Willibald Doeringer

Zu einem Resultat von K. Lommatzsch über allgemeine quadratische Optimierungsprobleme

Aplikace matematiky, Vol. 28 (1983), No. 3, 173–176

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104023

SVAZEK 28 (1983) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 3

ZU EINEM RESULTAT VON K. LOMMATZSCH ÜBER ALLGEMEINE QUADRATISCHE OPTIMIERUNGSPROBLEME

WILLIBALD DOERINGER

(Eingegangen 22. März 1982)

In seinem Artikel „Ein notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium für allgemeine quadratische Optimierungsprobleme" ([1]; vgl. dazu auch [2], § 7) untersucht K. Lommatzsch das folgende Optimierungsproblem

$$\min \{f(x, x) \mid x \in M\} \tag{1}$$

für eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ und

$$f(x, x) = x'Cx + 2p'x \tag{2}$$

mit einer reellen, symmetrischen $(n \times n)$-Matrix C und einem festen Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ – dabei sei wie üblich für $x \in \mathbb{R}^n\, x' = (x_1, \ldots, x_n)$. Er führt in Anlehnung an die Lineare Parametrische Optimierung (vgl. [3], [4]) sogenannte Stabilitätsmengen $K_M^{\bar{x}}$ ein gemäß

$$K_M^{\bar{x}} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (Cy + p)'(x - \bar{x}) \geqq 0, x \in M\} \tag{3}$$

und folgert mit den Bezeichnungen

Definition. 1. *Ein Punkt $x^0 \in M$ heißt (strenger) lokaler Optimalpunkt der Aufgabe (1), falls eine Umgebung $U(x^0)$ von x^0 – stets in der üblichen Topologie des $\mathbb{R}^n$ – existiert, sodaß für alle $x \in M \cap U(x^0)$, $x \neq x^0$, gilt: $f(x, x) \geqq f(x^0, x^0)$ $(f(x, x) > f(x^0, x^0))$.*

das Resultat (vgl. [1], (13) und (17))

Satz 1. *Ist der Punkt $x^0 \in M$ ein lokaler Optimalpunkt der Aufgabe (1), so gilt:*

(a) $x^0 \in K_M^{x^0}$

und

(b) *aus $x^0 \in K_M^{\bar{x}}$ für ein $\bar{x} \in M - \{x^0\}$ folgt stets $\bar{x} \notin K_{[x^0,\bar{x}]}^{\bar{x}}$ oder $\bar{x} \in K_{[x^0,\bar{x}]}^{\bar{x}} \cap K_{[x^0,\bar{x}]}^{x^0}$ (dabei bezeichnet $[x^0, \bar{x}]$ die Menge $\{x \in M \mid x = \lambda x^0 + (1 - \lambda)\bar{x}, 0 \leqq \lambda \leqq 1\}$).*

Der Umstand, daß bei einer positiv-semidefiniten Matrix C – d.h. $f(x, x)$ ist eine konvexe Funktion – die Beziehung $x^0 \in K_M^{x^0}$, $x^0 \in M$, bereits hinreichend ist für die globale Optimalität von x^0 für die Aufgabe (1), führt nun zu der Vermutung, daß die notwendigen Bedingungen aus Satz 1 zumindest für lokale Optimalität hinrechend sind, wie Lommatzsch auch in [1], (18) formuliert. Das nachfolgende Beispiel zeigt, daß dies i.a. leider nicht der Fall ist.

Beispiel. Wähle auf dem $\mathbb{R}^2$ die Funktion $F(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = -(x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1)$ und $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geqq 0,\ 1 \geqq x_2 \geqq 0,\ x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \leqq 4\}$. Man erkennt sofort, daß $x^0 = (0, 0)'$ kein lokaler Optimalpunkt der entsprechenden Aufgabe (1) ist, aber $x^0 \in K_M^{x^0}$ und $x^0 \notin K_M^x$ für alle $x \in M - \{x^0\}$ gilt. Die Bedingungen aus Satz 1 sind somit nicht hinreichend für lokale Optimalität.

Es bleibt somit das Problem, Voraussetzungen zu finden, die solche Beispiele ausschließen – dies führte zu folgender Begriffsbildung:

Definition 2. *M heißt lokal-polyedrisch bezüglich $x^0 \in M$, wenn eine Umgebung $U(x^0)$ von x^0 existiert, so daß $U(x^0) \cap M$ ein Polyeder ist.*

Man beachte, daß M insbesondere lokal-polyedrisch ist bezüglich jedes relativ inneren Punktes. – Wir können nun zeigen

Satz 2. *Sei $x^0 \in K_M^{x^0}$ und M lokal-polyedrisch bezüglich x^0; dann gelten folgende Aussagen:*

(a) *Ist $x^0 \notin K_M^x$ für alle $x \in M - \{x^0\}$, so ist x^0 ein strenger lokaler Optimalpunkt der Aufgabe (1),*

und

(b) *folgt aus $x^0 \in K_M^{\bar{x}}$, $\bar{x} \in M - \{x^0\}$, stets $\bar{x} \notin K_{[x^0,\bar{x}]}^{\bar{x}}$ oder $\bar{x} \in K_{[x^0,\bar{x}]}^{x^0} \cap K_{[x^0,\bar{x}]}^{\bar{x}}$ so ist x^0 ein lokaler Optimalpunkt der Aufgabe (1).*

Beweis von Satz 2. Zunächst gilt für alle $x \in M$

(4) $$(Cx^0 + p)'(x - x^0) \geqq 0$$

und

(5) $$\text{aus } (Cx^0 + p)'(x - x^0) = 0 \text{ folgt stets } (Cx + p)'(x - x^0) \geqq 0 \text{ und } (x - x^0)'C(x - x^0) \geqq 0\,.$$

Denn (4) gibt gerade die Voraussetzung $x^0 \in K_M^{x^0}$ wieder und (5) läßt sich so einsehen: Ist $(Cx^0 + p)'(x - x^0) = 0$ für ein $x \in M$, so folgt wegen (4) $x^0 \in K_M^x$ – im Falle (a) folgt also stets für alle $x \in M - \{x^0\}$ $(Cx^0 + p)'(x - x^0) > 0$ – und wegen der Voraussetzung aus (b) ergibt sich für $x \notin K_{[x^0,x]}^x$ sofort $(Cx + p)'(x - x^0) > 0$ und für $x \in K_{[x^0,x]}^{x^0} \cap K_{[x^0,x]}^x$ schließlich $(Cx + p)'(x - x^0) = 0$. Und weiter erhalten wir aus $(Cx^0 + p)'(x - x^0) = 0$, daß $(C(x - x^0) + Cx^0 + p)'(x - x^0) \geqq 0$ gilt, mithin also $(x - x^0)'C(x - x^0) \geqq 0$.

Wählen wir nun eine Folge (x^k), $k \in \mathbb{N}$, in M mit $x^k \to x^0$, $k \to \infty$, so können wir, da M als lokal-polyedrisch bezüglich x^0 vorausgesetzt ist, Elemente $x_1, \ldots, x_r$ und $y_{r+1}, \ldots, y_{r+l}$ in M so finden, daß für $k \geqq k_0$ gilt:

$$x^k = \lambda_1^k x_1 + \ldots + \lambda_r^k x_r + \mu_{r+1}^k y_{r+1} + \ldots + \mu_{r+l}^k y_{r+l}$$

mit
$$\lambda_k^i \geqq 0 \,, \quad \mu_j^k \geqq 0 \,, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k + \sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k = 1$$

und

(6)
$$(Cx^0 + p)' (x_i - x^0) = 0 \,, \quad i = 1, \ldots, r$$

bzw.

(7)
$$(Cx^0 + p)' (y_j - x^0) > 0 \,, \quad j = r + 1, \ldots, r + l \,.$$

Es folgt dann notwendig

(8)
$$\mu_j^k \to 0 \,, \quad k \to \infty \,, \quad j = 1, \ldots, r + l$$

insbesondere also

(9)
$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k x_i \to x^0 \,, \quad k \to \infty \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k \to 1 \,, \quad k \to \infty \,.$$

Beachtet man nun, daß (für $k \geqq k_0$) $f(x^k, x^k)$ die folgende Darstellung besitzt:

$$f(x^k, x^k) = f(x^0, x^0) + \Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k (x_i - x^0)\Big)' C\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k (x_i - x^0)\Big) +$$
$$+ 2\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k (x_i - x^0)\Big)' C\Big(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0)\Big) + \Big(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0)\Big)' C \,.$$
$$\cdot \Big(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0)\Big) + 2(Cx^0 + p)' \Big(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0)\Big)$$

so liefert (5) folgende Abschätzung für $k \geqq k_0$

$$f(x^k, x^k) - f(x^0, x^0) \geqq 2\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k (x_i - x^0)\Big)' C\Big(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0)\Big) +$$
$$+ \Big(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0)\Big)' C\Big(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0)\Big) + 2(Cx + p)' \Big(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0)\Big) \geqq$$
$$\geqq \varepsilon \sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k + (\mu_{r+1}^k, \ldots, \mu_{r+l}^k)\, \hat{C} (\mu_{r+1}^k, \ldots, \mu_{r+l}^k)'$$

für geeignetes $\varepsilon > 0$ und reelle, symmetrische $(l \times l)$-Matrix $\hat{C}$ und für alle $k \geqq k_1 \geqq$ $\geqq k_0$. Dabei folgt die zweite Ungleichung aus (7), (8) und (9). Beachtet man noch $\mu_j^k \geqq 0$, so erhält man für hinreichend großes k_2:

$$f((x^k, x^k) - f(x^0, x^0) \geqq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k, \; k \geqq k_2 \,.$$

Im Falle (b) des Satzes 2 folgt hieraus sofort, daß für $k \geqq k_2$ $f(x^k, x^k) \geqq f(x^0, x^0)$ gilt, d.h. x^0 ist ein lokaler Optimalpunkt der Aufgabe (1). Und im Falle (a) folgt für $x \in M - \{x^0\}$ notwendig $\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k > 0$, $k \geqq k_0$ – d.h., x^0 ist ein strenger lokaler Optimalpunkt der Aufgabe (1).

Der Satz 2 ist damit vollständig bewiesen.

Literatur

[1] *K. Lommatzsch:* Ein notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium für allgemeine quadratische Optimierungsprobleme. Apl. Mat. 19 (1974), 193–197.

[2] *K. Lommatzsch* (Hrsg.): Anwendungen der Linearen Parametrischen Optimierung. Birkhäuser-Verlag Stuttgart und Basel, 1979.

[3] *F. Nožička, J. Guddat, B. Bank, H. Hollatz:* Theorie der Linearen Parametrischen Optimierung. Akademie-Verlag Berlin, 1974.

[4] *F. Nožička, J. Guddat, H. Hollatz*: Theorie der Linearen Optimierung. Akademie-Verlag Berlin, 1972.

Souhrn

K JEDNOMU VÝSLEDKU K. LOMMATZSCHE O OBECNÝCH PROBLÉMECH KVADRATICKÉ OPTIMALIZACE

WILLIBALD DOERINGER

V práci je odvozena postačující podmínka lokální optimality pro problémy kvadratické optimalizace. Autor užívá pojmu stabilní množiny, kterou zavedl K. Lommatzsch v souvislosti s problémy lineární parametrické optimalizace.

Anschrift des Verfassers: Willibald Doeringer, Dipl.-Math., Tesdata, Gesellschaft für Datenverarbeitung m.b.H., Am Lindenbaum 24, D-6000 Frankfurt a. Main 50.