Július Cibula

Équations de von Kármán. II. Approximation de la solution

Aplikace matematiky, Vol. 30 (1985), No. 1, 1–10

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104123

SVAZEK 30 (1985) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 1

EQUATIONS DE VON KÁRMÁN

II. APPROXIMATION DE LA SOLUTION

JULIUS CIBULA

(Recu le 25 novembre 1983)

1. INTRODUCTION

Dans cet article, nous utiliserons les désignations de [1]. Dans la suite, on pose:

$$W = W_0^{2,2}(\Omega)\,. \tag{1.1}$$

Les solutions variationnelles (excessives) $/w, f/ \in V \times W$ du problème (1.1)–(1.7) dans [1] vérifient:

$$w = Lw + C_1(f, w) + q^* \quad \text{dans } V, \tag{1.2}$$

$$f = -C_2(w, w) \qquad \text{dans } W. \tag{1.3}$$

L'opérateur bilinéaire C_2: $V \times V \to W$ est continu (cf. le Lemme 4.3 dans [1]). Alors, il existe une constante $\|C_2\| > 0$ telle que:

$$\|C_2(w, \bar{w})\|_W \leqq \|C_2\| \; \|w\|_V \; \|\bar{w}\|_V\,, \tag{1.4}$$

pour tout couple $/w, \bar{w}/ \in V \times V$. $\|C_2\|$ est dite norme de l'opérateur C_2.

2. CAS D'UNICITE

Nous donnerons quelques conditions suffisantes pour l'unicité locale et globale de la solution du problème.

Soient $/w, f/$ et $/\bar{w}, \bar{f}/$ deux solutions variationnelles (excessives) du problème et:

$$\bar{w} = w + h \quad \text{dans } V, \tag{2.1}$$

$$\bar{f} = f + g \quad \text{dans } W. \tag{2.2}$$

Grâce à (1.2), (1.3), (2.1) et (2.2), on a:

$$h = Lh + C_1(f, h) + C_1(g, w) + C_1(g, h) \quad \text{dans } V, \tag{2.3}$$

$$g = -2C_2(w, h) - C_2(h, h) \quad \text{dans } W, \tag{2.4}$$

par la linéarité de l'opérateur L, la bilinéarité des opérateurs C_1, C_2 et la symétrie de C_2. En faisant le produit scalaire par h dans (2.3) et par g dans (2.4), on obtient:

$$\|h\|_V^2 = (Lh, h)_V + (C_2(h, h), f)_W + (C_2(w, h), g)_W + (C_2(h, h), g)_W, \tag{2.5}$$

$$\|g\|_W^2 = -2(C_2(w, h), g)_W - (C_2(h, h), g)_W, \tag{2.6}$$

grâce à (4.1) dans [1]. On voit de (2.5) et (2.6) que:

$$2\|h\|_V^2 + \|g\|_W^2 = 2(Lh, h)_V + 2(C_2(h, h), f)_W + (C_2(h, h), g)_W. \tag{2.7}$$

D'après [1], on sait que le couple $/w, \Phi/ \in V \times W^{2,2}(\Omega)$ est une solution variationnelle si:

$$\Phi = f + F, \tag{2.8}$$

où $/w, f/ \in W$ est une solution variationnelle excessive et F est une fonction de $W^{2,2}(\Omega)$ vérifiant (2.7), (2.8) dans [1].

Théorème. 1. (i) *Soit* $/w, \Phi/ \in V \times W^{2,2}(\Omega)$ *une solution variationnelle du problème vérifiant*:

$$B(\Phi; h, h) \leqq 0, \tag{2.9}$$

pour tout $h \in V$. *Alors*:

$$\|\bar{w} - w\|_V \geqq 2\sqrt{(2)}\,\|C_2\|^{-1}, \tag{2.10}$$

$$\|\bar{\Phi} - \Phi\|_{W^{2,2}} \geqq 2\|C_2\|^{-1}, \tag{2.11}$$

pour toutes solutions variationnelles du problème $/\bar{w}, \bar{\Phi}/ \neq /w, \Phi/$.

(ii) *Le problème possède une solution unique si l'inégalité* (2.9) *est satisfaite pour toute solution variationnelle* $/w, \Phi/ \in V \times W^{2,2}(\Omega)$ *et tout* $h \in V$.

Démonstration. (i) Par (3.7), (3.13) et (3.15) dans [1], on a:

$$(C_2(h, h), f)_W = B(h; h, f) = B(f; h, h),$$
$$(Lh, h)_V = B(F; h, h),$$

et donc:

$$(C_2(h, h), f)_W + (Lh, h)_V = B(\Phi; h, h), \tag{2.12}$$

d'après (2.8). Les relations (2.9) et (2.12) reportées dans (2.7) donnent:

$$2\|h\|_V^2 + \|g\|_W^2 \leqq (C_2(h, h), g)_W.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.4), on obtient:

$$2\|h\|_V^2 - \|C_2\| \, \|h\|_V^2 \, \|g\|_W + \|g\|_W^2 \leqq 0 \,. \tag{2.13}$$

On déduit de (2.13) que:

$$\|h\|_V \geqq 2\sqrt{(2)}\,\|C_2\|^{-1} \quad \text{et} \quad \|g\|_W \geqq 2\|C_2\|^{-1} \,.$$

Grâce à (2.1), (2.2) et (2.8), on conclut (2.10) et (2.11) avec:

$$\bar{\Phi} = \bar{f} + F \,. \tag{2.14}$$

(ii) Soient $/w, \Phi/$ et $/\bar{w}, \bar{\Phi}/$ deux solutions variationnelles du problème satisfaisant (2.9). Alors, on a (2.12) et:

$$(C_2(h, h), \bar{f})_W + (Lh, h)_V = B(\bar{\Phi}; h, h) \,, \tag{2.15}$$

$$(C_2(h, h), f)_W + (C_2(h, h), g)_W = (C_2(h, h), \bar{f})_W \,, \tag{2.16}$$

par (2.2). Les égalités (2.12), (2.15) et (2.16) reportées dans (2.7) donnent:

$$2\|h\|_V^2 + \|g\|_W^2 = B(\Phi; h, h) + B(\bar{\Phi}; h, h) \,. \tag{2.17}$$

Par (2.9), on a:

$$2\|h\|_V^2 + \|g\|_W^2 \leqq 0 \,. \tag{2.18}$$

On conclut de (2.18) que:

$$h = 0 \quad \text{dans } V, \quad g = 0 \quad \text{dans } W,$$

et donc:

$$w = \bar{w} \quad \text{dans } V, \quad \Phi = \bar{\Phi} \quad \text{dans } W^{2,2}(\Omega) \,,$$

par (2.1), (2.2), (2.8) et (2.14).

Remarque 1. Avec la condition suffisante:

$$\text{(i)} \quad \Phi_{xx} \geqq 0 \,, \quad \Phi_{yy} \geqq 0 \quad \text{et} \quad \Phi_{xx}\Phi_{yy} \geqq [\Phi_{xy}]^2 \,, \tag{2.19}$$

presque partout dans Ω, ou:

$$\text{(ii)} \quad \frac{\delta^2 \Phi}{\delta m^2} = \Phi_{xx} m_x^2 + 2\Phi_{xy} m_x m_y + \Phi_{yy} m_y^2 \geqq 0 \,, \tag{2.20}$$

presque partout dans Ω, pour tout vecteur unitaire $\bar{m} = (m_x, m_y)$, on a (2.9). En effet, on a:

$$B(\Phi; h, h) = \int_\Omega [-\Phi_{xx} h_y^2 + 2\Phi_{xy} h_x h_y - \Phi_{yy} h_x^2] \, dx \, dy \,, \tag{2.21}$$

par notation de B dans [1]. (i) Il découle de (2.19) que:

$$|\Phi_{xy}| \leqq [\Phi_{xx}]^{1/2} \, [\Phi_{yy}]^{1/2} \quad \text{sur } \Omega \,,$$

et, par conséquent, on obtient:

$$- \Phi_{xx} h_y^2 + 2\Phi_{xy} h_x h_y - \Phi_{yy} h_x^2 \leqq$$
$$\leqq - \Phi_{xx} h_y^2 + 2[\Phi_{xx}]^{1/2} [\Phi_{yy}]^{1/2} |h_x| |h_y| - \Phi_{yy} h_x^2 \leqq 0 \quad \text{sur } \Omega .$$

Cette inégalité avec (2.21) fournit (2.9).

(ii) Si $h_x = h_y = 0$, on a (2.9) évidemment. Si $h_x \neq 0$ ou $h_y \neq 0$, on pose:

$$m_x = [h_x^2 + h_y^2]^{-1/2} h_y , \quad m_y = -[h_x^2 + h_y^2]^{-1/2} h_x \quad \text{sur } \Omega .$$

Par ces égalités, (2.20) et (2.21), on a (2.9).

Théorème 2. (i) *Soit $/w, \Phi/ \in V \times W^{2,2}(\Omega)$ une solution variationnelle du problème vérifiant*:

$$\max_{\bar{\Omega}} |\Phi| \leqq \frac{1 - \sigma}{2} \text{[1]} . \tag{2.22}$$

Alors:

$$\|\bar{w} - w\|_V \geqq 2\|C_2\|^{-1} , \tag{2.23}$$

$$\|\bar{\Phi} - \Phi\|_{W^{2,2}} \geqq \|C_2\|^{-1} , \tag{2.24}$$

pour toutes solutions variationnelles du problème $/\bar{w}, \bar{\Phi}/ \neq /w, \Phi/$.

(ii) *Le problème possède une solution unique si l'inégalité (2.22) est satisfaite pour toute solution variationnelle $/w, \Phi/ \in V \times W^{2,2}(\Omega)$.*

Démonstration. (i) Grâce au Lemme 4.7 dans [1] et par la formule de Green, on a:

$$(Lh, h)_V + (C_2(h, h), f)_W \leqq \int_\Omega [h, h] \, \Phi \, dx \, dy . \tag{2.25}$$

Il est facile de voir que:

$$\int_\Omega [h, h] \, \Phi \, dx \, dy \leqq \max_{\bar{\Omega}} |\Phi| \, \|h\|^2_{W_0^{2,2}} . \tag{2.26}$$

Puisque:

$$(1 - \sigma) \|h\|^2_{W_0^{2,2}} \leqq \|h\|^2_V ,$$

(cf. [4], p. 287), il découle immédiatement de (2.22), (2.25) et (2.26) que:

$$(Lh, h)_V + (C_2(h, h), f)_W \leqq \tfrac{1}{2}\|h\|^2_V . \tag{2.27}$$

Les inégalités (1.4) et (2.27) reportées dans (2.7) donnent:

$$\|h\|^2_V - \|C_2\| \, \|h\|^2_V \, \|g\|_W + \|g\|^2_W \leqq 0 ,$$

[1]) Par $W^{2,2}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, on a: $\Phi \in C(\bar{\Omega})$. σ est le coefficient de Poisson.

et on déduit que:

$$\|h\|_V \geqq 2\|C_2\|^{-1} \quad \text{et} \quad \|g\|_W \geqq \|C_2\|^{-1} .$$

Grâce à (2.1), (2.2), (2.8) et (2.14), on conclut (2.23) et (2.24).

(ii) Soient $/w, \Phi/$ et $/\bar{w}, \bar{\Phi}/$ deux solutions variationnelles du problème satisfaisant à (2.22). On a (2.27) et:

$$(2.28) \qquad (Lh, h)_V + (C_2(h, h), \bar{f})_W \leqq \tfrac{1}{2}\|h\|_V^2 .$$

Les relations (2.16), (2.27) et (2.28) reportées dans (2.7) donnent:

$$2\|h\|_V^2 + \|g\|_W^2 \leqq \|h\|_V^2 .$$

On conclut que:

$$h = 0 \quad \text{dans } V, \quad g = 0 \quad \text{dans } W,$$

et donc:

$$w = \bar{w} \quad \text{dans } V, \quad \Phi = \bar{\Phi} \quad \text{dans } W^{2,2}(\Omega),$$

par (2.1), (2.2), (2.8) et (2.14).

3. INTRODUCTION D'UN PARAMETRE

Nous nous intéresserons aux équations:

$$(3.1) \qquad w = Lw + C_1(f, w) + \lambda q^* \quad \text{dans } V,$$

$$(3.2) \qquad f = -C_2(w, w) \quad \text{dans } W,$$

où:

$$\lambda \in \langle 0, 1\rangle$$

est un paramètre. On désigne:

$$(3.3) \qquad H = V \times W .$$

L'espace H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$(3.4) \qquad (/u_1, v_1/, /u_2, v_2/)_H = (u_1, u_2)_V + (v_1, v_2)_W ,$$

et la norme:

$$(3.5) \qquad \|/u, v/\|_H = \{\|u\|_V^2 + \|v\|_W^2\}^{1/2} ,$$

pour tous u, $u_1, u_2 \in V$ et $v, v_1, v_2 \in W$. Il est clair que les équations (3.1) et (3.2) sont équivalentes à l'équation:

$$(3.6) \qquad P_\lambda/w, f/ = /0, 0/ \quad \text{dans } H ,$$

où l'opérateur $P_\lambda\colon H \to H$ est défini par:

$$(3.7) \qquad P_\lambda/w, f/ = /2w - 2Lw - 2C_1(f, w) - 2\lambda q^*, f + C_2(w, w)/ ,$$

pour tout couple $/w, f/ \in H$. Par définition de la différentielle de Fréchet, on a:

$$(3.8) \qquad P'_\lambda(/w, f/; /h, g/) =$$
$$= /2h - 2Lh - 2C_1(f, h) - 2C_1(g, w), g + 2C_2(w, h)/ ,$$

$$(3.9) \qquad P''_\lambda(/w, f/; /h, g/, /\bar{h}, \bar{g}/) = /-2C_1(\bar{g}, h) - 2C_1(g, \bar{h}), 2C_2(\bar{h}, h)/ ,$$

grâce à la linéarité de L, la bilinéarité de C_1 et C_2, pour tous $/w, f/$, $/h, g/$ et $/\bar{h}, \bar{g}/ \in H$. Par (4.1) dans [1], (3.4), (1.4) et l'inégalité de Hölder, on a:

$$(P''_\lambda(/w, f/; /h, g/, /\bar{h}, \bar{g}/), /u, v/)_H =$$
$$= -2(C_2(h, u), \bar{g})_W - 2(C_2(\bar{h}, u), g)_W + 2(C_2(h, \bar{h}), v)_W \leqq$$
$$\leqq 2\|C_2\| \{\|h\|_V \|u\|_V \|\bar{g}\|_W + \|\bar{h}\|_V \|u\|_V \|g\|_W + \|h\|_V \|\bar{h}\|_V \|v\|_W\} \leqq$$
$$\leqq 3\|C_2\| \|/h, g/\|_H \|/\bar{h}, \bar{g}/\|_H \|/u, v/\|_H ,$$

pour tous $/w, f/$, $/h, g/$, $/\bar{h}, \bar{g}/$ et $/u, v/ \in H$. On déduit de cette inégalité que:

$$\|P''_\lambda(/w, f/; /h, g/, /\bar{h}, \bar{g}/)\|_H \leqq 3\|C_2\| \|/h, g/\|_H \|/\bar{h}, \bar{g}/\|_H ,$$

et donc:

$$(3.10) \qquad \|P''_\lambda/w, f/\| \leqq 3\|C_2\| ,$$

pour tout couple $/w, f/ \in H$.

4. PROLONGEMENT CONTINU DE LA SOLUTION

Dans la suite, on désigne:

$$/w(\lambda), f(\lambda)/ \in H$$

une solution de l'equation (3.6) pour $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$. Il est clair que $/w(0), f(0)/ = /0, 0/$ et $/w(1), f(1)/$ est une solution variationnelle excessive du problème. En utilisant la méthode de Newton-Kantorovitch (cf. [2]) sur l'équation d'opérateur (3.6), on obtient:

$$(4.1) \qquad /w^{n+1}, f^{n+1}/ = /w^n, f^n/ - [P'_\lambda/w^0, f^0/]^{-1} P_\lambda/w^n, f^n/ ,$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Soit $/w(\lambda_i), f(\lambda_i)/ \in H$ une solution connue pour $i \in N$. Nous allons construire une solution de l'équation (3.6) pour $\lambda = \lambda_{i+1}$, $\lambda_{i+1} > \lambda_i$. On pose:

$$\Delta\lambda = \lambda_{i+1} - \lambda_i .$$

Théorème 3. *Soit*:

$$|w^0, f^0| = |w(\lambda_i), f(\lambda_i)| \quad \text{dans } H\,, \tag{4.2}$$

et:

$$\Delta\lambda < \{12\|C_2\|\,\|q^*\|_V\}^{-1}\,. \tag{4.3}$$

Supposons que l'inégalité (2.9)[1]) *ou* (2.22) *soit vraie pour* $\lambda = \lambda_i$. *Alors, une suite* $\{|w^n, f^n|\} \subset H$ *définie par* (4.1) *converge vers* $|w(\lambda_{i+1}), f(\lambda_{i+1})| \in H$.

Démonstration. D'après (4.1) dans [1], (3.4) et (3.8), on a:

$$(P'_\lambda(|w^0, f^0|; |h, g|), |h, g|)_H = \tag{4.4}$$

$$= 2\|h\|_V^2 - 2(Lh, h)_V - 2(C_2(h, h), f(\lambda_i))_W + \|g\|_W^2\,,$$

pour $\lambda = \lambda_{i+1}$ et tout $|h, g| \in H$. Il découle de (2.9) ou (2.22) que:

$$(Lh, h)_V + (C_2(h, h), f(\lambda_i))_W \leqq 0\,. \tag{4.5}$$

(cf. (2.12)) ou:

$$2(Lh, h)_V + 2(C_2(h, h), f(\lambda_i))_W \leqq \|h\|_V^2\,, \tag{4.6}$$

(cf. (2.27)), respectivement. L'inégalité (4.5) ou (4.6) reportée dans (4.4) donne:

$$(P'_\lambda(|w^0, f^0|; |h, g|), |h, g|)_H \geqq \|h\|_V^2 + \|g\|_W^2\,,$$

et donc:

$$\|P'_\lambda(|w^0, f^0|; h, g|)\|_H \geqq \||h, g|\|_H\,, \tag{4.7}$$

par (3.5) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $\lambda = \lambda_{i+1}$ et tout $|h, g| \in H$. On déduit de (4.7) que:

$$\|[P'_\lambda|w^0, f^0|]^{-1}\| \leqq 1\,, \tag{4.8}$$

pour $\lambda = \lambda_{i+1}$. Puisque $|w(\lambda_i), f(\lambda_i)| \in H$ est une solution de l'équation (3.6):

$$P_\lambda|w^0, f^0| = P_\lambda|w(\lambda_i), f(\lambda_i)| = |0, 0| \quad \text{dans } H\,,$$

pour $\lambda = \lambda_i$ et donc:

$$P_\lambda|w^0, f^0| = |-2\Delta\lambda q^*, 0| \quad \text{dans } H\,,$$

pour $\lambda = \lambda_{i+1}$, grâce à (3.7). Par (3.5), on a:

$$\|P_\lambda|w^0, f^0|\|_H = 2\Delta\lambda\|q^*\|_V\,, \tag{4.9}$$

pour $\lambda = \lambda_{i+1}$. Une suite de Newton-Kantorovitch définie par (4.1) converge si (cf. [2]):

$$\|[P'_\lambda|w^0, f^0|]^{-1}\|^2\,\|P_\lambda|w^0, f^0|\|_H\,\|P''_\lambda|w, f|\| < \tfrac{1}{2}\,, \tag{4.10}$$

pour $\lambda = \lambda_{i+1}$. Par (3.10), (4.3), (4.8) et (4.9), on a (4.10).

[1]) Pour la condition suffisante, cf. la Remarque 1.

Remarque 2. On pose:

$$\lambda_1 = 0$$

Soit l'inégalité (2.9) ou (2.22) est satisfaite pour $/w(0), f(0)/ = /0, 0/$. Si nous marchons par $\Delta\lambda$, nous allons prolonger continuement de $/w(\lambda_1), f(\lambda_1)/$ dans $/w(\lambda_N), f(\lambda_N)/ = /w(1), f(1)/$ qui est une solution variationnelle excessive du problème (1.1)–(1.7) dans [1].

Remarque 3. Dans la pratique, la formule (4.1) n'est pas utilisable, parce que l'opérateur P est abstrait. Mais, la formule (4.1) est équivalente à:

$$P'_\lambda(/w^0, f^0/; /w^{n+1}, f^{n+1}/) = P'_\lambda(/w^0, f^0/; /w^n, f^n/) - P_\lambda/w^n, f^n/$$

et grâce à (3.7), (3.8), on obtient:

$$\begin{aligned}(4.11)\qquad & w^{n+1} - Lw^{n+1} - C_1(f^0, w^{n+1}) - C_1(f^{n+1}, w^0) = \\ & = -C_1(f^0, w^n) - C_1(f^n, w^0) + C_1(f^n, w^n) + \lambda q^* \quad \text{dans } V,\end{aligned}$$

$$(4.12)\qquad f^{n+1} + 2C_2(w^0, w^{n+1}) = 2C_2(w^0, w^n) - C_2(w^n, w^n) \quad \text{dans } W.$$

En faisant le produit scalaire par tout $h \in V$ dans (4.11) et par tout $g \in W$ dans (4.12), on obtient:

$$\begin{aligned}&(w^{n+1}, h)_V - B(F; w^{n+1}, h) - B(f^0; w^{n+1}, h) - B(f^{n+1}; w^0, h) = \\ &= -B(f^0; w^n, h) - B(f^n; w^0, h) + B(f^n; w^n, h) + + \lambda \int_\Omega qh \, dx \, dy + \lambda p(h),\end{aligned}$$

pour tout $h \in V$, et:

$$(f^{n+1}, g)_W + 2B(w^{n+1}; w, g) = 2B(w^n; w^0, g) - B(w^n; w^n, g),$$

pour tout $g \in W$, grâce à (3.13)–(3.16) dans [1] et par notation dans [1].

5. ESTIMATION PAR EXCES DE $\|C_2\|$

Soient w at $\bar{w}$ des éléments de V et g un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$. En appliquant la formule de Green et par (3.15) dans [1], on obtient:

$$(5.1)\qquad (C_2(w, \bar{w}), g)_W = B(w; \bar{w}, g) = \int_\Omega [w, \bar{w}] \, g \, dx \, dy.$$

Par (4.12) dans [1] et l'inégalité de Hölder, on a:

$$(5.2)\qquad \left|\int_\Omega [w, \bar{w}] \, g \, dx \, dy\right| \leqq \max_{\bar{\Omega}} |g| \int_\Omega |[w, \bar{w}]| \, dx \, dy \leqq$$

$$\leqq \max_{\bar{\Omega}} |g| \int_\Omega \{|w_{xx}|\,|\bar{w}_{yy}| + \sqrt{(2)}\,|w_{xy}|\,\sqrt{(2)}\,|\bar{w}_{xy}| + |w_{yy}|\,|\bar{w}_{xx}|\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqq$$

$$\leqq \max_{\bar{\Omega}} |g|\ \|w\|_{W_0{}^{2,2}}\ \|\bar{w}\|_{W_0{}^{2,2}}\,.$$

Puisque Ω est un ouvert borné de E_2, il existe un rectangle:

$$R = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle\,,$$

tel que:

$$\Omega \subset R\,.$$

On définit une fonction $\bar{g}$ sur R par:

$$\bar{g}(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } R - \Omega\,. \end{cases} \tag{5.3}$$

On a:

$$\bar{g}(a, y) = \bar{g}(x, c) = 0\,,$$

et:

$$\int_a^x \int_c^y \bar{g}_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \bar{g}(x, y)\,,$$

pour tout $(x, y) \in R$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$|\bar{g}(x, y)| \leqq \int_a^x \int_c^y |\bar{g}_{xy}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqq \int_a^b \int_c^d |\bar{g}_{xy}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqq$$

$$\leqq \left\{\int_a^b \int_c^d (\bar{g}_{xy})^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}^{1/2} \left\{\int_a^b \int_c^d \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}^{1/2},$$

i.e.:

$$|\bar{g}(x, y)| \leqq M^{1/2} \left\{\int\int_R (\bar{g}_{xy})^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}^{1/2}, \tag{5.4}$$

pour tout $(x, y) \in R$, où:

$$M = (b - a)(d - c)\,. \tag{5.5}$$

On déduit de (5.3) et (5.4) que:

$$|g(x, y)| \leqq M^{1/2} \left\{\int\int_\Omega (g_{xy})^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}^{1/2},$$

et donc:

$$\max_{\bar{\Omega}} |g| \leqq \left(\frac{M}{2}\right)^{1/2} \|g\|_W\,. \tag{5.6}$$

Par (5.1), (5.2) et (5.6), on a:

$$(C_2(w, \bar{w}), g)_W \leqq \left(\frac{M}{2}\right)^{1/2} \|w\|_{W_0{}^{2,2}}\,\|\bar{w}\|_{W_0{}^{2,2}}\,\|g\|_W\,. \tag{5.7}$$

La densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans l'espace $W_0^{2,2}(\Omega)$, implique que (5.7) est satisfaite pour tout $g \in W_0^{2,2}(\Omega)$. On pose:

$$g = C_2(w, \bar{w}) . \tag{5.8}$$

Il découle de (5.7) que:

$$\|C_2(w, \bar{w})\|_W \leqq \left(\frac{M}{2}\right)^{1/2} \|w\|_{W_0^{2,2}} \|\bar{w}\|_{W_0^{2,2}} . \tag{5.9}$$

Pusique:

$$(1 - \sigma) \|w\|^2_{W_0^{2,2}} \leqq \|w\|^2_V ,$$

(cf. [4]), on déduit de (5.9) que:

$$\|C_2(w, \bar{w})\|_W \leqq \left(\frac{M}{2}\right)^{1/2} (1 - \sigma)^{-1} \|w\|_V \|\bar{w}\|_V ,$$

pour tous $w, \bar{w} \in V$. Par définition, on a:

$$\|C_2\| \leqq \left(\frac{M}{2}\right)^{1/2} (1 - \sigma)^{-1} ,$$

avec (5.5).

Références

[1] *J. Cibula:* Equations de von Kármán. I. Résultat d'existence pour les problèmes aux limites non homogènes. Aplikace matematiky, 29 (1984), 317—332.

[2] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов:* Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, Москва 1959.

[3] *Н. Ф. Морозов:* Избранные двумерные задачи теории упругости. Изд. Ленинградского университета, Ленинград 1978.

[4] *K. Rektorys:* Les méthodes en problèmes des ingénieurs et de la physique mathématique. SNTL, Prague 1974 (en tchèque).

[5] *L. Reinhart:* On the numerical analysis of the von Kármán equations: Mixed finite element approximation and continuation technicues. Numer. Math., 39 (1982), 371—404.

Súhrn

ROVNICE VON KÁRMÁNA

II. APROXIMÁCIA RIEŠENIA

JULIUS CIBULA

V článku sú uvedené postačujúce podmienky pre lokálnu a globálnu jednoznačnosť riešenia úlohy. Variačné riešenie úlohy je konštruované Newton-Kantorovičovou metódou a metódou spojitého predĺžovania riešenia pri uvedených postačujúcich podmienkach.

Adresse d'auteur: RNDr. *Július Cibula*, CSc., Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Strojnícka fakulta SVŠT, Gottwaldovo nám. 17, 812 31 Bratislava.