Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Über die Konvergenzbeschleunigung des verallgemeinerten Oberrelaxationsverfahrens

Aplikace matematiky, Vol. 27 (1982), No. 1, 17–26

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103942`

ÜBER DIE KONVERGENZBESCHLEUNIGUNG DES VERALLGEMEINERTEN OBERRELAXATIONSVERFAHRENS

Miroslav Šisler

(Eingegangen 26. February 1980)

In der Arbeit wird ein gewisses einparametriges Iterationsverfahren für die Lösung eines linearen Gleichungssystems untersucht. Es wird vorausgesetzt, dass die Matrix des gegebenen Systems eine spezielle Form besitzt. Es ist der Optimalwert für den Parameter gesucht und es wird gezeigt, dass man manchmal die Anwendung vorhergehender Ergebnisse des Verfassers eine wesentlich schnellere Konvergenz liefern kann.

I

Es sei ein lineares algebraisches Gleichungssystem

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{1}$$

gegeben, wo

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{O} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{C}' & \mathbf{O} \end{array}\right)$$

eine symmetrische, schwach 2-zyklische Blockmatrix und

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

ist. Man setze ferner voraus, dass für die Eigenwerte μ^2 der Matrix $\mathbf{B}^2$ die Ungleichung

$$0 < m^2 = \min \mu^2 \leqq \mu^2 \leqq \max \mu^2 = M^2 < 1$$

gilt (wegen der Symmetrie von $\mathbf{B}$ sind die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$ reelle Zahlen und es gilt, dass wenn $\mu^2 > 0$ ein Eigenwert von $\mathbf{B}^2$ ist, dann sind die reelle Zahlen μ und $-\mu$ Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$).

Man definiere jetzt folgenderweise die Matrizen $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{A}(t)$ und den Vektor $\mathbf{a}(t)$:

$$\mathbf{U}(t) = t\mathbf{B}^2 + t\mathbf{B}\,, \tag{2}$$

(3) $$\mathbf{A}(t) = (t + 1)\,\mathbf{B} - t\mathbf{B}^3\,,$$

(4) $$\mathbf{a}(t) = (\mathbf{E} - t\mathbf{B}^2 - t\mathbf{B})\,\mathbf{b}\,,$$

wo t eine beliebige reelle Zahl ist. Es gilt dann folgender Satz:

Satz 1. *Es gelte*

$$-2/(1 - m^2) \leqq t \leqq 0\,.$$

Dann ist das System

(6) $$\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{a}(t)$$

mit dem System (1) *äquivalent und für die Spektralradien* $\varrho(\mathbf{A}(t))$, $\varrho(\mathbf{B})$ *der Matrizen* $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}$ *gilt die Ungleichung* $\varrho(\mathbf{A}(t)) \leqq \varrho(\mathbf{B})$.

Beweis. Es sei μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$. Aus (3) folgt sofort, dass die Zahl $(t + 1)\,\mu - t\mu^3$ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}(t)$ ist. Wir beweisen, dass für t aus dem Intervall (5)

(7) $$-|\mu| \leqq (t + 1)\,\mu - t\mu^3 \leqq |\mu|$$

gilt. Falls $\mu > 0$ ist, bekommen wir nach schrittweisen äquivalenten Umformungen die Ungleichungen

$$-|\mu| \leqq t\mu(1 - \mu^2) + \mu \leqq |\mu|\,,$$
$$-1 \leqq t(1 - \mu^2) + 1 \leqq 1\,,$$
$$-2/(1 - \mu^2) \leqq t \leqq 0\,.$$

Die letzte Ungleichung folgt aber aus (5) angesichts der Ungleichung $-2/(1 - \mu^2) \leqq \leqq -2/(1 - m^2)$. Einen ähnlichen Fortgang benutzt man im Falle $\mu < 0$. Es ist also $\varrho(\mathbf{A}(t)) \leqq \varrho(\mathbf{B})$.

Wir beweisen noch die Äquivalenz der Systeme (1) und (6). Aus (1) folgt, dass $(\mathbf{E} - \mathbf{B})\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist und nach der Multiplizierung durch die Matrix $\mathbf{E} - \mathbf{U}(t)$ bekommt man das System

$$(\mathbf{E} - \mathbf{U}(t))\,(\mathbf{E} - \mathbf{B})\,\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{U}(t))\,\mathbf{b}$$

oder

$$\mathbf{x} = (\mathbf{U}(t) + \mathbf{B} - \mathbf{U}(t)\,\mathbf{B})\,\mathbf{x} + (\mathbf{E} - \mathbf{U}(t))\,\mathbf{b}\,,$$

was man angesichts (2), (3) und (4) in der Form (6) schreiben kann. Es ist also klar, dass (1) und (6) genau dann äquivalent sind, wenn $\mathbf{E} - \mathbf{U}(t)$ regulär ist, d. h. wenn die Zahl 1 kein Eigenwert der Matrix $\mathbf{U}(t)$ ist. Wenn die Zahl μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ ist, ist die Zahl $t\mu^2 + t\mu$ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{U}(t)$. Wäre $t\mu^2 + t\mu = = 1$, wurde $t = 1/\mu(1 + \mu)$ gelten. Für $\mu > 0$ ist $t > 0$, so dass t nicht zum Intervall (5) gehört. Falls $\mu < 0$ ist, dann $t = 1/\mu(1 + \mu) = 1/-|\mu|\,(1 - |\mu|)$ gilt und man stellt leicht fest, dass $t < -2/(1 - m^2)$ ist (es ist nämlich $-1/|\mu|\,(1 - |\mu|) \leqq \leqq -1/|m|\,(1 - |m|) < -2/(1 - m^2)$). Die Zahl t gehört auch in diesem Fall nicht zum Intervall (5). Dadurch ist auch die Äquivalenz der Systeme (1) und (6) bewiesen.

Da die Matrix $\mathbf{A}(t)$ in der Form

$$\mathbf{A}(t) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{O} & \mathbf{D} \\ \hline \mathbf{D}' & \mathbf{O} \end{array}\right)$$

mit $\mathbf{D} = (t + 1)\,\mathbf{C} - t\mathbf{CC}'\mathbf{C}$ geschrieben werden kann, handelt es sich also wieder um eine schwach 2-zyklische Blockmatrix. Offensichtlich gilt $\varrho(\mathbf{A}(0)) = \varrho(\mathbf{B})$. Um die Zahl t aus dem Intervall (5) zu finden, für welche $\varrho(\mathbf{A}(t))$ minimal ist, untersuchen wir die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}^2(t)$ (diese sind nichtnegativ und es gilt $\varrho(\mathbf{A}(t)) = \sqrt{(\varrho(\mathbf{A}^2(t)))}$. Es gilt folgender Satz:

Satz 2. *Die Eigenwerte der Matrix* $\mathbf{A}^2(t)$ *sind der Form*

$$\mu^2[t(1 - \mu^2) + 1]^2\,, \tag{8}$$

wo μ^2 *die Eigenwerte der Matrix* $\mathbf{B}^2$ *bezeichnet.*

Beweis. Aus (3) folgt, dass $\mathbf{A}^2(t) = (t + 1)\,\mathbf{B}^2 - 2t(t + 1)\,\mathbf{B}^4 + t^2\mathbf{B}^6$ ist. Falls μ^2 ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}^2$ ist, gilt für den entsprechenden Eigenwert $\lambda^2(t, \mu^2)$ die Beziehung

$$\lambda^2(t, \mu^2) = (t + 1)^2\,\mu^2 - 2t(t + 1)\,\mu^4 + t^2u^6 = \mu^2[(t + 1) - t\mu^2]^2 =$$
$$= \mu^2[t(1 - \mu^2) + 1]^2\,,$$

was zu beweisen war.

Bemerkung. Der Satz 2 drückt eine eindeutige Abhängigkeit zwischen den Eigenwerten $\lambda^2(t, \mu^2)$ der Matrix $\mathbf{A}^2(t)$ und den Eigenwerten μ^2 der Matrix $\mathbf{B}^2$ aus.

Wir werden ferner den Verlauf der Funktionen $\lambda^2(t, \mu^2) = \mu^2[t(1 - \mu^2) + 1]^2$ von t im Intervall (5) untersuchen.

Lemma 1. *Der Graph der Funktion* $\lambda^2(t, \mu_i^2)$ *ist eine Parabel; die t-Achse ist dabei eine Tangente dieser Parabel in dem Punkt* $t_i = -1/(1 - \mu_i^2) < -1$ *und es ist* $\lambda^2(t_i, \mu_i^2) = 0$, $\lambda^2(t, \mu_i^2) \geqq 0$ *für alle* t *aus dem Intervall* (5). *Für* $t = 0$ *gilt* $\lambda^2(0, \mu_i^2) = \mu_i^2$. (Siehe Abb. 1)

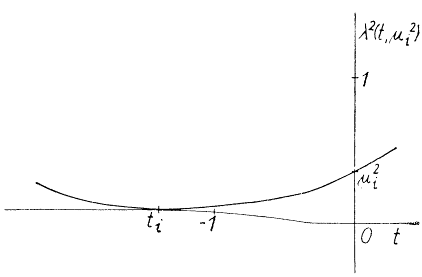

Abb. 1.

Der Beweis ist offensichtlich.

Lemma 2. *Es seien $\mu_i^2 < \mu_j^2$ zwei Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}^2$. Dann existiert im Intervalle (5) ein einziger Punkt t_{ij} in dem sich die Graphen der Funktionen $\lambda^2(t, \mu_i^2)$, $\lambda^2(t, \mu_j^2)$ schneiden und es gilt*

$$t_{ij} = -1/[1 - (\mu_j^2 - |\mu_i|\,|\mu_j| + \mu_i^2)]\;;$$

für $t < t_{ij}$ gilt dabei die Ungleichung $\lambda(t, \mu_j^2) < \lambda(t, \mu_i^2)$ und für $t > t_{ij}$ die Ungleichung $\lambda(t, \mu_i^2) < \lambda(t, \mu_j^2)$. (Siehe Abb. 2.)

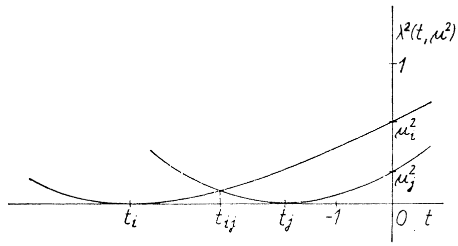

Abb. 2.

Beweis. Offensichtlich ist $t_i < t_j < -1$ und aus dem Verlauf der Funktion $\lambda^2(t, \mu^2)$ kann man sehen, dass ein von der beiden Durchschneidungspunkte im Intervall (t_i, t_j) liegen muss. Für $t_i < t$ ist aber $(t + 1) - t\mu_i^2 > 0$ und für $t < t_j$ gilt $(t + 1) - t\mu_j^2 < 0$. Aus der Beziehung

$$(9) \qquad \mu_i^2[(t + 1) - t\mu_i^2]^2 = \mu_j^2[(t + 1) - t\mu_j^2]^2$$

folgt dann schrittweise

$$|\mu_i|\,[(t + 1) - t\mu_i^2] = -|\mu_j|\,[(t + 1) - t\mu_j^2]\,,$$

$$|\mu_i|\,[t(1 - \mu_i^2) + 1] = -|\mu_j|\,[t(1 - \mu_j^2) + 1]\,,$$

$$t[|\mu_i|\,(1 - \mu_i^2) + |\mu_j|\,(1 - \mu_j^2)] = -(|\mu_i| + |\mu_j|)\,,$$

$$t = -\frac{|\mu_i| + |\mu_j|}{|\mu_i| + |\mu_j| - (|\mu_i|^3 - |\mu_j|^3)} = -\frac{1}{1 - (\mu_j^2 - |\mu_i|\,|\mu_j| + \mu_i^2)} = t_{ij}.$$

Man untersuche jetzt den zweiten Durchschnittspunkt der Kurven $\lambda^2(t, \mu_i^2)$, $\lambda^2(t, \mu_j^2)$. Dieser liegt entweder in einem Punkt $t > t_j$ oder in einem Punkt $t < t_i$. Falls $t > t_j$ ist, sind beide Ausdrücke $(t + 1) - t\mu_i^2$, $(t + 1) - t\mu_j^2$ positiv, wogegen für $t < t_i$ beide Ausdrücke negativ sind. Aus (9) folgt daher

$$|\mu_i|\,[(t + 1) - t\mu_i^2] = |\mu_j|\,[(t + 1) - t\mu_j^2]\,.$$

Weitere Umformungen geben dann für t die Beziehung

$$(10) \qquad t = -1/[1 - (\mu_j^2 + |\mu_i|\,|\mu_j| + \mu_i^2)]\,.$$

Man kann leicht feststellen, dass die Ungleichung

$$1 - \mu_i^2 > 1 - (\mu_j^2 + |\mu_i|\,|\mu_j| + \mu_i^2) \tag{11}$$

gilt. Falls $1 - (\mu_j^2 + |\mu_i|\,|\mu_j| + \mu_i^2) < 0$ ist, liegt der zweite Durchschnittspunkt nach (10) im Punkte $t > 0$, der nicht zum Intervall (5) gehört. Falls $1 - (\mu_j^2 + |\mu_i|\,|\mu_j| + \mu_i^2) \geqq 0$ ist, gilt nach (11) die Ungleichung

$$-1/[1 - (\mu_j^2 + |\mu_i|\,|\mu_j| + \mu_i^2)] < -1/(1 - \mu_i^2) \leqq -1/(1 - m^2)\,,$$

so dass der zweite Durchschnittspunkt nicht im Intervall (5) liegt. Dadurch ist Lemma 2 bewiesen.

Satz 3. *Für das, durch die Ungleichungen (5) definiertes, Intervall I gilt die Beziehung*

$$\min_{t \in I} \varrho(\mathbf{A}(t)) = \varrho(\mathbf{A}(\tilde{t}))\,,$$

wo

$$\tilde{t} = -1/[1 - (M^2 - |m|\,|M| + m^2)] \tag{12}$$

ist und ferner gilt

$$\varrho(\mathbf{A}(\tilde{t})) = |M|\,|m|\,(|M| - |m|)/[1 - (M^2 - |m|\,|M| + m^2)]\,. \tag{13}$$

Beweis. Man untersuche die Graphen der Funktionen $\lambda^2(t, m^2)$ und $\lambda^2(t, M^2)$. Sie schneiden einander nach Lemma 2 im einzigen Punkt $\tilde{t}$ aus dem Intervall (5) (siehe (12)). Aus Lemma 1 und Lemma 2 folgt sofort, dass für t die Ungleichung

$$\lambda^2(\tilde{t}, m^2) = \lambda^2(\tilde{t}, M^2) \geqq \lambda^2(\tilde{t}, \mu_i^2) > 0 \tag{14}$$

für alle Eigenwerte μ_i^2 der Matrix $\mathbf{B}^2$ gilt. Es gilt also die Behauptung des Satzes 3. Die Formel (13) bekommt man sofort nach der Einsetzung für $\tilde{t}$ in $\lambda^2(t, M^2)$.

Dadurch haben wir den Parameter t in der Matrix $\mathbf{A}(t)$ gefunden, für den das auf das System (6) angewandte Jacobi-Verfahren am schnellsten konvergiert. Man bemerke noch, dass $\varrho(\mathbf{A}(0)) = \varrho(\mathbf{B}) = |M|$, $\varrho(\mathbf{A}(-1)) = \varrho(\mathbf{B}^3) = |M|^3$ gilt und aus der Beziehung (13) folgt sofort, dass für $|M| = |m|$ die Beziehung $\varrho(\mathbf{A}(\tilde{t})) = 0$ gilt.

II

Man untersuche jetzt das System (6) für $t = \tilde{t}$. Da die Blockmatrix $\mathbf{A}(t)$ symmetrisch und schwach 2-zyklisch ist, kann man für weitere Konvergenzbeschleunigung die Ergebnisse der Arbeit [2] anwenden. Man definiere ein zweiparametriges Iterationsverfahren für das System

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(\tilde{t})\,\mathbf{x} + \mathbf{a}(\tilde{t})$$

folgenderweise:

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{T}(\alpha, \beta)\,\mathbf{x}_\nu + \mathbf{P}(\alpha, \beta)\,\mathbf{a}(\tilde{t})\,.$$

Dabei gilt

$$\boldsymbol{T}(\alpha, \beta) = (\alpha\boldsymbol{E} + \beta\boldsymbol{D}')^{-1}\,[(\alpha - 1)\,\boldsymbol{E} + (\beta + 1)\,\boldsymbol{D}' + \boldsymbol{D}]\,,$$

$$\boldsymbol{P}(\alpha, \beta) = (\alpha\boldsymbol{E} + \beta\boldsymbol{D}')^{-1}\,,$$

wo

$$\boldsymbol{D} = (\tilde{\imath} + 1)\,\boldsymbol{C} - \tilde{\imath}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$$

ist und α, β reelle von Null verschiedene Zahlen sind (siehe [2]). Man bezeichnet mit $\alpha_{\mathrm{opt}}, \mathrm{b}_{\mathrm{opt}}$ solche Parameterwerte α, β für die der Spektralradius der Matrix $\boldsymbol{T}(\alpha, \mathrm{b})$ minimal ist. Man definiere die Zahlen s^2 und S^2 wie folgt:

$$s^2 = \min_{\mu_i{}^2} \lambda^2(\tilde{\imath}, \mu_i^2)\,, \quad S^2 = \max_{\mu_i{}^2} \lambda^2(\tilde{\imath}, \mu_i^2)\,.$$

Nach (14) gilt $S^2 = \lambda^2(\tilde{\imath}, M^2) = \lambda^2(\tilde{\imath}, m^2)$. Aus dem Satz 4 der Arbeit [2] folgt dann folgender Satz:

Satz 4. *Es gelte*

$$1 - \sqrt{(1 - S^2)} \leqq s^2\,. \tag{15}$$

Es sei ferner

$$\alpha_0 = (1 - \sqrt{(1 - S^2)})\,(1 - s^2)/(1 + \sqrt{(1 - S^2)} - s^2)\,,$$

$$\beta_0 = -2(1 - s^2)/(1 + \sqrt{(1 - S^2)} - s^2)\,.$$

Dann gilt

$$\varrho(\boldsymbol{T}(\alpha_{\mathrm{opt}}, \beta_{\mathrm{opt}})) \leqq \varrho(\boldsymbol{T}(\alpha_0, \beta_0)) = \sqrt{[s^2(S^2 - s^2)/(1 - \sqrt{(1 - S^2)})\,(1 - s^2)]}\,.$$

Bemerkung zum Satz 4. Es wurde in der Arbeit [2] bewiesen, dass man die Werte α_0, β_0 für eine gute Annäherung der Optimalwerte $\alpha_{\mathrm{opt}}, \beta_{\mathrm{opt}}$ halten kann. Ferner kann man einfach feststellen, dass die Ungleichung

$$\varrho(\boldsymbol{T}(\alpha_0, \beta_0)) = \sqrt{[s^2(S^2 - s^2)/(1 + \sqrt{(1 - S^2)})\,(1 - s^2)]} \leqq$$
$$\leqq (1 - \sqrt{(1 - S^2)})/(1 + \sqrt{(1 - S^2)})$$

gilt, wenn die Bedingung (15) erfüllt ist. Es folgt aber aus [2], dass $(1 - \sqrt{(1 - S^2)})/ /(1 + \sqrt{(1 - S^2)}) = \varrho(\boldsymbol{T}(\alpha_1, -1))$ mit $\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - S^2)})$ gilt und dass für diese Parameterwerte die untersuchte zweiparametrige Methode auf das optimale Oberrelaxationsverfahren übergeht. Für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ konvergiert also das zweiparametrige Iterationsverfahren für das System (6) mit der Jacobi-Matrix $\boldsymbol{A}(\tilde{\imath})$ schneller, als das Jacobi-Verfahren mit der Iterationsmatrix $\boldsymbol{A}(\tilde{\imath})$. Es ist also $\varrho(\boldsymbol{T}(\alpha_0, \beta_0)) \leqq \varrho(\boldsymbol{T}(\alpha_1, -1)) \leqq \varrho(\boldsymbol{A}(\tilde{\imath}))$.

Die Konvergenzbeschleunigung nach dem Satz 4 ist unter der Voraussetzung möglich, dass für die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}^2(\tilde{\imath})$ die Ungleichung (15) gilt. Wir werden deswegen folgende Frage untersuchen: welche Bedingungen müssen die Eigenwerte μ_i^2 der ursprünglichen Matrix $\boldsymbol{B}^2$ erfüllen, damit für die Eigenwerte $\lambda^2(\tilde{\imath}, \mu_i^2)$ der Matrix $\boldsymbol{A}^2(\tilde{\imath})$ die Bedingung (15) gilt. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die

Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}^2$ in gewissen disjunkten Abschnitten des Intervalles $(0, 1)$ liegen (d. h. wenn die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$ in zwei disjunkten Kreisringflächen des Einheitskreises enthalten sind). Dieser Fall kann bei gewissen speziellen Aufgaben der Mechanik eintreten. Eine genaue Formulierung der Bedingungen für die Lage der Eigenwerte μ_i^2 enthält der Satz 5. Zuerst definieren wir aber die folgende Funktion der reellen Veränderlichen p:

$$\Lambda(p) = 1 - \frac{M^2}{p^2}\left[\tilde{t}\left(1 - \frac{M^2}{p^2}\right) + 1\right]^2. \tag{16}$$

Daher folgt dann

$$\Lambda'(p) = 2\frac{M^2}{p^3}\left[\tilde{t}\left(1 - \frac{M^2}{p^2}\right) + 1\right] - 4\tilde{t}\frac{M^4}{p^5}\left[\tilde{t}\left(1 - \frac{M^2}{p^2}\right) + 1\right],$$

so dass

$$\begin{aligned} \Lambda(1) &= 1 - M^2[\tilde{t}(1 - M^2) + 1]^2 = 1 - \lambda^2(\tilde{t}, M^2)\,, \\ \Lambda'(1) &= 2M^2[\tilde{t}(1 - M^2) + 1]\,[\tilde{t}(1 - 3M^2) + 1] \end{aligned}$$

ist.

Satz 5. *Es gelte*

$$1 < p < 1 + [\sqrt{\Lambda(1)} - \Lambda(1)]/\Lambda'(1)\,, \tag{17}$$

$p < \sqrt{(|M|/|m|)}$ *und es liege jeder Eigenwert* μ_i^2 *der Matrix* $\mathbf{B}^2$ *in irgendeinem der disjunkten Intervallen*

$$\langle m^2, m^2p^2\rangle, \langle M^2/p^2, M^2\rangle\,. \tag{18}$$

Dann erfüllen die Eigenwerte $\lambda^2(\tilde{t}, \mu_i^2)$ *die Bedingung* (15) *aus dem Satz* 4.

Bemerkung. Die Bedingung $p < \sqrt{(|M|/|m|)}$ garantiert, dass die Intervalle (18) disjunkt sind.

Beweis. Wir beweisen, dass für die Eigenwerte $\lambda^2(\tilde{t}, \mu_i^2)$ der Matrix $\mathbf{A}^2(\tilde{t})$ die Ungleichungen

$$\lambda^2(\tilde{t}, M^2/p^2) \leqq \lambda^2(\tilde{t}, \mu_i^2) \leqq \lambda^2(\tilde{t}, M^2) \tag{19}$$

gelten, solange μ_i^2 in den Intervallen (18) liegen. Aus dem Verlauf der Funktionen $\lambda^2(t, \mu_i^2)$ (siehe Lemma 1 und 2) ist klar, dass für gegebene μ_i^2 entweder

$$\lambda^2(t, M^2/p^2) \leqq \lambda^2(t, \mu_i^2) \leqq \lambda^2(t, M^2) \tag{20}$$

oder

$$\lambda^2(t, m^2p^2) \leqq \lambda^2(t, \mu_i^2) \leqq \lambda^2(t, m^2) \tag{21}$$

gilt, solange $-1/(1 - M^2/p^2) < \tilde{t} < \tilde{t}_1 < -1/(1 - m^2p^2)$ ist. Bezeichnet man durch $\tilde{t}_1$ den Punkt t im Intervall (5), für den die Parabeln $\lambda^2(t, M^2/p^2)$ und $\lambda^2(t, m^2p^2)$ sich schneiden, dann gilt

$$-1/(1 - M^2/p^2) < \tilde{t} < \tilde{t}_1 < -1/(1 - m^2p^2)\,.$$

Der Beweis der ersten Ungleichung ist trivial. Die Ungleichung $\tilde{t} < \tilde{t}_1$, d. h. die Ungleichung

$$-1/[1 - (M^2 - |m|\,|M| + m^2)] < -1/[1 - (M^2/p^2 - |m|\,|M| + m^2 p^2)]$$

führt nach äquivalenten Umformungen zu der gültigen Ungleichung $p^2 < |M|/|m|$. Davon folgt, dass für $t = \tilde{t}$ die Ungleichungen $\lambda^2(\tilde{t}, M^2/p^2) \leqq \lambda^2(\tilde{t}, m^2 p^2)$, $\lambda^2(\tilde{t}, M^2) = \lambda^2(\tilde{t}, m^2)$ gelten. Da alle Eigenwerte $\lambda^2(\tilde{t}, \mu_i^2)$ in der Vereinigung der Intervalle (20), (21) (wo $t = \tilde{t}$) liegen, gilt die zu beweisende Ungleichung (19). (Die Situation ist aus der Abb. 3 klar; die Eigenwerte liegen in der schraffirerten Zone.)

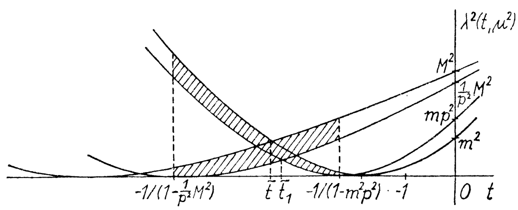

Abb. 3.

Angesichts (19) gilt weiter $s^2 = \min_{\mu_i^2} \lambda^2(\tilde{t}, \mu_i^2) = \lambda^2(\tilde{t}, M^2/p^2)$, $S^2 = \max_{\mu_i^2} \lambda^2(\tilde{t}, \mu_i^2) = \lambda^2(\tilde{t}, M^2)$. Wir sollen nun beweisen, dass unter der Bedingung (17) die Bedingung (15) gilt, d.h. dass $1 - \sqrt{(1 - S^2)} \leqq s^2$ ist. Die letzte Ungleichung kann man in der Form $1 - s^2 \leqq \sqrt{(1 - S^2)}$ oder $1 - \lambda^2(\tilde{t}, M^2/p^2) \leqq \sqrt{(1 - \lambda^2(\tilde{t}, M^2))}$ schreiben, angesichts (16) ist das die Ungleichung $\Lambda(p) \leqq \sqrt{\Lambda(1)}$. Diese Ungleichung gilt für $p = 1$, da $0 \leqq \Lambda(1) < 1$ ist. Da für $1 \leqq p \leqq \sqrt{[\tilde{t}M^2/(\tilde{t} + 1)]} = p_0 = \sqrt{[M^2/(M^2 - |m|\,|M| + m^2)]}$ die Funktion $\Lambda(p)$ wachsend und konkav ist, gilt in diesem Intervall nach dem Taylorsatz die Ungleichung

$$\Lambda(p) \leqq \Lambda(1) + \Lambda'(1)\,(p - 1)\,.$$

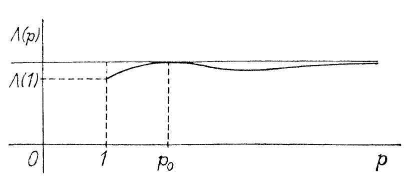

Abb. 4.

Die Bedingung $\Lambda(p) \leqq \sqrt{\Lambda(1)}$ ist also erfüllt, sobald $\Lambda(1) + \Lambda'(1)\,(p - 1) \leqq \sqrt{\Lambda(1)}$ gilt und dieses ist die Beziehung (17) (der Verlauf der Funktion $\Lambda(p)$ ist von Abb. 4 sichtbar).

Beispiel. Es seien

$$m^2 = \mu_1^2 = 0{,}36\,, \quad \mu_2^2 = 0{,}37\,, \quad \mu_3^2 = 0{,}78\,, \quad M^2 = \mu_4^2 = 0{,}81\,,$$

die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{B}^2$. Die Konvergenzgeschwindigkeit des Jacobi-Verfahrens für das System (1) entspricht der Zahl $\varrho(\boldsymbol{B}) = 0{,}9$.

Jetzt berechnen wir den Spektralradius der Matrix $\boldsymbol{A}(t)$, der dem optimalen Jacobi-Verfahren für das System (6) entspricht. Nach (12) und (13) gilt

$$\bar{t} = -2{,}7027\,, \quad \varrho(\boldsymbol{A}(\bar{t})) = 0{,}4378\,.$$

Ferner fragen wir, ob man bei gegebenen Eigenwerten der Matrix $\boldsymbol{B}^2$ die Konvergenz weiter beschleunigen kann, wenn man für das System $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\bar{t})\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}(\bar{t})$ das Zweiparameterverfahren anwendet. Es ist

$$\Lambda(1) = 0{,}8083\,, \quad \Lambda'(1) = 3{,}8340$$

und nach (17) ist

$$p = 1{,}0237\,, \quad p^2 = 1{,}0479\,.$$

Für μ_i^2 haben wir dann folgende Intervalle:

$$\langle 0{,}3600;\ 0{,}3772\rangle,\ \langle 0{,}7730;\ 0{,}8100\rangle\,.$$

Da die Zahlen μ_1^2, μ_2^2 im ersten Intervall und die Zahlen μ_3^2, μ_4^2 im zweiten Intervall liegen, ist nach dem Satz 5 die Bedingung (15) erfüllt. Dabei ist

$$s^2 = \lambda^2(\bar{t}, M^2/p^2) = 0{,}1155\,,$$
$$S^2 = \lambda^2(\bar{t}, M^2) = 0{,}1917\,.$$

Der, dem optimalen Oberrelaxationsverfahren, entsprechende Spektralradius nimmt für $\alpha_1 = 0{,}9495$ den Wert

$$\varrho(\boldsymbol{T}(\alpha_1, -1)) = (1 - \sqrt{(1 - S^2)})/(1 + \sqrt{(1 - S^2)}) = 0{,}0532$$

an. Der Spektralradius $\varrho(\boldsymbol{T}(\alpha_0, \beta_0))$ nimmt nach dem Satz 4 für $\alpha_0 = 0{,}9418$, $\beta_0 = -0{,}9918$ den Wert

$$\varrho(\boldsymbol{T}(\alpha_0, \beta_0)) = 0{,}0525$$

an.

Literaturverzeichnis

[1] *R. S. Varga:* Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, INC, 1962.

[2] *M. Šisler:* Bemerkungen zur Optimierung eines zweiparametrigen Iterationsverfahrens. Apl. mat. 21 (1976), 213—220.

Souhrn

O URYCHLENÍ KONVERGENCE ZOBECNĚNÉ SUPERRELAXAČNÍ METODY

MIROSLAV ŠISLER

V práci je definována jistá jednoparametrická iterační metoda pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic tvaru $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{B}$ je symetrická, slabě 2-cyklická bloková matice. Je nalezen optimální parametr zaručující co nejrychlejší konvergenci. Dále je ukázáno, že v případě speciálního rozložení vlastních čísel matice $\boldsymbol{B}$ v jednotkovém kruhu lze aplikací autorem dříve navržené dvojparametrické metody dosáhnout dalšího urychlení konvergence.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Miroslav Šisler*, CSc., Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, 115 67 Praha 1.