das Newton-Verfahren aus [14] (Kap. XIX Satz 5) erfüllt. Denn, wählen wir $u_0 \equiv 0$ als Startnäherung, dann ist

$$[F(u_0)]\,(x, y) = -\tfrac{1}{2}y \Rightarrow \|F(u_0)\| = \tfrac{1}{2}\,.$$

Ferner ist $F'(u_0) = A$ und daher nach unserem Hilfssatz

$$\|[F'(u_0)]^{-1}\|_A = 1\,.$$

Schließlich ist $K = \sup\limits_{\|h\| = \|k\| = 1} \|F''(u)\,hk\| = \frac{1}{4} \sup\limits_{\|h\|_A = \|k\|_A = 1} \|k_y h + h_y k\|_\infty$. Wegen

$$[h_y k]\,(x, y) = h_y \exp(x/4) \int_0^x \exp(-\sigma/4) \int_0^y [k_{xy}(\sigma, \tau) - \tfrac{1}{4}k_y(\sigma, \tau)]\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau$$

und

$$h_y(x, y) = \exp(x/4) \int_0^x \exp(-\sigma/4)\,[h_{xy}(\sigma, y) - \tfrac{1}{4}h_y(\sigma, y)]\,\mathrm{d}\sigma$$

(analog für $k_y h$ und k_y) erhält man durch einfache Abschätzung

$$K \leqq 4(\exp(1/4) - 1)^2\,.$$

Damit ist

$$\|[F'(u_0)]^{-1}\|_A \circ K\|u_1 - u_0\|_A =$$
$$= \|[F'(u_0)]^{-1}\|_A^2\, K\|F(u_0)\|_\infty = 2(\exp(1/4) - 1)^2 \leqq 0{\cdot}163 < 0{\cdot}5\,.$$

Nach dem oben zitierten Satz aus [14] ist somit die Existenz einer Lösung u^* von (24) ebenso bewiesen wie die (quadratische) Konvergenz der Folge $\{u_k\}_{k\in N_0}$ gegen u^*.

6. DIE EXPLIZITE BERECHNUNG VON EINSCHLIESSUNGEN

Nachdem wir in den vorigen Abschnitten die einschließenden Startnäherungen bestimmt haben, die Existenz von Lösungen gesichert und die Durchführbarkeit und Konvergenz der Verfahren (2) bewiesen haben, werden wir nun einige Näherungen explizit bestimmen.

Beispiel 1. Für den Spezialfall $\lambda = -1$ ergibt sich y_1 als Lösung der Differentialgleichung

$$-y_1'' + 2y_1 = -1\,, \quad y_1(0) = y_1(1) = 0$$

zu

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cosh\sqrt{2}}{\sinh\sqrt{2}} \sinh\sqrt{(2)}\,t + \cosh\sqrt{(2)}\,t - 1\right).$$

Beispiel 2. Für $\mu = 4$ ist y_1 Lösung der Randwertaufgabe

$$y_1'''' + 4y_1'' + y_1 = -2\sin\pi t\,, \quad y_1(0) = y_1(1) = y_1''(0) = y_1''(1) = 0\,.$$

Wir erhalten

$$y_1(t) = \frac{2}{4\pi^2 - \pi^4 - 1} \sin\pi t \doteqdot -0{\cdot}03394 \sin\pi t\,.$$

Beispiel 3. Die Verfahrensgleichungen sind analytisch nicht zu lösen.

Beispeil 4. u_1 ergibt sich als Lösung der charakteristischen Anfangswertaufgabe

$$u_{1xy}(x, y) - \tfrac{1}{4}u_{1y}(x, y) = -\tfrac{1}{2}y\,, \quad u_1(x, 0) = u_1(0, y) = 0$$

zu

$$u_1(x, y) = 8y[\exp(x/4) - (1 + x/4)]$$

mit der gegenüber [9] verbesserten Einschließung

$$\|u_1 - v_0\| \leqq 6{\cdot}2\,.\,10^{-3}\,.$$

Wie schon bei Bsp. 3 scheitert die weitere Berechnung von Näherungen daran, daß die entsprechenden linearen Probleme nicht mehr direkt gelöst werden können. Die Berechnung verbesserter Näherungen ist aber möglich, wenn man die Gleichungen (2) durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} (26)\qquad & S_1(\bar{y}_k, y_k)\,c_{1k} \leqq F(y_k)\,, \quad 0 \leqq c_{1k} \leqq y_k - x_0\,, \quad \hat{y}_{k+1} = y_k - c_{1k} \\ & S_2(x_k, \bar{x}_k)\,c_{2k} \leqq -F(x_k)\,, \quad 0 \leqq c_{2k} \leqq y_0 - x_k\,, \quad \hat{x}_{k+1} = x_k + c_{2k} \end{aligned}$$

ersetzt. Denn dann gilt wegen (V1) und (V2)

$$x_k \leqq \hat{x}_{k+1} \leqq x_{k+1} \leqq y_{k+1} \leqq \hat{y}_{k+1} \leqq y_k\,.$$

Für Bsp. 2 ergibt sich z.B. $\hat{x}_1$ als Lösung der Ungleichung

$$x_1'''' + 4x_1'' + [1 - x_0^2]\, x_1 \leqq 2x_0^3 - 2 \sin \pi t$$

mit $x_1(0) = x_1(1) = x_1''(0) = x_1''(1) = 0$ zu

$$\hat{x}_1(t) \doteqdot -0{\cdot}06042 \sin \pi t + 6{\cdot}6 \,.\, 10^{-5} \sin 3\pi t$$

und $\|\hat{x}_1 - y_1\|_\infty \doteq 0{\cdot}0264$ gegenüber $\|x_0 - y_0\|_\infty = 1$.

Für Bsp. 3 führen die Ungleichungen (26) auf die gleiche Problemstellung, die in [19] behandelt wird. Dort wird eine Methode zur Einschließung von Lösungen linearer elliptischer Randwertaufgaben mit Finiten Elementen angegeben. Da derartige Näherungen nur stückweise stetig differenzierbar sind, müssen die Funktionenräume anders als in Abschn. 5 gewählt werden (vgl. [19], [20]). In [20] oder [36] finden sich geeignete Maximumprinzipien zum Nachweis der Invers-Isotonie von $S_1(\bar{y}_k, y_k)$ und $S_2(x_k, \bar{x}_k)$. Mit Hilfe einiger Unterprogramme aus [31] berechneten wir bei 129 Knotenvariablen:

(x, y)	u_0	u_1	u_2	v_2	v_1	v_0
$(-\frac{3}{4}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$	$-0{\cdot}16406$	$-0{\cdot}06591$	$-0{\cdot}05155$	$-0{\cdot}05029$	$-0{\cdot}04936$	0
$(0, 0)$	$-0{\cdot}75000$	$-0{\cdot}31090$	$-0{\cdot}19643$	$-0{\cdot}18568$	$-0{\cdot}17895$	0
$(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$	$-0{\cdot}56250$	$-0{\cdot}21344$	$-0{\cdot}14181$	$-0{\cdot}13548$	$-0{\cdot}13135$	0

mit $\|u_0 - v_0\|_\infty = 0{\cdot}75$, $\|\hat{u}_1 - \hat{v}_1\|_\infty \leqq 0{\cdot}14$, $\|\hat{u}_2 - \hat{v}_2\|_\infty \leqq 1{\cdot}09 \,.\, 10^{-2}$.

Literatur

[1] *R. A. Adams:* Sobolev spaces. New York: Academic Press 1975.

[2] *S. Agmon:* Lectures on elliptic boundary value problems. New York: Van Nostrand Mathematical Studies 1965.

[3] *H. Amann:* On the existence of positive solutions of nonlinear boundary value problems. Indiana Univ. Math J. 21 (1971), 125—146.

[4] *H. Amann:* Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered spaces. SIAM Rev. 18 (1976), 620—709.

[5] *E. Bohl:* Monotonie: Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen. Berlin: Springer-Verlag 1974.

[6] *E. Bohl:* Chord techniques and Newton's method for discrete bifurcation problems. Numer. Math. 34 (1980), 111—124.

[7] *L. Collatz:* Aufgaben monotoner Art. Arch. Math. 3 (1952), 366—376.

[8] *L. Collatz:* Funktionalanalysis und Numerische Mathematik. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1964.

[9] *L. Collatz:* Monotonicity with discontinuities in partial differential equations, in Ordinary and partial differential equations. Lect. Notes Math. 415 (1974), 85—102.

[10] *D. Gilbarg* and *N. S. Trudinger:* Elliptic partial differential equations of second order. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1977.

[11] *W. Hoffmann, T. Küpper:* Punktweise Abschätzungen zur Ermittlung des Einflusses von Störungen bei Verzweigungsproblemen. Z. Angew. Math. Phys. 31 (1980), 267—276.

[12] *W. Hofmann:* Monotoniesätze für hyperbolische Anfangswertaugaben und Einschließung von Lösungen. Numer. Math. 24 (1975), 137—149.

[13] *R. Kalaba:* On nonlinear differential equations, the maximum operation and monotone convergence. J. Math. Mech 8 (1968), convergence. J. Math. 8 (1968), 519—574.

[14] *L. W. Kantorowitsch, G. P. Akilow:* Funktionalanalysis in normierten Räumen. Berlin: Akademie-Verlag 1964.

[15] *H. B. Keller:* Elliptic boundary value problems suggested by nonlinear diffusion processes. Arch. Ration. Mech. Anal. 35 (1969), 363—381.

[16] *M. A. Krasnoselskii:* Positive solutions of operator equations. Groningen: Noordhoff 1964.

[17] *T. Küpper:* Einschließungsaussagen für Differentialoperatoren vierter Ordnung und ein Verfahren zur Berechnung von Schrankenfunctionen. Manuscr. Math. 26 (1978), 259—291.

[18] *H. Lütcke:* Newton-ähnliche Iterationsverfahren bei Navier-Stokes und anderen Randwertproblemen. Dissertation Düsseldorf 1979.

[19] *K. H. Meyn:* Convergent solution bounds for elliptic boundary value problems of monotone kind. Computing 24 (1980), 9—19.

[20] *K. H. Meyn, B. Werner:* Maximum and montonicity principles for elliptic boundary value problems in partitioned domains. Appl. Anal. 11 (1980), 1—12.

[21] *J. W. Mooney:* A unified approach to the solutions of nonlinear boundary value problems using monotone iterations. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 3 (1979), 445—465.

[22] *J. W. Mooney, H. Voss, B. Werner:* The dependence of a critical parameter bounds on the monotonicity of a Newton sequence. Numer. Math. 34 (1980), 291—301.

[23] *J. M. Ortega, W. C. Rhéinboldt:* Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York: Acad. Press 1970.

[24] *M. H. Protter, H. F. Weinberger:* Maximum principles in differential equations. New Jersey: Pretice Hall 1967.

[25] *D. H. Sattinger:* Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, Indiana Univ. Math. J. 21 (1972), 979—1000.

[26] *J. W. Schmidt:* Monoton einschließende Näherungsverfahren bei nichtlinearen Gleichungen. Mitteil. Math. Ges. DDR 1 (1982).

[27] *J. W. Schmidt, H. Schneider:* Monoton einschließende Verfahren bei additiv zerlegbaren Gleichungen. Z. Angew. Math. Mech. 63 (1983), 3—11.

[28] *K. Schmitt:* Boundary value problems for quasilinear second order equations. Nonlinear Anal., Th. Meth. Appl. 2 (1978), 263—309.

[29] *N. Schneider:* Some remarks about the monotone inclusion for solutions of nonlinear equations by regula-falsi-like methods. Apl. Mat. 28 (1983), 21—31.

[30] *N. L. Schryer:* Newton's method for convex nonlinear elliptic boundary value problems. Numer. Math. 17 (1971), 284—300.

[31] *H. R. Schwarz:* FORTRAN-Programme zur Methode der finiten Elemente. Stuttgart: Teubner 1981.

[32] *L. F. Shampine:* Some nonlinear eigenvalue problems. J. Math. Mech. 17 (1968), 1065—1072.

[33] *W. Törnig:* Monoton einschließend konvergente Iterationsprozesse vom Gauß-Seidel-Typ zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme im $\mathbb{R}^n$ und Anwendungen. Math. Meth. Appl. Sci. 2 (1980), 489—503.

[34] *R. L. Voller:* Monoton einschließende Newton-ähnliche Iterationsverfahren in halbgeordneten Räumen mit nicht notwendig regulärem Kegel. Dissertation Düsseldorf 1982.

[35] *R. L. Voller:* Iterative Einschließung von Lösungen nichtlinearer Operatorgleichungen und

Bestimmung von Startnäherungen, erscheint demnächst in Period. Math. Hung..
[36] *B. Werner:* Monotonie und finite Elemente bei elliptischen Differentialgleichungen. ISNM 27 (1975), 309—330.
[37] *P. Wildenauer:* Existence of a minimal and a maximal solution of nonlinear elliptic boundary value problems. Indiana Univ. Math. J. 29 (1980), 455—462.
[38] *P. Wildenauer:* Verfahren zur Bestimmung von Startelementen für die Iteration. Mathematische Schriften Kassel (1979).

Souhrn

ITERATIVNÍ SEVŘENÍ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC METODAMI NEWTONOVA TYPU

RUDOLF L. VOLLER

Autor vyšetřuje monotonní metody Newtonova typu použitelné k přibližnému řešení několika druhů nelineárních diferenciálních rovnic. Tyto metody lze použít i v případě nekonvexních nelinearit. Jsou zkonstruovány vhodné počáteční vektory pro tyto metody, takže je možno zaručit existenci řešení vyšetřovaných diferenciálních rovnic. Je dokázána konvergence studovaných metod i v případě, že kužele uvažovaných funkčních prostorů nejsou regulární. Podrobně jsou řešeny čtyři příklady.

Резюме

ИТЕРАЦИОННОЕ ОТГОРАЖИВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ТИПА НЬЮТОНА

RUDOLF L. VOLLER

Автор исследует монотонные методы типа Нютона, которые можно использовать для приближенного решения нескольких типов нелинейных дифференциальных уравнений. Эти методы применимы и в случае невыпуклых нелинейностей. В работе построены подходящие начальные векторы для этих методов, так что можно гарантировать существование решения исследуемых дифференциальных уравнений. Доказана сходимость изучаемых методов также в случае, что конусы рассматриваемых пространств функций не регулярны. Приведено подробное решение четырёх примеров.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Rudolf L. Voller*, Mathematisches Institut der Universitäi Düsseldorf, Universitätsstr. 1, D-4000 Düsseldorf 1, BRD.