Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Über ein mehrparametriges Iterationsverfahren für p-zyklische lineare Gleichungssysteme

Aplikace matematiky, Vol. 28 (1983), No. 1, 44–54

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104001

ÜBER EIN MEHRPARAMETRIGES ITERATIONSVERFAHREN FÜR p-ZYKLISCHE LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen am 8. Dezember 1981)

In der Arbeit wird ein gewisses mehrparametriges Iterationsverfahren für die Lösung eines linearen Gleichungssystems von der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{1}$$

mit einer schwach p-zyklischen Blockmatrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \ldots, & \mathbf{O}, & \mathbf{B}_{1p} \\ \mathbf{B}_{21}, & \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \ldots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}, & \mathbf{B}_{32}, & \mathbf{O}, & \ldots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \ldots, & \mathbf{B}_{p,p-1}, & \mathbf{O} \end{pmatrix} \tag{2}$$

untersucht.

Das Iterationsverfahren ist folgenderweise definiert:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p)\, \mathbf{x}_k + \mathbf{b}' , \tag{3}$$

wo

$$\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p) = \mathbf{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p)^{-1}\, \mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p), \tag{4}$$

$$\mathbf{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p) = \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{E}_1, & \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \ldots, & \mathbf{O}, & \beta_1\mathbf{B}_{1p} \\ \beta_2\mathbf{B}_{21}, & \alpha_2\mathbf{E}_2, & \mathbf{O}, & \ldots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}, & \beta_3\mathbf{B}_{32}, & \alpha_3\mathbf{E}_3, & \ldots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \ldots, & \beta_p\mathbf{B}_{p,p-1}, & \alpha_p\mathbf{E}_p \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p) = \tag{6}$$

$$= \begin{bmatrix} (\alpha_1 - 1)\,\mathbf{E}_1, & \mathbf{O}, & \ldots, & \mathbf{O}, & (\beta_1 + 1)\,\mathbf{B}_{1p} \\ (\beta_2 + 1)\,\mathbf{B}_{21}, & (\alpha_2 - 1)\,\mathbf{E}_2, & \ldots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}, & (\beta_3 + 1)\,\mathbf{B}_{32}, & \ldots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \ldots, & (\beta_p + 1)\,\mathbf{B}_{p,p-1}), & (\alpha_p - 1)\,\mathbf{E}_p \end{bmatrix};$$

dabei sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p$ reele Parameter und $\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_p$ sind die Einheitsmatrizen mit der Blockzerlegung der Matrix $\boldsymbol{B}$, entsprechenden Dimension.

Bemerkung. Von dem praktischen Gesichtspunkt ist der Fall mir einer Dreieckmatrix $\boldsymbol{P}$ der wichtigste; das tritt für $\beta_1 = 0$ ein. Für den Fall der schwach 2-zyklischen Matrix $\boldsymbol{B}$ ist dieses Iterationsverfahren mit dem in der Arbeit [2] untersuchten Iterationsverfahren identisch.

Der folgende Satz drückt den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Matrizen $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p)$ aus.

Satz 1. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p)$, $\lambda \neq (\beta_i + 1)/\beta_i$, $i = 1, \ldots p$. Dann ist jede von Null verschiedene Zahl μ, die die Beziehung*

$$\prod_{i=1}^{p} (1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i) = \mu^p \prod_{j=1}^{p} (1 + \beta_j - \lambda\beta_j) \tag{7}$$

erfüllt, ein Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{B}$. Falls umgekehrt $\mu \neq 0$ ein Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{B}$ ist, dann ist jede Wurzel der Gleichung (7) ein Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p)$.

Zuerst beweisen wir folgendes Lemma.

Lemma. *Es sei $b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, b_p, a_p$ eine endliche Zahlenfolge, wo wenigstens eine der Zahlen a_i, $i = 1, \ldots, p$ von Null verschieden ist. Dann gilt eine der folgenden Behauptungen:*

a) *es existieren solche Indexe i_0, i_1, $1 \leqq i_0 < i_1 \leqq p$, dass $a_{i_0} = b_{i_1} = 0$ und $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$ für $i_0 < i < i_1$;*

b) *es existieren solche Indexe i_0, i_1, $1 \leqq i_0 \leqq i_1 \leqq p$, dass $a_{1_1} = b_{i_0} = 0$ und $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$ für $i_1 < i \leqq p$, $1 \leqq i < i_0$.*

Beweis. Man bilde die Zahlenfolge $b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, b_p, a_p, b_{p+1}, a_{p+1}, \ldots, b_{2p}, a_{2p}$, wo $b_{i+p} = b_i$, $a_{i+p} = a_i$ ist. Mit dem Symbol $[a_i, b_j]$ bezeichne man den Folgenabschnitt $a_i, b_{i+1}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b_j$. Die Zahlen $b_{i+1}, \ldots, a_{j+1}$ nennen wir „innere Glieder" dieses Folgenabschnittes. Wir beweisen, dass es ein solcher Folgenabschnitt $[a_{j_0}, b_{j_1}]$ existiert, dass $1 \leqq j_0 < j_1 \leqq 2p$, $a_{j_0} = b_{j_1} = 0$ und $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$ für innere Glieder dieses Folgenabschnittes gilt. Es existiert nach der Voraussetzung ein gewisser Index j_2, $1 \leqq j_2 \leqq p$ so, dass $a_{j_2} = 0$ ist. Da ferner nach der Voraussetzung wenigstens eine von der Zahlen b_i gleich Null ist und $b_{i+1} = b_i$ gilt, existiert ein solcher Index j_3, $p + 1 \leqq j_3 \leqq 2p$, dass $b_{j_3} = 0$ ist. Falls $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$ für alle innere Glieder des Folgenabschnittes $[a_{j_2}, b_{j_3}]$ ist, ist $[a_{j_2}, b_{j_3}]$ der gesuchte Folgenabschnitt. Solange in diesem Folgenabschnitt ein inneres Glied, das gleich Null ist, existiert (z. B. $a_{j_4} = 0$ für $j_2 < j_4 < j_3$), betrachte mann den Folgenabschnitt $[a_{j_4}, b_{j_3}]$. Ähnlicherweise für $b_{j_4} = 0$ betrachtet man den Folgenabschnitt $[a_{j_2}, b_{j_4}]$. Wenn alle innere Glieder eines von dem obigen Folgenabschnitten von Null verschieden sind, endet der Fortgang. Im umgekehrten Fall kann man unseren Fortgang wiederholen, bis man nach endlich vielen Schritte zu den Folgenabschnitt $[a_{j_0}, b_{j_1}]$

mit den erwünschten Eigenschaften kommt. Man bemerke noch, dass $j_1 \leqq p + j_0$ gelten muss. Wäre nämlich $j_1 > p + j_0$, möchte der Folgenabschnitt $[a_{j_0}, b_{j_1}]$ das Glied $a_{j_0+p} = a_{j_0} = 0$ enthalten und es würden also innere Nullglieder dieses Folgenabschnittes existieren.

Wir werden jetzt drei Fälle unterscheiden:

a) Es sei $1 \leqq j_0 < j_1 \leqq p$. Legt man jetzt $i_0 = j_0$, $i_1 = j_1$, gilt die Behauptung a) vom Lemma.

b) Es sei $1 \leqq j_0 \leqq p < j_1 \leqq p + j_0$. Man lege $i_0 = j_1 - p$, $i_1 = j_0$. Es gilt also $1 \leqq i_0 \leqq i_1 \leqq p$, $a_{i_1} = a_{j_0}$, $b_{i_0} = b_{j_1-p} = b_{j_1} = 0$. Da die innere Glieder des Folgenabschnittes $[a_{j_0}, b_{j_1}]$ von Null verschieden sind, gilt offensichtlich $a_i \neq 0$, $b_i = 0$ für $i_1 < i \leqq p$, $1 \leqq i \leqq i_0$ und es gilt also die Behauptung b) vom Lemma.

c) Es sei $p + 1 \leqq j_0 < j_1$. Falls man $i_0 = j_0 - p$, $i_1 = j_1 - p$ legt, es gilt die Behauptung a) vom Lemma. Dadurch ist das Lemma bewiesen.

Beweis des Satzes 1. Es wei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p)$, $\lambda \neq (\beta_j + 1)/\beta_j$, $j = 1, \ldots, p$. Dann existiert ein solcher Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$ (die Dimensionen der Vektoren $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, p$ entsprechen der Blockzerlegung der Matrix $\mathbf{B}$), dass es

$$\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p)\, \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}\,, \tag{8}$$

d. h.

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 - 1)\, \mathbf{x}_1 + (\beta_1 + 1)\, \mathbf{B}_{1p}\mathbf{x}_p = \lambda\beta_1 \mathbf{B}_{1p}\mathbf{x}_p + \alpha_1\lambda\mathbf{x}_1\,,\\
&(\beta_2 + 1)\, \mathbf{B}_{21}\mathbf{x}_1 + (\alpha_2 - 1)\, \mathbf{x}_2 = \lambda\beta_2 \mathbf{B}_{21}\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda\mathbf{x}_2\,,\\
&(\beta_3 + 1)\, \mathbf{B}_{32}\mathbf{x}_2 + (\alpha_3 - 1) x_3 = \lambda\beta_3 \mathbf{B}_{32}\mathbf{x}_2 + \alpha_3\lambda\mathbf{x}_3\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(\beta_i + 1)\, \mathbf{B}_{i,i-1}\mathbf{x}_{i-1} + (\alpha_i - 1)\, \mathbf{x}_i = \lambda\beta_i \mathbf{B}_{i,i-1}\mathbf{x}_{i-1} + \alpha_i\lambda\mathbf{x}_i\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(\beta_p + 1)\, \mathbf{B}_{p,p-1}\mathbf{x}_{p-1} + (\alpha_p - 1)\, \mathbf{x}_p = \lambda\beta_p \mathbf{B}_{p,p-1}\mathbf{x}_{p-1} + \alpha_p\lambda\mathbf{x}_p
\end{aligned} \tag{9}$$

gilt. Nach Umformung bekommt man ein äquivalentes System

$$\begin{aligned}
&(1 + \beta_1 - \lambda\beta_1)\, \mathbf{B}_{1p}\mathbf{x}_p = (1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)\, \mathbf{x}_1\,,\\
&(1 + \beta_2 - \lambda\beta_2)\, \mathbf{B}_{21}\mathbf{x}_1 = (1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2)\, \mathbf{x}_2\,,\\
&(1 + \beta_3 - \lambda\beta_3)\, \mathbf{B}_{32}\mathbf{x}_2 = (1 - \alpha_3 + \lambda\alpha_3)\, \mathbf{x}_3\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(1 + \beta_p - \lambda\beta_p)\, \mathbf{B}_{p,p-1}\mathbf{x}_{p-1} = (1 - \alpha_p + \lambda\alpha_p)\, \mathbf{x}_p\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Da $1 + \beta_j - \lambda\beta_j \neq 0, j = 1, \ldots, p$ ist, folgt aus (10)

$$
(11) \qquad
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{1p}\mathbf{x}_p &= \frac{1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1}{1 + \beta_1 - \lambda\beta_1}\,\mathbf{x}_1\,,\\
\mathbf{B}_{21}\mathbf{x}_1 &= \frac{1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2}{1 + \beta_2 - \lambda\beta_2}\,\mathbf{x}_2\,,\\
\mathbf{B}_{32}\mathbf{x}_2 &= \frac{1 - \alpha_3 + \lambda\alpha_3}{1 + \beta_3 - \lambda\beta_3}\,\mathbf{x}_3\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{B}_{p,p-1}\mathbf{x}_{p-1} &= \frac{1 - \alpha_p + \lambda\alpha_p}{1 + \beta_p - \lambda\beta_p}\,\mathbf{x}_p\,.
\end{aligned}
$$

Man setze jetzt voraus, dass $\mu \neq 0$ die Beziehung (7) erfüllt. Wir beweisen, dass μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ ist. Da $\mu \neq 0$ und $1 + \beta_j - \lambda\beta_j \neq 0, j = 1, \ldots, p$ ist, muss nach (7) $1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, p$ gelten. Man definiere die Zahlen $k_i, i = 1, \ldots, p$ wie folgt

$$
k_i = \frac{\mu^{i-1}(1 + \beta_1 - \lambda\beta_1)\ldots(1 + \beta_i - \lambda\beta_i)}{(1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)\ldots(1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i)}
$$

(es ist $k_i \neq 0, i = 1, \ldots, p$), Man definiere ferner $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p$ folgenderweise:

$$
(12) \qquad \mathbf{x}_i = k_i\mathbf{y}_i\,, \quad i = 1, \ldots, p\,.
$$

Aus (11) folgt dann

$$
(13) \qquad
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{1p}\mathbf{y}_p &= \mu\mathbf{y}_1\,,\\
\mathbf{B}_{21}\mathbf{y}_1 &= \mu\mathbf{y}_2\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{B}_{p,p-1}\mathbf{y}_{p-1} &= \mu\mathbf{y}_p\,,
\end{aligned}
$$

wobei $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, da $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ und $k_i \neq 0$ ist. Es ist also μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ und $\mathbf{y}$ ist der entsprechende Eigenvektor. Dadurch ist der erste Teil des Satzes 1 bewiesen.

II. Es sei $\mu \neq 0$ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ und $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ sei der entsprechende Eigenvektor, so dass die Gleichung (13) gilt. Wir beweisen, dass jede, die Gleichung (7) erfüllende Zahl λ, ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p)$ ist. Wir unterscheiden drei Fälle.

a) Es sei λ eine Wurzel der Gleichung (7) und beide Seiten dieser Gleichung seien von Null verschieden. Es ist also $k_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, p$, so dass man den Vektor $\mathbf{x}$ mit Hilfe von (12) definieren kann (es ist $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, da $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ ist). Wenn man für $\mathbf{y}_i$, $i = 1, \ldots, p$ nach (13) setzt, gilt angesichts (7) die der Beziehung (8) äquivalente Gleichung (11). Dadurch ist die Behauptung des Satzes 1 in diesem Falle bewiesen.

b) Es sei λ eine Wurzel der Gleichung (7) und es seien beide Seiten dieser Gleichung gleich Null. Das tritt in dem Falle ein, wenn wenigstens einer der Faktoren $1 + \beta_j -$

$- \lambda\beta_j$ und wenigstens einer der Faktoren $1 - \alpha_\iota + \lambda\alpha_\iota$ für die Wurzel λ Null gleich ist. Man bezeichne $a_i = 1 - \alpha_i + \lambda\alpha_1, i = 1, \dots, p, b_j = 1 + \beta_j - \lambda\beta_j, j = 1, \dots, p$. Die Zahlen a_i, b_j erfüllen dann die Voraussetzungen des Lemmas. Man beweist, dass dann der, dem System (10) entsprechende, Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ existiert.

Es sei z. B. die Behauptung a) des oben bewiesenen Lemmas erfüllt. Es existieren also solche Indexe $1 \leqq i_0 < i_1 \leqq p$, dass $1 - \alpha_{i_0} + \lambda\alpha_{i_0} = 0$, $1 + \beta_{i_1} - \lambda\beta_{i_1} = 0$ und $1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i \neq 0$, $1 + \beta_i - \lambda\beta_1 \neq 0$ für $i_0 < i < i_1$ ist. Man wähle einen beliebigen Vektor $\mathbf{x}_{i_0} \neq \mathbf{o}$. Aus den, die Faktoren $1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1$, $i_0 < i < i_1$ enthaltenden Gleichungen des Systems (10), kann man schrittweise die von Null verschiedene Vektoren $\mathbf{x}_{i_0+1}, \mathbf{x}_{i_0+2}, \dots, \mathbf{x}_{i_1-1}$ feststellen, da $1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i \neq 0$, $1 + \beta_i - \lambda\beta_i \neq 0$ für $i_0 < i < i_1$ ist. Wenn man ferner $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \dots = \mathbf{x}_{i_0-1} = \mathbf{x}_{i_1} = \mathbf{x}_{i_1+1} = \dots = \mathbf{x}_p = \mathbf{o}$ legt, gelten offensichtlich die Gleichungen $(1 + \beta_{i_0} - \lambda\beta_{i_0})\,\mathbf{x}_{i_0-1} = (1 - \alpha_{i_0} + \lambda\alpha_{i_0})\,\mathbf{x}_{i_0}$, $(1 + \beta_{i_1} - \lambda\beta_{i_1})\,\mathbf{x}_{i_1-1} = (1 - \alpha_{i_1} + \lambda\alpha_{i_1})\,\mathbf{x}_{i_1}$ und die restlichen Gleichungen des Systems (10) gelten trivial. Es gilt also die äquivalente Beziehung (8).

Es sei für die Zahlen $a_i, b_i, i = 1, \dots, p$ die Behauptung b) vom Lemma erfüllt. Es existieren also solche Indexe $1 \leqq i_0 \leqq i_1 \leqq p$, dass $1 - \alpha_{i_1} + \lambda\alpha_{i_1} = 0$, $1 + \beta_{i_0} - \lambda\beta_{i_0} = 0$ und $1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i \neq 0$, $1 + \beta_i - \lambda\beta_i \neq 0$ für $i_1 < i \leqq p$ und $1 \leqq i < i_0$ gilt. Man wähle einen beliebigen Vektor $\mathbf{x}_{i_1} \neq \mathbf{o}$. Aus den, die Faktoren $1 - \alpha_{i_1+1} + \lambda\alpha_{i_1+1}, \dots, 1 - \alpha_p + \lambda\alpha_p, 1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1, \dots, 1 - \alpha_{i_0-1} + \lambda\alpha_{i_0-1}$ enthaltenden (alle sind von Null verschieden), Gleichungen, kann man schrittweise die Vektoren $\mathbf{x}_{i_1+1}, \mathbf{x}_{i_1+2}, \dots, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i_0-1}$ feststellen, da auch $1 + \beta_i - \lambda\beta_i \neq 0$ für $i_1 < i \leqq p$ und $1 \leqq i \leqq i_0$ gilt. Legt man $\mathbf{x}_{i_0} = \mathbf{x}_{i_0+1} = \dots = \mathbf{x}_{i_1-1} = \mathbf{o}$, sind offensichtlich auch die Gleichungen $(1 + \beta_{i_1} - \lambda\beta_{i_1})\,\mathbf{x}_{i_1-1} = (1 - \alpha_{i_1} + \lambda\alpha_{i_1})\,\mathbf{x}_{i_1}$, $(1 + \beta_{i_0} - \lambda\beta_{i_0})\,\mathbf{x}_{i_0-1} = (1 - \alpha_{i_0} + \lambda\alpha_{i_0})\,\mathbf{x}_{i_0}$ erfüllt und die übrigen Gleichungen des Systems (10) sind trivial erfüllt. Es gilt also (8).

Dadurch ist der Satz 1 bewiesen.

Während der Satz 1 einen gegenseitigen Zusammenhang zwischen von Null verschiedenen Eigenwerten μ der Matrix $\mathbf{B}$ und Eigenwerten λ der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \dots, \beta_1, \dots, \beta_p)$. Es wird dabei auch de Fall untersucht, wenn der Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ gleich Null ist (dieser Fall tritt für eine singuläre Matrix $\mathbf{B}$ ein).

Satz 2. I. a) *Es sei λ eine Wurzel der Gleichung (7), wo $\mu \neq 0$ ist. Dann ist λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}$.*

b) *Es sei λ eine Wurzel der Gleichung (7), wo $\mu = 0$ ist und wenigstens eine der Zahlen $1 + \beta_i - \lambda\beta_i$ gleich Null ist. Dann ist λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}$.*

c) *Es sei λ eine Wurzel der Gleichung (7), wo $\mu = 0$ und $1 + \beta_i - \lambda\beta_i \neq 0$, $i = 1, \dots, p$ ist. Dann existieren offensichtlich solche Indexe $1 \leqq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leqq p$, dass $1 - \alpha_{i_0} + \lambda\alpha_{i_0} = \dots = 1 - \alpha_{i_k} + \lambda\alpha_{i_k} = 0$ gilt. Die Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}$, wenn wenigstens einer von den Diagonalblöcken $\mathbf{B}_{i_0}, \dots, \mathbf{B}_{i_k}$ der Matrix $\mathbf{B}^p = \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p\}$ singulär ist.*

II. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}$. Dann existiert ein solcher Eigenwert μ*

(gleich Null oder von Null verschieden) der Matrix $\mathbf{B}$, *dass* λ *eine Wurzel der Gleichung* (7) *ist.*

Beweis. Die Behauptung I.a) folgt sofort aus dem Satz 1.

I. b) Da ein solcher Index i_0 existiert, dass $1 + \beta_{i_0} - \lambda_{i_0} = 0$ ist und λ eine Wurzel der Gleichung (7) ist, es ist offenbar, dass λ auch eine Wurzel der Gleichung (7) für einen beliebigen, von Null verschiedenen Eigenwert μ der Matrix $\mathbf{B}$, ist. Aus dem Satz 1 folgt dann sofort, dass λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}$ ist.

I. c) Die Wurzel λ der Gleichung (7) ist genau dann ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}$, wenn das System

$$b_1 \mathbf{B}_{1p} \mathbf{x}_p = a_1 \mathbf{x}_1 \,,$$

$$b_i \mathbf{B}_{i,i-1} \mathbf{x}_{i-1} = a_i \mathbf{x}_i \,, \quad i = 2, \ldots, p \,,$$

wo $a_i = 1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i$, $b_i = 1 + \beta_i - \lambda\beta_i$, nicht trivial erfüllt ist. Nach der Voraussetzung ist dabei $a_{i_0} = a_{i_1} = \ldots = a_{i_k} = 0$ und $b_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, p$. Ohne Verlust der Allgemeinheit kann man den Beweis für den Fall durchführen, wenn $a_{i_0} = a_{i_1} = 0$ $1 \leqq i_0 < i_1 \leqq p$, $a_i \neq 0$ für $i \neq i_0$, $i \neq i_1$ gilt. Das Gleichungssystem besitzt dann die Form

$$
\begin{array}{lll}
 & (1) & b_1 \mathbf{B}_{1p} \mathbf{x}_p = a_1 \mathbf{x}_1 \,, \\
 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,, \\
 & (i_0 - 1) & b_{i_0-1} \mathbf{B}_{i_0-1,i_0-2} \mathbf{x}_{i_0-2} = a_{i_0-1} \mathbf{x}_{i_0-1} \,, \\
(14) & (i_0) & b_{i_0} \mathbf{B}_{i_0,i_0-1} \mathbf{x}_{i_0-1} = a_{i_0} \mathbf{x}_{i_0} = \mathbf{o} \,, \\
 & (i_0 + 1) & b_{i_0+1} \mathbf{B}_{i_0+1,i_0} \mathbf{x}_{i_0} = a_{i_0+1} \mathbf{x}_{i_0+1} \,, \\
 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,, \\
 & (i_1 - 1) & b_{i_1-1} \mathbf{B}_{i_1-1,i_1-2} \mathbf{x}_{i_1-2} = a_{i_1-1} \mathbf{x}_{i_1-1} \,, \\
 & (i_1) & b_{i_1} \mathbf{B}_{i_1,i_1-1} \mathbf{x}_{i_1-1} = a_{i_1} \mathbf{x}_{i_1} = \mathbf{o} \,, \\
 & (i_1 + 1) & b_{i_1+1} \mathbf{B}_{i_1+1,i_1} \mathbf{x}_{i_1} = a_{i_1+1} \mathbf{x}_{i_1+1} \,, \\
 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,, \\
 & (p) & b_p \mathbf{B}_{p,p-1} \mathbf{x}_{p-1} = a_p \mathbf{x}_p \,.
\end{array}
$$

Aus den Gleichungen $(i_0 + 1)$, $(i_0 + 2)$, ..., $(i_1 - 1)$ folgt schrittweise

$$\mathbf{x}_{i_0+1} = \frac{b_{i_0+1}}{a_{i_0+1}} \mathbf{B}_{i_0+1,i_0} \mathbf{x}_{i_0}, \; \mathbf{x}_{i_0+2} = \frac{b_{i_0+2}\, b_{i_0+1}}{a_{i_0+2}\, a_{i_0+1}} \mathbf{B}_{i_0+2,i_0+1} \mathbf{B}_{i_0+1,i_0} \mathbf{x}_{i_0}, \ldots,$$

$$\mathbf{x}_{i_1-1} = \frac{b_{i_1-1}, \ldots, b_{i_0+1}}{a_{i_1-1}, \ldots, a_{i_0+1}} \mathbf{B}_{i_1-1,i_1-2} \ldots \mathbf{B}_{i_0+1,i_0} \mathbf{x}_{i_0}$$

und aus der Gleichung (i_1) folgt schliesslich

$$\mathbf{o} = \frac{b_{i_1} \ldots b_{i_0+1}}{a_{i_1-1} \ldots a_{i_0+1}} \mathbf{B}_{i_1,i_1-1} \ldots \mathbf{B}_{i_0+1,i_0} \mathbf{x}_{i_0} \,.$$

Ähnlicherweise aus den Gleichungen $(i_1 + 1), \ldots, (p), (1), \ldots, (i_0)$ folgt schrittweise

$$\mathbf{o} = \frac{b_{i_0} \ldots b_1 b_p \ldots b_{i_1+1}}{a_{i_0-1} \ldots a_1 a_p \ldots a_{i_1+1}} \mathbf{B}_{i_0,i_0-1} \ldots \mathbf{B}_{1p} \mathbf{B}_{p,p-1} \ldots B_{i_1+1,i_1} \mathbf{x}_{i_1} .$$

Es ist also

$$\mathbf{o} = \mathbf{B}_{i_1,i_1-1} \ldots \mathbf{B}_{i_0+1,i_0} \mathbf{x}_{i_0} , \tag{15}$$

$$\mathbf{o} = \mathbf{B}_{i_0,i_0-1} \ldots \mathbf{B}_{1p} \mathbf{B}_{p,p-1} \ldots \mathbf{B}_{i_1+1,i_1} \mathbf{x}_{i_1} , \tag{16}$$

da $b_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, p$, $a_i \neq 0$ für $i \neq i_0$, $i \neq i_1$ ist. Es existiert eine nichttriviale Lösung des Systems. wenn wenigstens einer der Vektoren $\mathbf{x}_{i_0}$, $\mathbf{x}_{i_1}$ vom Nullvektor verschieden ist (wenn beide Vektoren dem Nullvektor gleich wären, würde aus dem System sofort $\mathbf{x}_i = \mathbf{o}$, $i = 1, \ldots, p$ folgen).

Es sei z. B. $\mathbf{x}_{i_0} \neq \mathbf{o}$. Man kann dann einfach solche Vektoren $\mathbf{x}_{i_0+1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_1-1}$ finden, dass die Gleichungen $(i_0 + 1), \ldots, (i_1)$ des Systems (14) erfüllts sind. Die restlichen Gleichungen des Systems (14) sind dann trivial erfüllt, wenn man die übrigen Vektoren gleich Null legt. Eine ähnliche Situation tritt im Falle $\mathbf{x}_{i_1} \neq \mathbf{o}$ ein. Das System (14) hat dann $\lambda = (\alpha_i - 1)/\alpha_i$ eine nichttriviale Lösung.

Nun befassen wir uns mit der Frage, wenn die Beziehungen (15), (16) angesichts $\mathbf{x}$ trivial lösbar sind. Es ist klar, dass der i_0-te Diagonalblock der Matrix $\mathbf{B}^p$ (man bezeichnet ihn $\mathbf{B}_{i_0}$) die Matrix

$$\mathbf{B}_{i_0,i_0-1} \mathbf{B}_{i_0-1,i_0-2} \ldots \mathbf{B}_{21} \mathbf{B}_{1p} \mathbf{B}_{p,p-1} \ldots \mathbf{B}_{i_0+1,i_0}$$

ist. Ähnlicherweise ist die Matrix

$$\mathbf{B}_{i_1,i_1-1} \mathbf{B}_{i_1-1,i_1-2} \ldots \mathbf{B}_{i_0,i_0-1} \ldots \mathbf{B}_{1p} \mathbf{B}_{p,p-1} \ldots \mathbf{B}_{i_1+1,i_1}$$

der Diagonalblock $\mathbf{B}_{i_1}$ der Matrix $\mathbf{B}^p$. Man beweist, dass wenigstens einer der Gleichungen (15), (16) eine nichttriviale Lösung genau dann besitzt, wenn mindestens eine der Matrizen $\mathbf{B}_{i_0}$, $\mathbf{B}_{i_1}$ singulär ist.

Es sei z. B. die Matrix $\mathbf{B}_{i_0}$ singulär. Dann existiert ein solcher Vektor $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, dass

$$\mathbf{B}_{i_0} \mathbf{y} = \mathbf{B}_{i_0,i_0-1} \ldots \mathbf{B}_{1p} \mathbf{B}_{p,p-1} \ldots B_{i_1+1,i_1} \mathbf{B}_{i_1,i_1-1} \ldots \mathbf{B}_{i_0+1,i_0} \mathbf{y} = \mathbf{o}$$

gilt. Man bezeichne

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}_{i_1,i_1-1} \ldots \mathbf{B}_{i_0+1,i_0} \mathbf{y} . \tag{17}$$

Falls $\mathbf{z} \neq \mathbf{o}$ ist, gilt offensichtlich (16) für $\mathbf{x}_{i_0} = \mathbf{z}$. Falls $\mathbf{z} = \mathbf{o}$, dann gilt aus (17) $\mathbf{x}_{i_0} = \mathbf{y}$. Eine gleiche Betrachtung kann man im Falle, wenn die Matrix $\mathbf{B}_{i_1}$ singulär ist, durchführen.

Wenn man umgekehrt voraussetzt, dass wenigstens eine der Gleichungen (15), (16) eine nichttriviale Lösung besitzt, ist sofort klar, dass eine der Matrizen $\mathbf{B}_{i_0}$, $\mathbf{B}_{i_1}$ singulär sein muss.

Man bemerke noch, dass im Falle, wenn $a_{i_0} = a_{i_1} = \ldots = a_{i_k} = 0$ gilt, der Beweis ganz durchläuft.

II. Es sei λ ein Eigenwert des Matrix $\boldsymbol{V}$. Dann muss eine nichttriviale Lösung des Systems (10) existieren. Es ist klar, dass der Fall, wenn $a_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, p$ und $b_{i_0} = 0$ für wenigstens einen Index i_0, nicht vorkommen kann, da das System (10) dann nur eine triviale Lösung $\boldsymbol{x}_1 = \ldots = \boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{o}$ besitzt.

Im Falle, wenn solche Indexe i_0, j_1 existieren, für welche $a_{i_0} = b_{j_1} = 0$ ist, hat das System (10) eine nichttriviale Lösung (der Fortgantg für ihre Feststellung ist im Beweis des Satzes 1, Fall II. b) enthalten). Beide Seiten der Gleichung (7) sind dann Null gleich so, dass λ deren Wurzel für einen beliebigen Eigenwert μ der Matrix $\boldsymbol{B}$ ist.

Im Falle, wenn $b_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, p$ und $a_{i_0} = 0$ für wenigstens ein Index i_0, gilt, folgt leicht aus den Gleichungen (10), dass eine nichttriviäle Lösung genau dann existiert, wenn die Matrix $\boldsymbol{B}$ singulär ist. Aus der Gleichung (7) folgt dann, dass λ ihre, dem Eigenwert $\mu = 0$ entsprechende, Wurzel ist.

Man setzte endlich voraus, dass λ ein Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{V}$ ist und $a_i \neq 0$, $b_j \neq 0$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, p$ gilt. Man wähle $\boldsymbol{x}_{i_0} \neq \boldsymbol{o}$. Aus den Gleichungen des Systems (10) folgt dann schrittweise

$$\boldsymbol{x}_{i_0} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0}} \boldsymbol{B}_{i_0,i_0-1} \boldsymbol{x}_{i_0-1} = \frac{b_{i_0} b_{i_0-1}}{a_{i_0} a_{i_0-1}} \boldsymbol{B}_{i_0,i_0-1} \boldsymbol{B}_{i_0-1,i_0-2} \boldsymbol{x}_{i_0-2} = \ldots =$$

$$= \frac{b_{i_0} b_{i_0-1} \ldots b_1 b_p b_{p-1} \ldots b_{i_0+1}}{a_{i_0} a_{i_0-1} \ldots a_1 a_p a_{p-1} \ldots a_{i_0+1}} \boldsymbol{B}_{i_0,i_0-1} \boldsymbol{B}_{i_0-1,i_0-2} \ldots \boldsymbol{B}_{1p} \boldsymbol{B}_{p,p-1} \ldots \boldsymbol{B}_{i_0+1,i_0} \boldsymbol{x}_{i_0}$$

oder

$$\boldsymbol{B}_{i_0,i_0-1} \boldsymbol{B}_{i_1-1,i_0-2} \ldots \boldsymbol{B}_{1p} \boldsymbol{B}_{p,p-1} \ldots \boldsymbol{B}_{i_0+1,i_0} \boldsymbol{x}_{i_0} = \frac{a_1 \ldots a_p}{b_1 \ldots b_p} \boldsymbol{x}_{i_0}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{B}_{i_0} \boldsymbol{x}_{i_0} = \frac{a_1 \ldots a_p}{b_1 \ldots b_p} \boldsymbol{x}_{i_0}$$

Es sei jetzt i_0 ein solcher Index, dass der i_0-te Diagonalblock der Matrix $\boldsymbol{B}^p$ einen von Null verschiedenen Eigenwert besitzt (ein solcher Block existiert immer solange die Matrix nicht die Nullmatrix ist). Dieser Eigenwert ist der Zahl μ^p gleich, wo μ irgendeiner der Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{B}$ ist. Da $\boldsymbol{x}_{i_0}$ ein Eigenvektor der Matrix $\boldsymbol{B}_{i_0}$ ist, der dem erwähnten Eigenwert entspricht, ist es klar, dass (17) gilt so, dass das System (10) eine nichttriviale Lösung hat und ferner

$$\frac{a_1 \ldots a_p}{b_1 \ldots b_p} = \mu^p$$

ist so, dass die Beziehung (7) gilt.

Dadurch ist der Satz 2 bewiesen.

Nun befassen wir uns mit einigen Spezialfällen des untersuchten Verfahrens. Wir werden immer voraussetzen, dass $\beta_1 = 0$ ist (die Matrix (5) ist also eine Dreiecksmatrix).

Fall 1. Es sei k ein gewisser Index, $k = 1, \ldots, p$ und es bilden die Parameter $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p$ eine beliebige Permutation der Parameter $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_{k-1}, -\alpha_{k+1}, \ldots, -\alpha_p$, d. h. $\beta_2 = -\alpha_{i_2}, \beta_3 = -\alpha_{i_3}, \ldots, \beta_p = -\alpha_{i_p}$. Dann ist die Gleichung (7) von der Form

$$(1 - \alpha_k + \lambda\alpha_k) \prod_{i=1, i \neq k}^{p} (1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i) = \mu_j^p \prod_{i=1, i \neq k}^{p} (1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i).$$

Aus dem Satz 2 und der vorhergehenden Gleichung folgt, dass die Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_p, 0, -\alpha_{i_2}, \ldots, -\alpha_{i_p})$ folgende Eigenwerte hat:

$$\lambda = 1 - 1/\alpha_i\,, \quad i = 1, \ldots, p\,, \quad i \neq k\,, \tag{18}$$

$$\lambda = 1 - (1 - \mu_j^p)/\alpha_k\,; \tag{19}$$

dabei μ_j^p sind alle, von Null verschiedene, Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}^p$. Solange $\mathbf{B}$ singulär ist, d. h. $\mathbf{B}^p$ einen Nulleigenwert hat, kann die Matrix $\mathbf{V}$ einen weiteren Eigenwert

$$\lambda = 1 - 1/\alpha_k \tag{20}$$

haben.

Für den Spektralradius der Matrix $\mathbf{V}$ gilt folgender Satz:

Satz 3. *Die Eigenwerte μ_j^p der Matrix $\mathbf{B}^p$ seien im Kreis $|z - \frac{1}{2}(M + m)| \leqq \leqq \frac{1}{2}(M - m)$, wo $|m| < M < 1$ ist (es handelt sich um den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}(M - m)$ und mit dem Mittelpunkt auf der Realachse, der durch die Punkte $z = m$ und $z = M$ durchgeht). Dann gilt für $\alpha_i = \tilde{\alpha}_1$, wo $[2 - (M + m)]/2(1 - m) \leqq \leqq \tilde{\alpha}_i \leqq [2 - (M + m)]/2(1 - M)$, $i = 1, \ldots, p$, $i \neq k$ und für $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k = 1 - - \frac{1}{2}(M + m)$ die Beziehung*

$$\varrho(\mathbf{V}(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}^p, 0, -\tilde{\alpha}_{i_2}, \ldots, -\tilde{\alpha}_{i_p})) \leqq (M - m)/[2 - (M + m)]$$

(es ist offensichtlich $\varrho(\mathbf{V}(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_p, 0, -\tilde{\alpha}_{i_2}, \ldots, -\tilde{\alpha}_{i_p})) \leqq \max(|M|, |m|) = \varrho(\mathbf{B})$).

Beweis. Man untersuche zuerst die Wurzeln $\lambda = 1 - (1 - \mu_j^p)/\alpha_k$, $\mu_j^p \neq 0$. Da $|\mu_j^p - \frac{1}{2}(M + m)| \leqq \frac{1}{2}(M - m)$ und $\mu_j^p = 1 - \alpha_k + \lambda\alpha_k$ ist, es gilt

$$|1 - \alpha_k + \lambda\alpha_k - \tfrac{1}{2}(M + m)| \leqq \tfrac{1}{2}(M - m)$$

oder

$$\left|\lambda + \frac{1 - \alpha_k}{\alpha_k} - \frac{M + m}{2\alpha_k}\right| \leqq \frac{M - m}{2|\alpha_k|}$$

so, dass λ im Kreis mit dem Mittelpunkt $s = (M + m)/2\alpha_k - (1 - \alpha_k)/\alpha_k$ und mit dem Radius $r = (M - m)/2\alpha_\kappa$ liegt. Für $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k = 1 - \frac{1}{2}(M + m) > 0$ gilt

$$s = \frac{M + m}{2\tilde{\alpha}_k} - \frac{1 - \tilde{\alpha}_k}{\tilde{\alpha}_k} = \frac{M + m - 2 + 2 - (M + m)}{2 - (M + m)} = 0\,,$$

$$r = \frac{M - m}{2\tilde{\alpha}_k} = \frac{M - m}{2 - (M + m)} > 0\,.$$

Alle betrachtete Wurzeln liegen für $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k$ im Kreis mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt und mit dem Radius $r = (M - m)/[2 - (M + m)]$. Solange $\lambda = 1 - 1/\alpha_k$ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}$ ist, ist für $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k$

$$\lambda = 1 - 1/\tilde{\alpha}_k = 1 - 1/[1 - \tfrac{1}{2}(M + m)] = 1 - 2/[2 - (M + m)] =$$
$$= -(M + m)/[2 - (M + m)]$$

und man kann leicht beweisen, dass $-r \leqq 1 - 1/\tilde{\alpha}_k \leqq r$ ist. Die Wurzel $\lambda = 1 - 1/\tilde{\alpha}_k$ hat auf den Spektralradius keinen Einfluss. Ferner ist leicht zu beweisen, dass für $[2 - (M + m)]/2(1 - m) \leqq \tilde{\alpha}_i \leqq [2 - (M + m)]/2(1 - M), i = 1, \ldots, p, i \neq k$ auch die Wurzeln $\lambda = 1 - 1/\tilde{\alpha}_i$ im Kreis mit dem Mittelpunkt im Punkt 0 und mit dem Radius $r = (M - m)/[2 - (M + m)]$ liegen. Es gilt also (21).

Bemerkung. Angesichts dessen, dass der Parameter α_i, $i = 1, \ldots, p$, $i \neq k$ nicht den Spektralradius beeinflusst, solange $[2 - (M + m)]/2(1 - m) < \alpha_i < [2 - (M + m)]/2(1 - M)$ is wobei $[2 - (M + m)/2(1 - m) < 1 < [2 - (M + m)]/2(1 - M)$ gilt, kann man $\alpha_1 = 1$, $i = 1, \ldots, p$, $i \neq k$, $\alpha_k = 1 - \frac{1}{2}(M + m)$, $\beta_j = -1$, $j = 2, \ldots, p$ wählen.

Fall 2. Man setze voraus, das $\mathbf{B}$ eine nichtsinguläre Blockmatrix mit Quadratblöcken von gleicher Dimension ist. Die Matrix $\mathbf{B}^p$ hat ferner reele Eigenwerte μ_j^p und se gelte $0 < m = \min\limits_j \mu_j^p \leqq \mu_j^p \leqq M = \max\limits_j \mu_j^p < 1$ (man kann leicht beweisen, dass für die Matrix $\mathbf{B}$ mit nichtquadratischen Blöcken oder wenn die quadratische Blöcke verschiedene Dimension haben, die Matrix $\mathbf{B}$ singulär ist).

Es seien k, l gewisse Indexe $k = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, p$, $k < l$. Es sei $\beta_1 = 0$ und bilde $\beta_3, \beta_4, \ldots, \beta_p$ eine beliebige Permutation der Parameter $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_{k-1}, -\alpha_{k+1}, \ldots, -\alpha_{l-1}, -\alpha_{l+1}, \ldots, -\alpha_p$, d. h. $\beta_3 = -\alpha_{i_3}, \ldots, \beta_p = -\alpha_{i_p}$. Dann ist die Gleichung (7) der Form

$$(22) \qquad (1 - \alpha_k + \lambda\alpha_k)(1 - \alpha_l + \lambda\alpha_l) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k, i\neq l}}^{p} (1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i) =$$
$$= \mu_j^p(1 + \beta_2 - \lambda\beta_2) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k, i\neq l}}^{p} (1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i).$$

Aus dem Satz 2 und aus der Gleichung (22) folgt sofort, dass die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_l, \ldots, \alpha_p, 0, \beta_2, -\alpha_{i_3}, \ldots, -\alpha_{i_p})$ folgende sind:

$$(23) \qquad \lambda = 1 - 1/\alpha_i\,, \quad i = 1, \ldots, p\,, \quad i \neq k\,, \quad i \neq l\,;$$

(24) die Wurzeln der Gleichung $(1 - \alpha_k + \lambda\alpha_k)(1 - \alpha_l + \lambda\alpha_l) = \mu_j^p(1 + \beta_2 - \lambda\beta_2)$.

Es gilt folgender Satz:

Satz 4. *Es sei*

$$\tilde{\alpha}_k = 1\Big/\left[1 + \left(\frac{\sqrt{M} - \sqrt{m}}{\sqrt{(1 - M)} + \sqrt{(1 - m)}}\right)^2\right], \tag{25}$$

$$\tilde{\alpha}_l = 1\Big/\left[1 + \left(\frac{\sqrt{M} + \sqrt{m}}{\sqrt{(1 - M)} + \sqrt{(1 - m)}}\right)^2\right], \quad \tilde{\beta}_2 = -1,$$

$$\frac{(\sqrt{(1 - m)} + \sqrt{(1 - M)})^2}{M - m + [\sqrt{(1 - m)} + \sqrt{(1 - M)}]^2} \leqq \tilde{\alpha}_i \leqq \tag{26}$$

$$\leqq \frac{[\sqrt{(1 - m)} + \sqrt{(1 - M)}]^2}{-(M + m) + [\sqrt{(1 - m)} + \sqrt{(1 - M)}]^2}, \quad i = 1, \ldots, p, \quad i \neq k, \quad i \neq l.$$

Dann gilt

$$\varrho(\mathbf{V}(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k, \ldots, \tilde{\alpha}_l, \ldots, \tilde{\alpha}_p, 0, \tilde{\beta}_2, -\tilde{\alpha}_{i_3}, \ldots, -\tilde{\alpha}_{i_p})) = \tag{27}$$

$$= \frac{M - m}{[\sqrt{(1 - m)} + \sqrt{(1 - M)}]^2} \leqq \varrho(\mathbf{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 0, \beta_2, -\alpha_{i_3}, \ldots, -\alpha_{i_p}))\,.$$

Beweis. Aus der Arbeit [1] folgt, dass für die Wurzeln λ der Gleichung (24) $\max |\lambda| \leqq (M - m)/[\sqrt{(1 - m)} + \sqrt{(1 - M)}]^2$ gilt, wobei die Gleichheit für $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k, \alpha_l = \tilde{\alpha}_l, \quad \beta_2 = \tilde{\beta}_2 = -1$ eintritt (siehe (25)). Man kann leicht beweisen, dass im Falle $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, p$, $i \neq k$, $i \neq l$ (siehe (26)) für die übrigen Eigenwerte (23) die Ungleichungen $|\lambda| \leqq (M - m)/[\sqrt{(1 - m)} + \sqrt{(1 - M)}]^2$, wodurch der Satz 4 bewiesen ist.

Literaturverzeichnis

[1] *O. Hübner:* Untersuchungen zur mehrparametrigen Überrelaxation. Mitteilungen aus dem mathem. Seminar Giessen, Heft 128, Giessen 1977.

[2] *M. Šisler:* Beitrag zu mehrparametrigen Iterationsverfahren. Apl. mat. 27 (1982), 277—284.

Souhrn

O JEDNÉ VÍCEPARAMETRICKÉ ITERAČNÍ METODĚ PRO p-CYKLICKÉ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

MIROSLAV ŠISLER

V práci se definuje jistá iterační metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{B}$ je slabě p-cyklická bloková matice. Iterační metoda závisí obecně na $2p$ parametrech. Je řešena optimalisace této metody v některých případech, charakterizovaných speciální volbou parametr.

Anschrift der Verfassers: RNDr. *Miroslav Šisler*, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.